Introduction au domaine de recherche :

Groupe de Brauer d'un schéma

Margot Bruneaux

sous la direction de Philippe Gille

Table des matières

Introduction

Le groupe de Brauer d'un schéma S est défini par le groupe de cohomologie étale $H^2(S, G_{m,S})$ où $G_{m,S}$ est le groupe multiplicatif. Avec la notion du groupe de Brauer d'un schéma apparaît aussi celles d'algèbres d'Azumaya et de groupe de Brauer-Azumaya qui classifie les classes d'équivalence de ces algèbres. Il existe un morphisme de groupes injectif du groupe de Brauer-Azumaya dans le groupe de Brauer. Cependant, ces groupes, dans le cas général, sont difficiles à calculer et ne sont pas forcément égaux, le groupe de Brauer-Azumaya est d'ailleurs toujours de torsion ce qui n'est pas le cas du groupe de Brauer. Berkovich a cependant calculé, dans [Ber73], la torsion du groupe de Brauer d'une variété abélienne qui est alors égale au groupe de Brauer-Azumaya. Pour ce faire, il explicite notamment la construction des algèbres d'Azumaya sur les variétés abéliennes. De plus, les algèbres d'Azumaya de degré d sur un schéma S sont classifiées par $\check{H}^1$ de Čech du groupe $\mathrm{PGL}_{d,S}$. Intervient alors, dans l'étude des algèbres d'Azumaya, celle des $\mathrm{PGL}_{d,S}$-torseurs étales au-dessus de S qui sont, eux aussi, classifiés par le $\check{H}^1(S, \mathrm{PGL}_{d,S})$. Cependant, si nous revenons au cas des variétés abéliennes, on peut s'intéresser à un type de $\mathrm{PGL}_{d,S}$-torseurs particulier qui est celui des torseurs homogènes, i.e. les torseurs E qui sont isomorphes à t_a^*E pour toute translation t_a où a est un k-point de la variété abélienne. Ainsi, ces torseurs homogènes décrivent des classes d'Azumaya privilégiées et on peut s'intéresser à leurs images dans le groupe de Brauer. Dans la suite, nous cherchons à donner des éléments de compréhension des notions qui apparaissent dans ce problème et plus généralement dans l'étude des groupes de Brauer des schémas.

$$\begin{tikzcd}
\text{Groupe de Brauer-Azumaya} \arrow[r, hook] & \text{Groupe de Brauer}_{torsion} \arrow[r, hook] & \text{Groupe de Brauer} \\
\{\text{Algèbres d'Azumaya de degré } d\} \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \check{H}^1(S, \mathrm{PGL}_d) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \{\mathrm{PGL}_d\text{-torseurs}\}
\end{tikzcd}$$

Dans toute la suite, S désigne un schéma.

1 Groupes algébriques

Définition 1.1. Un S-schéma G est un schéma en groupes s'il est muni d'un morphisme de multiplication $m : G \times G \to G$, d'un morphisme $\varepsilon : S \to G$ et d'un morphisme inverse $\sigma : G \to G$ tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[r, "m \times id"] \arrow[dd, "\text{can.}"', "\wr"] & G \times G \arrow[dr, "m"] & \\
& & G \\
G \times (G \times G) \arrow[r, "id \times m"] & G \times G \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \times S \arrow[r, "id \times \varepsilon"] \arrow[dr, "\text{can.}"'] & G \times G \arrow[d, "m"] & S \times G \arrow[l, "\varepsilon \times id"'] \arrow[dl, "\text{can.}"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(id, \sigma)"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
S \arrow[r, "\varepsilon"] & G
\end{tikzcd}$$

De plus, on dit que le schéma en groupes est commutatif si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[dr, "m"] \arrow[dd, "\text{sym.}"'] & \\
& G \\
G \times G \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.2. On appelle S-foncteur un foncteur contravariant de la catégorie des S-schémas dans celle des ensembles.

