

Introduction au domaine de recherche:
Catégorie tannakienne associée à la convolution de
faisceaux pervers sur une courbe elliptique.

Nicolas Daire
sous la direction de Peter Jossen

Octobre 2023

1 Introduction

La théorie des faisceaux pervers trouve sa source dans la théorie de l'intersection homologique développée par Mark Goresky et Robert MacPherson dans les années 1970 pour étudier les variétés singulières, là où la théorie homologique classique faisait défaut. Dans les années qui suivent, ces idées ont été généralisées et approfondies pour établir les fondements des faisceaux pervers par Beilinson, Bernstein et Deligne, et indépendamment par Mebkhout pour démontrer la correspondance de Riemann-Hilbert qui établit une équivalence de catégories entre D -modules et faisceaux pervers.

Pour démontrer de nouveaux résultats d'équirépartition de sommes exponentielles, Katz étudie un produit de convolution dans la catégorie des faisceaux pervers qui prend la forme suivante. Pour une variété abélienne A munie de sa loi de groupe $a: A \times A \rightarrow A$, on peut définir un *produit de convolution* sur la catégorie $\mathbf{D}_c^b(A)$ des complexes de faisceaux sur A à cohomologie bornée et constructible qui détermine une structure de *catégorie tannakienne neutre* sur une sous-catégorie $\mathbf{P}(A)$ de la catégorie $\mathbf{Perv}(A)$ des faisceaux pervers sur A . Le foncteur ω est alors une équivalence de catégories tensorielles rigides entre $(\mathbf{P}(A), *)$ et $(\mathbf{Rep}(G), \otimes)$ pour un unique schéma en groupes affine G , où $\mathbf{Rep}(G)$ désigne la catégorie des représentations de G de dimension finie.

Pour tout objet \mathcal{F} de $\mathbf{P}(A)$, la catégorie tensorielle engendrée par \mathcal{F} est encore tannakienne, et par formalisme tannakien on peut lui associer un groupe algébrique $G_{\mathcal{F}}$ que l'on appelle son *groupe fondamental*. Une question qui se pose naturellement est alors de déterminer quels sont les groupes algébriques qui émergent comme groupe fondamental d'un objet de $\mathbf{P}(A)$. Dans cet exposé nous nous concentrerons sur le cas d'une courbe elliptique complexe suivant [Col+22], où Collas, Dettweiler, Reiter et Sawin parviennent à exprimer le produit de convolution en terme de monodromies sur des groupes de cohomologie dite parabolique, et utilisent ce formalisme pour mettre en évidence l'existence de faisceaux pervers dont le groupe fondamental est le groupe de Lie simple exceptionnel G_2 .

2 Faisceaux pervers sur une courbe elliptique

Dans cette section, nous allons aborder les principales notions requises pour définir la catégorie des faisceaux pervers. Toutefois, notre intérêt principal se portera finalement sur le cas spécifique d'une courbe elliptique, où ces concepts seront plus aisément compréhensibles et applicables.

2.1 Faisceaux constructibles sur une courbe algébrique

Soit X une variété algébrique complexe. On note $\mathbf{Sh}(X)$ la catégorie des faisceaux en \mathbb{C} -espaces vectoriels sur X que l'on considère avec sa topologie analytique.

Une *stratification* de X est une collection finie $(X_s)_{s \in S}$ de parties de X appelées *strates* vérifiant :

- i. $X = \sqcup_{s \in S} X_s$,
- ii. chaque strate X_s est une sous-variété lisse, connexe et localement fermée de X ,
- iii. chaque adhérence $\overline{X_s}$ est une union de strates de S .

Un faisceau \mathcal{F} sur X est dit *constructible pour la stratification* S si la restriction $\mathcal{F}|_{X_s}$ est un système local pour chaque strate $X_s, s \in S$. Le faisceau \mathcal{F} est dit *constructible* s'il existe une stratification pour laquelle \mathcal{F} est constructible. On note $\mathbf{Constr}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sh}(X)$ des faisceaux constructibles sur X .

Supposons maintenant que X est une courbe algébrique complexe lisse. Soit \mathcal{F} un faisceau constructible sur X . Une stratification pour \mathcal{F} consiste en un ensemble fini $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ de points de la courbe appelés *singularités* ainsi que son ouvert complémentaire $U = X \setminus S$. On note $\mathcal{L} = \mathcal{F}|_U$ le système local restreint à U .