Un schéma X peut être vu comme un S-foncteur via son foncteur des points, i.e. le foncteur qui à tout S-schéma Y associe $\mathrm{Hom}(Y, X)$. D'après le lemme de Yoneda, cette application est une injection dans la catégorie des S-foncteurs. De plus, le foncteur des points d'un schéma est entièrement déterminé par ses valeurs sur les schémas affines.

Remarque 1.3. Un S-schéma en groupes est un S-schéma tel que son foncteur des points associé soit un foncteur en groupes.

Exemple 1.4. Nous pouvons donner les exemples suivants de S-schémas en groupes.

- le groupe additif défini par $G_a(R) = (R, +)$ pour tout schéma $\mathrm{Spec}\, R \to S$
- le groupe multiplicatif défini par $G_m(R) = (R^*, \times)$ pour tout schéma $\mathrm{Spec}\, R \to S$
- le groupe linéaire de degré n défini par $G_m(R) = \mathrm{GL}_n(R)$ pour tout schéma $\mathrm{Spec}\, R \to S$
- si $n \in \mathbb{N}$, on peut définir le groupe μ_n par $\mu_n(R) = \{r \in R, r^n = 1\}$ pour tout schéma $\mathrm{Spec}\, R \to S$.

Nous prenons maintenant $S = \mathrm{Spec}\, k$ avec k un corps pour le reste du paragraphe.

Définition 1.5. Un groupe algébrique est un k-schéma en groupes de type fini sur k.

Exemple 1.6. Nous pouvons donner deux principaux exemples de groupes algébriques :

- Les groupes algébriques affines qui sont des sous-groupes fermés des groupes lineaires d'après [DG70, II, §2, Théorème 3.3]
- Les variétés abéliennes qui sont des schémas en groupes abeliens, projectifs et géométriquement intègres.

2 Faisceaux et torseurs

2.1 Topologies de Grothendieck et faisceaux

Nous cherchons maitenant à généraliser la notion de faisceau sur un espace topologique.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

Définition 2.1. Une topologie de Grothendieck sur une catégorie est la donnée pour tout objet $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ d'une collection d'ensembles de flèches $\{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}$ appelés recouvrements de $\mathcal{U}$ qui satisfont les conditions suivantes :

i) Si $\{\mathcal{V} \to \mathcal{U}\}$ est un isomorphisme alors c'est un recouvrement.

ii) Si $\{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}$ est un recouvrement et $\{\mathcal{V} \to \mathcal{U}\}$ est une flèche de la catégorie alors $\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V}$ existe pour tout $i \in I$ et $\{\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V} \to \mathcal{V}\}$ est un recouvrement.

iii) Si $\{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}$ est un recouvrement et si, pour tout indice i, on a un recouvrement $\{\mathcal{V}_{i,j} \to \mathcal{U}_i\}$ alors la collection des compositions $\{\mathcal{V}_{i,j} \to \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}$ est un recouvrement.

Une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck est appelée un site.

Exemple 2.2. • Soit X un espace topologique. La topologie usuelle sur X est une topologie de Grothendieck. Nous donnons deux exemples de topologies dans la catégeorie des S-schémas :

• *La topologie de Zariski* : pour tout schéma U, les recouvrements sont les ensembles d'applications $\{U_i \to U\}$ telles que $\bigsqcup U_i \to U$ soit surjective et chaque $U_i \to U$ est une immersion ouverte.

• *La topologie fppf* : pour tout schéma U, les recouvrements sont les ensembles d'applications $\{U_i \to U\}$ telles que $\bigsqcup U_i \to U$ soit surjective et chaque $U_i \to U$ soit fidélement plate localement de présentation finie.

On peut aussi définir une topologie pour la catégorie des S-schémas étales.

• *La topologie étale* : pour tout schéma U, les recouvrements sont les ensembles d'applications $\{U_i \to U\}$ telles que $\bigsqcup U_i \to U$ soit surjective et chaque $U_i \to U$ soit étale.

Définition 2.3. Soit $\mathcal{C}$ un site et $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{opp} \to (\mathrm{Ens})$ un foncteur. $\mathcal{F}$ est un faisceau si, pour tout recouvrement $\{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}\}$, on a la suite exacte suivante :

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \bigsqcup \mathcal{F}(\mathcal{U}_i) \rightrightarrows \bigsqcup_{(i,j)} \mathcal{F}(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_j)$$

Remarque 2.4. Si on prend un espace topologique X muni de la topologie usuelle alors on retrouve la définition classique de faisceau sur un espace topologique.

2.2 Torseurs

Nous prenons maintenant comme categorie $\mathcal{C}$ soit celle des S-schémas en groupes munie de la topologie *fppf* ou de la topologie de *Zariski*, soit celle des S-schémas étales munie de la topologie *étale*.

Définition 2.5. Soit G un S-schéma en groupes. Un G-torseur au-dessus d'un schéma X est un faisceau $\mathcal{P}$ muni d'une action ρ de G à droite telle que :

i) Il existe un recouvrement $Y \to X$ tel que $\mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$

ii) L'application
$$G \times \mathcal{P} \to \mathcal{P} \times \mathcal{P}, \quad (g,p) \to (p, pg)$$
est un isomorphisme.

La topologie de Grothendieck choisie joue ici un rôle important. En effet, si on prend $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$, l'application de $G_m = \mathbb{C}^* \to G_m = \mathbb{C}^*$ définie par $\zeta \mapsto \zeta^n$ est un μ_n-torseur pour la topologie étale.

Remarque 2.6. Certains auteurs imposent aux torseurs d'être des schémas. Dans le cas où le groupe G est affine, une application immédiate de la descente montre qu'un G-torseur est un schéma d'après [Ols16, Proposition 4.5.6].

Définition 2.7. Soit G un groupe algébrique et $\mathfrak{U} = \{U_i \to U\}$ un recouvrement de U. On définit les cocycles $Z^1(\mathfrak{U}, G)$ comme l'ensemble des éléments $\{(g_{ij}) \in G(U_i \times_U U_j)\}$ vérifiant la relation :

$$g_{jk}|_{U_{ijk}} g_{ij}|_{U_{ijk}} = g_{ik}|_{U_{ijk}}$$

avec $U_{ijk} = U_i \times U_j \times U_k$.

On dit que deux cocycles $(g_{ij}) \in \prod_{(i,j)} G(U_i \times_U U_j)$ et $(g'_{ij}) \in \prod_{(i,j)} G(U_i \times_U U_j)$ sont équivalents s'il existe un élément $(h_i) \in \prod_i G(U_i)$ tel que

$$g'_{ij} = h_j|_{U_{ij}} g_{ij} h_i^{-1}|_{U_{ij}}$$

On note $\check{H}^1(\mathfrak{U}, G)$ les cocycles quotientés par la relation d'équivalence.

Si $\mathfrak{V} = \{V_i \to V\}$ est un sous-recouvrement de $\mathfrak{U} = \{U_i \to U\}$, on a une flèche naturelle de $\check{H}^1(\mathfrak{U}, G)$ dans $\check{H}^1(\mathfrak{V}, G)$. Si $\mathcal{U}$ est l'ensemble des recouvrements de U pour la topologie choisie, on note :

$$\check{H}(U, G) = \varinjlim_{\mathfrak{U} \in \mathcal{U}} \check{H}(\mathfrak{U}, G).$$

Proposition 2.8. Soit G un S-schéma en groupes et X un S-schéma. On a une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme des G-torseurs au-dessus de X et $\check{H}^1(X, G)$.

Exemple 2.9. Les G_m-torseurs au-dessus de X pour la topologie de *Zariski* sont en bijection avec les classes d'isomorphisme des fibrés en droites.

Soit $f : G \to H$ un morphisme de S-schémas en groupes et E un G-torseur au-dessus de X. On peut obtenir un H-torseur E' au-dessus de X défini par le quotient (dans la catégorie des faisceaux étudiés) de $E \times H/G$ où l'action de G est définie par $g.(e, h) = (e.g^{-1}, f(g)h)$. Il est noté $E \times_G^X H$

Proposition 2.10. Si E est un G-torseur au-dessus de X, et $f : Y \to X$ est une application de S-schémas, alors $f^*E \underset{déf}{=} E \times_X Y$ est un G-torseur au-dessus de Y.