Le système local \mathcal{L} est entièrement déterminé par sa monodromie. Soit γ un lacet dans U basé en $x_0 \in U$, en tirant en arrière on obtient un automorphisme

$$\rho(\gamma): \mathcal{L}_{x_0} = (\gamma^* \mathcal{L})_0 \xrightarrow{\sim} (\gamma^* \mathcal{L})_1 = \mathcal{L}_{x_0}$$

correspondant à l'action de monodromie de γ . À un système local sur U on peut donc associer fonctoriellement une représentation du groupe fondamental $\pi_1(U, x_0)$.

Proposition 2.1 ([Ach21, Théorème 1.7.9]). *Le foncteur $\mathbf{Loc}(X) \rightarrow \mathbf{Rep}(\pi_1(U, x_0))$ est une équivalence de catégorie.*

Soit $x_i \in S$ un point singulier de la stratification. Soit D un ouvert simplement connexe de X qui contient γ_i et aucune autre singularité en dehors de x_i . À homéomorphisme près il faut penser D comme un petit disque centré en x_i . On appelle *cospécialisation* de x_i le morphisme $\rho(\gamma_i)$ -équivariant correspondant à

$$f_i: \mathcal{F}_{x_i} \cong \mathcal{F}(D) \rightarrow \mathcal{F}_b.$$

Le faisceau \mathcal{F} est ainsi déterminé par son uplet de monodromie sur l'ouvert lisse ainsi que ses applications de cospécialisation en chaque singularité.

Avec la décomposition $\mathcal{F}_{x_i} \cong \text{Ker } f_i \oplus \text{Im } f_i$ en chaque singularité x_i , on obtient la décomposition $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$ où \mathcal{F}' est une somme de faisceaux gratte-ciel avec pour fibre $\text{Ker } f_i$ en chaque singularité x_i , et \mathcal{F}'' est égal à \mathcal{F} sur l'ouvert $E \setminus S$ et ses applications de cospécialisation sont données par l'inclusion $\text{Im } f_i \hookrightarrow \mathcal{F}_{x_0}''$ en chaque singularité x_i . Dans la suite on notera $M = \mathcal{F}_{x_0}$ la fibre générique et $M_i = \mathcal{F}_{x_i}'' \subseteq M$ les fibres singulières de \mathcal{F}'' , et $(C_1, \dots, C_n) \in \text{GL}(M)^n$ le uplet de monodromie locale en les singularités.

Dans le cas d'une courbe elliptique E , on identifie E au tore complexe $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ muni de sa loi de groupe usuelle, et on fixe un choix standard de générateurs du groupe fondamental

$$\pi_1(E \setminus S, x_{x_0}) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha, \beta \mid \gamma_1 \cdots \gamma_n [\alpha, \beta] = 1 \rangle$$

comme dans la Figure 1. Le système local \mathcal{L} est ainsi uniquement déterminé par le *uplet de monodromie* $T_{\mathcal{L}} = (\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n), \rho(\alpha), \rho(\beta)) \in \text{GL}(\mathcal{L}_{x_0})^{n+2}$.

2.2 Catégorie dérivée des faisceaux

On introduit ici quelques notions d'algèbre homologique, le lecteur pourra se reporter à [GM03] pour une exposition complète.

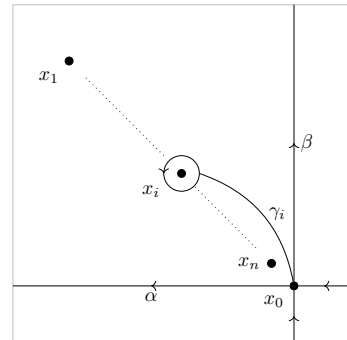


FIGURE 1 – Générateurs de $\pi_1(E \setminus S, x_0)$.

Soit X un espace topologique quelconque. On note $\mathbf{D}(X)$ la catégorie dérivée associée à $\mathbf{Sh}(X)$, dont les objets sont les complexes de chaînes et telle que les morphismes induisant des isomorphismes en homologie deviennent des isomorphismes. On note enfin $\mathcal{H}^k: \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ le foncteur de cohomologie en degré k . Lorsque X est une variété algébrique complexe on considère les faisceaux relativement à la topologie analytique complexe.