Le cas des variétés abéliennes :

Tous les torseurs de cette section sont des torseurs pour la topologie *fppf*.

Soit A un variété abelienne sur un corps k. Soit G un groupe algébrique lisse.

Définition 2.11. On dit qu'un G-torseur E au-dessus de A est homogène si pour tout $a \in X(k)$, $t_a^* E \cong E$ en tant que G-torseur au-dessus de A, où t_a est la translation par a.

L'application $X \overset{\times n}{\to} X$ est fidèlement plate de présentation finie, c'est donc un $X[n]$-torseur où $X[n]$ est le noyau de l'application f.

Définition 2.12. On dit qu'un G-torseur au-dessus de A est un G-torseur en lacet s'il est de la forme $E \times_{X[n]}^X G$ pour une extension de groupes $f : X[n] \to G$.

Brion a prouvé dans [Bri12] la propriété suivante :

Proposition 2.13. Les G-torseurs homogènes sont exactement les G-torseurs en lacets.

3 Cohomologie étale

On se place à présent dans la catégorie des faisceaux sur la catégorie des S-schémas étales munie de la topologie *étale*. Cette catégorie possède assez d'injectifs d'après [Ols16, Théorème 2.3.2].

Définition 3.1. Soit U un S-schéma étale. On note $H^i_{étale}(U, \_)$ les foncteurs dérivés associés au foncteur qui à un faisceau $\mathcal{F}$ associe $\mathcal{F}(U)$.

Pour motiver la cohomologie étale, nous pouvons, grâce au résultat suivant, la voir comme une généralisation de la cohomologie de Galois :

Proposition 3.2. Il existe une équivalence de catégories entre les faisceaux en groupes abeliens sur un corps k et la catégorie des $Gal(k_s/k)$-modules qui à un faisceau F associe sa fibre au point géométrique $\operatorname{Spec} k_s \to \operatorname{Spec} k$ défini par $F_s \underset{déf}{=} \varinjlim_{k' \in \mathcal{U}} F(\operatorname{Spec} k')$ où $\mathcal{U}$ sont les extensions finies séparables de k. Cette équivalence montre que la cohomologie de Galois permet de calculer la cohomologie étale sur un corps et inversement.

Remarque 3.3. Dans le cas d'un faisceau en groupes G non commutatif, on a cette égalité entre le $\check{H}^1(\operatorname{Spec} k, G)$ défini au paragraphe précédent et $H^1(Gal(k_s/k), G)$

Cette équivalence nous permet de prouver le théoreme de Hilbert 90 :

Corollaire 3.4 (Hilbert 90)**.** [Fu15, Corollaire 5.7.9] Pour tout corps k, $H^1(Gal(k_s/k), k_s^*) = 0$

Démonstration. $H^1(Gal(k_s/k), k_s^*) = H^1_{étale}(\operatorname{Spec} k, \mathcal{O}^*_{\operatorname{Spec} k}) = \operatorname{Pic}(\operatorname{Spec} k) = 0$ □

Nous avons une suite exacte de faisceaux pour la topologie étale :

$$1 \to G_m \to \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1 \tag{3.5}$$

Cette suite exacte induit la suite exacte suivante pour tout S-schéma étale U :

$$\begin{aligned} 1 \to G_m(U) \to \mathrm{GL}_n(U) \to \mathrm{PGL}_n(U) &\xrightarrow{\delta_0} \check{H}^1(U, G_m) \\ \to \check{H}^1(U, \mathrm{GL}_n) \to \check{H}^1(U, \mathrm{PGL}_n) &\xrightarrow{\delta_2} H_1(X, G_m) \end{aligned} \tag{3.6}$$

4 Groupe de Brauer d'un corps et d'un schéma

4.1 Le cas d'un corps

Soit k un corps.

Définition 4.1. Une k-algèbre unitaire associative A est dite simple centrale si son centre est égal à k et ses seuls ideaux bilatères sont $\{0\}$ et A.

Remarquons que $\mathcal{M}_n(k)$ est une algèbre simple centrale pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que les algèbres simples centrales sont stables par produit scalaire.

Définition 4.2. Soit A une k-algèbre. Les condtions suivantes sont équivalentes :

i) A est finie simple centrale,

ii) Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \otimes_k \overline{k} \cong \mathcal{M}_d(\overline{k})$,

iii) Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \otimes_k k_s \cong \mathcal{M}_d(k_s)$,

iv) Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et une extension finie galoisienne k'/k tels que $A \otimes_k k' \cong \mathcal{M}_d(k')$,

v) Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une algèbre à divison D de centre k tels que $A \cong \mathcal{M}_n(D)$,

vi) Le morhisme $A \otimes A^{op} \to End_k(A) : (a, b) \mapsto (x \mapsto axb^{-1})$ est un isomorphisme.

Le nombre d est appelé le degré de l'algèbre simple centrale A.

Ainsi une algèbre simple centrale devient triviale après une tensorisation par une extension finie galoisienne. Nous utilisons ce résultat pour établir une bijection entre les algèbres simples centrales de degré d et le $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_d(\operatorname{Spec} k_s))$.

Nous donnons une idée de la façon d'obtenir un cocycle à partir d'une algèbre simple centrale A. Soit k' une extension galoisienne finie qui trivialise A, i.e, telle que $A \otimes_k k' \cong \mathcal{M}_d(k')$. On fixe un tel isomorphisme α.

Le groupe des k'-automorphismes de $\mathcal{M}_d(k')$ est $\mathrm{PGL}_d(k')$. Ainsi à chaque élement $\gamma \in Gal(k'/k)$ on associe un élément de $\mathrm{PGL}_d(k')$ comme suit :

- γ agit sur $\mathcal{M}_d(k')$ par le morphsime $\gamma : \mathcal{M}_d(k) \otimes_k k' \xrightarrow{id\otimes\gamma} \mathcal{M}_d(k) \otimes_k k'$
- De même γ agit sur A par le morphsime $\gamma_A : A \otimes_k k' \xrightarrow{id\otimes\gamma} A \otimes_k k'$

On associe alors à γ l'élément $c(\gamma)$ de $\mathrm{PGL}_d(k')$ qui correspond au k'-isomorphisme de $\mathcal{M}_d(k')$ $\alpha \circ \gamma_A \circ \alpha^{-1} \circ \gamma^{-1}$

On peut verifier que $(c(\gamma))_{\gamma\in Gal(k'/k)}$ est un 1-cocycle et qu'un choix différent d'isomorphisme α donne un cocycle équivalent.

Par passage à la limite, on obtient une application de l'ensemble des classes d'equivalence des algèbres simples centrales de degré d dans le $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_d(\mathrm{Spec}\, k_s))$.

Ainsi les classes d'équivalence des algèbres simples centrales de degré d sont isomorphes à $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_d(\mathrm{Spec}\, k_s))$ qu'importe le degré d.

On aimerait alors mettre une relation d'équivalence sur l'ensemble des algèbres simples centrales.

Le groupe de Brauer d'un corps :

Nous disons que deux algèbres simples centrales A et B sont équivalentes s'il existe des entiers $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{M}_n(A) \cong \mathcal{M}_{n'}(B)$. Si on a trois algèbres simples centrales A, A' et B telles que A soit équivalente à A' alors $A \otimes B$ est équivalente à $A' \otimes B$. De plus d'après le défintion 4.2 (vi) $A \otimes A^{op}$ est isomorphe à une algèbre de matrices. Ainsi les classes d'équivalence des algèbres simples centrales forment un groupe. On obtient donc la définition suivante :

Définition 4.3. Le groupe des classes d'équivalence des algèbres simples centrales est appelé le groupe de Brauer de k et est noté $Br(k)$.