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Alors f induit les foncteurs image inverse $f^*: \mathbf{Sh}(Y) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$, et image directe et image directe à support propre $f_*, f_!: \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(Y)$. On dispose aussi des bifoncteurs $\mathcal{H}om$ faisceautique $\mathcal{H}om(-, -): \mathbf{Sh}(X)^{\text{op}} \times \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ et produit tensoriel $- \otimes -: \mathbf{Sh}(X) \times \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$. En dérivant les foncteurs exacts à gauche $Rf_*, Rf_!, R\mathcal{H}om$, et en définissant le foncteur image inverse exceptionnelle $f^!: \mathbf{D}^+(Y) \rightarrow \mathbf{D}^+(X)$ on retrouve le *formalisme des six opérations* qui vérifient des relations formelles simplifiant grandement les preuves.

On définit également les groupes de cohomologie (resp. à support compact) notés $H^\bullet(X, -) := R^\bullet\Gamma(-)$ (resp. $H_c^\bullet(X, -) := R^\bullet\Gamma_c(-)$) obtenus en dérivant le foncteur de section globale Γ (resp. à support compact Γ_c). On parlera d'hypercohomologie pour ne pas confondre avec les foncteurs de cohomologie.

Un complexe de faisceau à cohomologie bornée $\mathcal{K} \in \mathbf{D}^b(X)$ est dit constructible si tous ses groupes de cohomologie $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{K})$ sont constructibles. On note $\mathbf{D}_c^b(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}^b(X)$ des faisceaux constructible à cohomologie bornée. Dans ce formalisme on dispose de nombreuses formules utiles manipuler les objets, telle que la propriété suivante qui permet de tirer parti de la stratification des faisceaux constructibles.

Proposition 2.2 ([Ach21, Théorème 1.3.10]). *Soit F une partie fermée de X . On note $i: F \hookrightarrow X$ et $j: U \hookrightarrow X$ les inclusions fermée et ouverte complémentaires. Alors pour tout $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^+(X)$ les triangles suivants sont distingués :*

$$\begin{aligned} j_!j^!\mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*i^*\mathcal{F} \rightarrow, \\ i_!i^!\mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \rightarrow Rj_*j^*\mathcal{F} \rightarrow. \end{aligned}$$

2.2.1 Cohomologie parabolique

Supposons que X est une courbe algébrique complexe, et soit \mathcal{F} un faisceau constructible avec ensemble de singularités $S \subset X$. En considérant des petits disques centrés sur les singularités, avec la Propriété 2.2 on arrive à calculer explicitement $i^!\mathcal{F}$ pour l'inclusion $i: S \hookrightarrow X$. On parvient de même à calculer la cohomologie d'une classe particulière de faisceaux qui deviendra centrale dans notre étude. Supposons que les fibres singulières de \mathcal{F} sont maximales, c'est-à-dire que $\mathcal{F} = j_*\mathcal{L}$. On appelle *cohomologie parabolique* les groupes de cohomologie

$$H_p^\bullet(U, \mathcal{L}) := H^\bullet(X, \mathcal{F})$$

traités dans [DW06]. On donne une première description intrinsèque de la cohomologie parabolique.

Proposition 2.3. *Il existe un isomorphisme naturel*

$$H_p^1(U, \mathcal{L}) \cong \text{Im}(H_c^1(U, \mathcal{L}) \rightarrow H^1(U, \mathcal{L})).$$

Dans le cas d'une courbe elliptique E exprimons la cohomologie parabolique en termes de cocycles. On utilise la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow H^1(E, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(U, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma\mathcal{H}^2(i^!\mathcal{F}) \rightarrow H^2(E, \mathcal{F}).$$

Le groupe $H^1(U, \mathcal{L})$ est égal au quotient de l'ensemble des cycles Z par l'ensemble des bords B , où

$$\begin{aligned} Z &:= \{ \delta: \pi_1(U, x_0) \rightarrow M \mid \forall a, b \in \pi_1(U, x_0), \delta(ab) = \delta(a) \cdot \rho(b) + \delta(b) \}, \\ B &:= \{ \delta: a \mapsto v \cdot (\rho(a) - 1) \mid v \in M \} \subseteq Z. \end{aligned}$$