Si $d \mid d'$ on a une application $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_d(\mathrm{Spec}\, k_s))$ dans $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_{d'}(\mathrm{Spec}\, k_s))$ qui est compatible avec l'application des algèbres simples centrales de degré d dans celle de degré d' definie par $A \mapsto \mathcal{M}_{\frac{d'}{d}}(A)$

On a d'après ce qui précède un isomorphisme :

$$Br(k) \xrightarrow{\sim} \varinjlim H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_d(\mathrm{Spec}\, k_s))$$

où on a une flèche de $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_d(\mathrm{Spec}\, k_s))$ dans $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_{d'}(\mathrm{Spec}\, k_s))$ si $d \mid d'$.

On a la suite exacte suivante :

$$1 \to k_s^* \to \mathrm{GL}_d(k_s) \to \mathrm{PGL}_d(k_s) \to 1$$

qui induit une flèche de cohomologie de Galois :

$$H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_d(\mathrm{Spec}\, k_s)) \to H^2(Gal(k_s/k), k_s^*)$$

dont on peut montrer qu'elle est compatible avec les flèches de $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_d(\mathrm{Spec}\, k_s))$ dans $H^1(Gal(k_s/k), \mathrm{PGL}_{d'}(\mathrm{Spec}\, k_s))$ si $d \mid d'$.

Ainsi, on a une application

$$\delta : Br(k) \to H^2(Gal(k_s/k), k_s^*) \tag{4.4}$$

Proposition 4.5. L'application δ du (4.4) est un isomorphisme de groupes.

4.2 Groupes de Brauer d'un schéma

Nous allons maintenant généraliser ce que nous avons fait dans le cas d'un corps au cas d'un schéma quelconque.

Définition 4.6. Le groupe de Brauer d'un schéma S est noté $Br(S)$ et est défini par

$$Br(S) = H^2_{étale}(S, G_{m,S})$$

La généralisation de la notion d'algèbre simple centrale est la notion d'algèbre d'Azumaya. Nous avons vu q'une k-algèbre simple centrale est une algèbre telle qu'il existe un recouvrement étale $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ tel que $A \otimes_k k' \cong \mathcal{M}_d(k')$. Nous généralisons cette définition comme suit :

Définition 4.7. Soit A une $\mathcal{O}_S$-algèbre de type fini en tant que $\mathcal{O}_S$-module. A est une algèbre d'Azumaya s'il existe $\{U_i \to S\}$ pour la topologie étale tel que pour tout i, $A \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{U_i} \cong \mathcal{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{U_i})$ pour un certain $r_i \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 4.8. Soit A une $\mathcal{O}_S$-akgèbre de type fini en tant que $\mathcal{O}_S$-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est une algèbre d'Azumaya,

ii) Il existe $\{U_i \to S\}$ pour la topologie *fppf* tel que pour tout i, $A \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{U_i} \cong \mathcal{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{U_i})$ pour un certain $r_i \in \mathbb{N}^*$.

iii) A est localement libre comme $\mathcal{O}_S$-module et $A_s \otimes k(s)$ est simple centrale sur $k(s)$ pour tout s dans S,

iv) A est localement libre comme $\mathcal{O}_S$-module et l'application canonique $A \otimes A^{op} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X-mod}(A)$ est un isomorphisme.

Nous définissons à présent une relation d'équivalence sur les algèbres d'Azumaya.

Deux algèbres d'Azumaya A et A' sont dites équivalentes s'il existe des $\mathcal{O}_S$-modules E et E' localement libres de rangs finis et strictement positifs en tous points tels que :

$$A \otimes \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(E) \cong A' \otimes \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(E')$$

De la même façon que sur un corps, les classes d'équivalence des algèbres d'Azumaya forment un groupe. On a donc la définition suivante :

Définition 4.9. On appelle groupe de Brauer-Azumaya le groupe des classes d'équivalence des algèbres d'Azumaya. Il est noté $Br_{Az}(S)$.

Dans ce qui suit, nous prenons S un schéma connexe. Les r_i de la définition d'une algèbre d'Azumaya sont alors tous égaux à un certain d appelé le degré de l'algèbre d'Azumaya.