Le groupe fondamental $\pi_1(U, x_0)$ a pour présentation $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha, \beta \mid \gamma_1 \cdots \gamma_n [\alpha, \beta] = 1 \rangle$ donc un choix $(v_1, \dots, v_n, v_\alpha, v_\beta)$ de valeurs de δ sur les générateurs détermine un cocycle si et seulement si $v_1 C_2 \cdots C_n + \cdots v_n + v_\alpha (B-1)B^{-1}A^{-1} + v_\beta (1-A)B^{-1}A^{-1} = 0$. Ainsi on peut aussi écrire

$$Z = \left\{ (v_1, \dots, v_n, v_\alpha, v_\beta) \in M^{n+2} \left| \begin{array}{l} v_1 C_2 \cdots C_n + \cdots v_n + v_\alpha (B-1)B^{-1}A^{-1} \\ + v_\beta (1-A)B^{-1}A^{-1} = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$B = \{ (v(C_1 - 1), \dots, v(C_n - 1), v(A - 1), v(B - 1)) \mid v \in M \}.$$

De plus $\Gamma \mathcal{H}^2(i^! \mathcal{F}) = \bigoplus_{i=1}^n M_{C_i}$, donc par la suite exacte on en déduit que la cohomologie parabolique est donnée par le quotient $H^1(E, \mathcal{F}) = Z'/B$, où

$$Z' := \{ (v_1, \dots, v_n, v_\alpha, v_\beta) \in Z \mid v_1 \in \text{Im}(C_1 - 1), \dots, v_n \in \text{Im}(C_n - 1) \} \subseteq Z.$$

2.3 Faisceaux pervers

Dans cette section on étudie la notion de faisceau pervers sur une variété algébrique, en se concentrant sur le cas d'une courbe elliptique. On réfère le lecteur à [Ach21] ou [Max19] pour une étude plus générale.

2.3.1 Définitions et propriétés

Soit X une variété algébrique complexe.

Dans le contexte des faisceaux constructibles on appelle dualité de Verdier une généralisation de la dualité de Poincaré. On appelle *complexe dualisant* de X l'objet

$$\omega_X := \pi^! \mathbb{C}_{\text{pt}} \in \mathbf{D}_c^b(X),$$

où $\pi: X \rightarrow \text{pt}$ désigne l'application constante sur le point, et on définit le foncteur *dual de Verdier* $\mathbb{D}: \mathbf{D}_c^b(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}_c^b(X)$ par

$$\mathbb{D}(\mathcal{F}) := R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_X).$$

Lorsque X est une variété lisse, on peut alors montrer que $\omega_X = \mathbb{C}_X[2 \dim X]$.

On définit alors dans $\mathbf{D}_c^b(X)$ les sous-catégories

$${}^p \mathbf{D}^{\leq 0}(X) = \{ \mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b(X) \mid \forall i, \dim \text{supp } \mathcal{H}^{-i}(\mathcal{F}) \leq i \},$$

$${}^p \mathbf{D}^{\geq 0}(X) = \{ \mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b(X) \mid \forall i, \dim \text{supp } \mathcal{H}^{-i}(\mathbb{D}(\mathcal{F})) \leq i \}.$$

On dit que $\mathcal{F} \in {}^p \mathbf{D}^{\leq 0}(X)$ vérifie la *condition de support*, et que $\mathcal{F} \in {}^p \mathbf{D}^{\geq 0}(X)$ vérifie la *condition de cosupport*.

La paire $({}^p \mathbf{D}^{\leq 0}(X), {}^p \mathbf{D}^{\geq 0}(X))$ forme une t -structure sur $\mathbf{D}_c^b(X)$ dite *perverse*, on note $\mathbf{Perv}(X) = {}^p \mathbf{D}^{\leq 0}(X) \cap {}^p \mathbf{D}^{\geq 0}(X)$ le cœur de cette t -structure qui est donc une catégorie abélienne, et on appelle ses objets les *faisceaux pervers* sur X . On notera que le dual de Verdier \mathbb{D} échange ${}^p \mathbf{D}^{\leq 0}(X)$ et ${}^p \mathbf{D}^{\geq 0}(X)$ par dualité, donc en particulier $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}(X)$ si et seulement si $\mathbb{D}(\mathcal{F}) \in \mathbf{Perv}(X)$.

La catégorie des faisceaux pervers a une définition qui peut paraître opaque, mais son étude se cristallise dans le cas des courbes en la caractérisation élémentaire suivante :

Proposition 2.4. *Soit C une courbe algébrique complexe lisse. Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b(C)$. Alors \mathcal{F} est un faisceau pervers sur C si et seulement si il vérifie les conditions suivantes :*

- (i) $\mathcal{H}^k(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $k \notin \{-1, 0\}$,
- (ii) $\mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ est une somme finie de faisceaux gratte-ciel $\delta_x, x \in S$,
- (iii) $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F})$ n'a pas de section globale non nulle à support fini.

On énonce le théorème structural suivant :

Théorème 2.5 ([Ach21, Théorèmes 3.4.4 et 3.4.5]). *La catégorie $\mathbf{Perv}(X)$ est noethérienne et artinienne, et chaque objet simple de $\mathbf{Perv}(X)$ est un complexe de cohomologie d'intersection simple.*

Un *complexe de cohomologie d'intersection*, noté $\mathrm{IC}(Y, \mathcal{L})$, est un faisceau pervers construit à partir d'un système local \mathcal{L} sur une sous-variété lisse, connexe et localement fermée Y de X . Nous n'aborderons l'étude général de ces objets, mais pour les courbes algébriques on peut montrer que cette construction est très simple.

Proposition 2.6. *Soit \mathcal{L} un système local sur un ouvert U d'une courbe algébrique C , et $j: U \hookrightarrow C$ l'inclusion. Alors il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{IC}(U, \mathcal{L}) \cong j_* \mathcal{L}[1].$$

Corollaire 2.7. *Soit E une courbe elliptique. Les objets simples de $\mathbf{Perv}(E)$ lisses sur E sont donnés par les faisceaux de la forme $\mathcal{L}[1]$ pour un système local \mathcal{L} de rang un sur E , et correspondent donc aux caractères du groupe fondamental de E .*

2.3.2 Caractéristique d'Euler

On rappelle que la *caractéristique d'Euler* d'un complexe $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b(X)$ est définie par la somme alternée $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \dim H^k(X, \mathcal{F})$.

Lemme 2.8. *Soit X une variété algébrique et \mathcal{F} un faisceau constructible sur X pour une stratification $(X_s)_{s \in S}$. Alors*

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{s \in S} \chi(\mathcal{F}|_{X_s}) = \sum_{s \in S} \chi(X_s) \mathrm{rk}(\mathcal{F}|_{X_s}).$$

Dans le cas d'une courbe elliptique E , on en déduit la formule suivante :

Corollaire 2.9. *Soit \mathcal{F} un faisceau constructible sur E . On note $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des singularités et U sont complémentaire ouvert. Alors*

$$\chi(\mathcal{F}) = -n \mathrm{rk}(\mathcal{F}) + \sum_{1 \leq i \leq n} \dim(\mathcal{F}_{x_i}).$$

Corollaire 2.10. *Soit \mathcal{F} un faisceau pervers sur E . Alors $\chi(\mathcal{F}) \geq 0$, et $\chi(\mathcal{F}) = 0$ si et seulement si \mathcal{F} est lisse sur E .*

Ce dernier résultat nous permettra d'utiliser la caractéristique d'Euler comme formule pour une notion de dimension des faisceaux pervers.

3 Formalisme tannakien

Avant de s'attaquer à la convolution de faisceaux pervers, faisons un interlude sur les catégories tannakiennes, pour comprendre quelles bonnes propriétés cette opération doit vérifier.

Étant donné un schéma en groupes affine G sur un corps k , on peut considérer la catégorie $\mathbf{Rep}(G)$ de ses représentations de dimension finie sur k , naturellement munie des foncteurs dual et produit tensoriel. Le schéma en groupe affine G peut alors être reconstruit à partir de ces données. Le formalisme tannakien applique cette reconstruction à une classe plus générale de catégories.

Soit $(\mathbf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie *catégorie tensorielle*, c'est-à-dire une catégorie k -linéaire monoïdale symétrique pour le bifoncteur \otimes avec unité $\mathbb{1}$.

Soit X un objet de \mathbf{C} , on dit que X admet un *dual* X^\vee s'il existe un isomorphisme $\mathrm{Hom}(T \otimes X, \mathbb{1}) \cong \mathrm{Hom}(T, X^\vee)$ fonctoriel en T , et que X est *réflexif* si le morphisme naturel $X \rightarrow X^{\vee\vee}$ est un isomorphisme. Enfin on dit que \mathbf{C} est *rigide* si tous les objets de \mathbf{C} admettent un dual et sont réflexifs, et si la formation du dual commute au produit tensoriel.