Lemme 4.10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\mathcal{A}ut(\mathcal{M}_n(\mathcal{O}_S)) = \mathrm{PGL}_n$

Il suit de ce lemme que, comme dans le cas des algèbres simples centrales, $\check{H}^1(S, \mathrm{PGL}_d)$ classifie les algèbres d'Azumaya de degré d.

Comparaison des deux groupes de Brauer

En suivant la même discussion que dans le cas d'un corps, la suite exacte 3.5 nous donne une application

$$\delta : Br_{Az}(S) \to Br(S)$$

Proposition 4.11. [CS21, Théorème 3.3.1, (iii)] L'application δ est un homomorphisme de groupes injectif.

Proposition 4.12. [CS21, Théorème 3.3.1, (iv)] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\check{H}^1(S, \mathrm{PGL}_d)$ s'injecte dans le groupe des n torsion de $Br(S)$.

Ainsi on a la factorisation suivante

$$\delta : Br_{Az}(S) \to Br(S)_{torsion} \to Br(S).$$

La flèche $Br_{Az}(S) \to Br(S)_{torsion}$ n'est pas toujours un isomorphisme, cependant un résulat de Gabber nous donne une égalité dans certains cas :

Théoreme 4.13 (Gabber)**.** Soit S un schéma quasi-compact et séparé avec une fibre ample inversible, par exemple un schéma quasi-projectif sur un anneau. L'application :

$$Br_{Az}(S) \to Br(S)_{torsion}$$

est un isomorphisme.

Remarque 4.14. La condition de séparabilité est nécessaire d'après [EHKV01].

Le cas des variétés abéliennes :

Dans le cas des variétés abéliennes

$$Br_{Az}(S) \to Br(S)_{torsion}$$

est un isomorphisme d'après 4.13.

Cette égalité avait cependant déjà été prouvée par Berkovich dans [Ber73]. Pour ce faire, il a notamment explicité la construction des algèbres d'Azumaya sur une variété abelienne.

Nous avons vu dans 2.2 que les PGL_d-torseurs homogènes étaient une classe de torseurs dont la forme était connue. On peut donc s'intéresser à leur image dans le groupe de Brauer-Azumaya. Cela nous permettrait peut-être d'obtenir plus d'informations sur les PGL_d-torseurs et sur les algèbres d'Azumaya.

Références

[Ber73] V. G. Berkovich. « The Brauer group of abelian varieties ». English. In : *Funct. Anal. Appl.* 6 (1973), p. 180-184. ISSN : 0016-2663. DOI : 10.1007/BF01077872.

[Bri12] Michel Brion. « Homogeneous bundles over abelian varieties ». English. In : *J. Ramanujan Math. Soc.* 27.1 (2012), p. 91-118. ISSN : 0970-1249.

[CS21] Jean-Louis Colliot-Thélène et Alexei N. Skorobogatov. *The Brauer-Grothendieck group*. English. T. 71. Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge. Cham : Springer, 2021. DOI : 10.1007/978-3-030-74248-5.

[DG70] Michel Demazure et Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique. Généralités. Groupes commutatifs. Avec un appendice 'Corps de classes local' par Michiel Hazewinkel.* English. Paris : Masson et Cie, Éditeur ; Amsterdam : North-Holland Publishing Company. xxvi, 700 p. (1970). 1970.

[EHKV01] Dan Edidin, Brendan Hassett, Andrew Kresch et Angelo Vistoli. « Brauer groups and quotient stacks ». English. In : *Am. J. Math.* 123.4 (2001), p. 761-777. ISSN : 0002-9327. DOI : 10.1353/ajm.2001.0024. URL : muse.jhu.edu/journals/american_journal_of_mathematics/toc/ajm123.4.html.

[Fu15] Lei Fu. *Étale cohomology theory*. English. 2nd revised ed. T. 14. Nankai Tracts Math. Hackensack, NJ : World Scientific, 2015. DOI : 10.1142/9569.

[Ols16] Martin Olsson. *Algebraic spaces and stacks*. English. T. 62. Colloq. Publ., Am. Math. Soc. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2016.