On peut alors formellement définir un schéma en groupe affine $\underline{\mathrm{Aut}}^\otimes(\omega)$ qui vérifie :

Théorème 3.1 ([Del+82, Théorème 2.11]). *Soit \mathbf{C} une catégorie tensorielle rigide telle que $\text{End}(\mathbb{1}) = k$ et munie d'un foncteur exact et fidèle $\omega: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$ commutant avec \otimes . Alors $\underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ est représenté par un schéma en groupes affine G , et le foncteur naturel $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Rep}(G)$ est une équivalence de catégorie.*

Sous les hypothèses de l'énoncé du théorème on dit que \mathbf{C} est une *catégorie tannakienne neutre* avec foncteur fibre ω . La catégorie \mathbf{C} hérite donc des propriétés de la catégorie $\mathbf{Rep}(G)$ associée.

Pour tout objet X de \mathbf{C} la sous-catégorie tensorielle $\langle X \rangle$ engendrée par X et X^\vee reste une catégorie tannakienne neutre avec foncteur fibre $\omega|_{\langle X \rangle}$, donc par formalisme tannakien on peut lui associer un schéma en groupe affine G_X que l'on appelle le *groupe fondamental* de X , et G_X est le groupe algébrique donné par l'image de G dans $\text{GL}_{\omega(X)}$.

4 Convolution additive

Soit E une courbe elliptique. On munit $\mathbf{D}_c^b(E)$ d'un *produit de convolution additive* noté $*$, et on introduit une sous-catégorie $\mathbf{P}(E)$ de $\mathbf{Perv}(E)$ sur laquelle le produit de convolution induit une structure de catégorie tannakienne. Le lecteur pourra consulter [Wei06] et [LMW21] pour une étude plus générale du produit de convolution sur une variété abélienne.

4.1 Définition et propriétés

On note $a: E \times E \rightarrow E$ la loi de groupe de E et 0 son neutre. Soit \mathcal{F} et \mathcal{G} deux complexes de faisceaux de $\mathbf{D}_c^b(E)$. On note $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := \text{pr}_1^* \mathcal{F} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{G} \in \mathbf{D}_c^b(X \times Y)$ le produit tensoriel extérieur de \mathcal{F} et \mathcal{G} , on définit le *produit de convolution additive* de \mathcal{F} et \mathcal{G} par

$$\mathcal{F} * \mathcal{G} := Ra_*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \in \mathbf{D}_c^b(E),$$

et on définit le *dual* de \mathcal{F} par

$$\mathcal{F}^\vee := (-\text{id})^* \mathbb{D}(\mathcal{F}) \in \mathbf{D}_c^b(E).$$

L'étude du produit de convolution ne dépend en fait pas de la classe d'isogénie de la courbe elliptique choisie, on pourra donc omettre de préciser l'espace de base E lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté et l'identifier à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$.

Nous pouvons alors montrer que $(\mathbf{D}_c^b, *, (-)^\vee)$ est une catégorie tensorielle rigide avec unité δ_0 qui vérifie $\text{End}(\delta_0) \cong \mathbb{C}$. On montre en fait que la convolution par δ_x correspond à l'image directe par la translation τ_x . La catégorie \mathbf{Perv} n'est cependant pas stable par le produit de convolution $*$, on restreint donc la catégorie considérée.

4.2 Catégorie tannakienne $\mathbf{P}(E)$

Définition 4.1. Un objet $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b$ a la propriété \mathcal{P} si pour tout système local \mathcal{L} de rang un sur E la condition suivante est satisfaite :

$$\forall i \neq 0, H^i(E, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) = 0.$$

On note $\mathbf{P}(E)$ la sous-catégorie de \mathbf{D}_c^b formée des objets avec la propriété \mathcal{P} .

Théorème 4.2. *Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b$. Si \mathcal{F} a la propriété \mathcal{P} , alors $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}$. Plus précisément, $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}$ vérifie \mathcal{P} si et seulement si \mathcal{F} n'admet pas de sous-objet ni de quotient de la forme $\mathcal{L}[1]$ pour un système local \mathcal{L} de rang un sur E . En particulier un objet simple de \mathbf{Perv} vérifie \mathcal{P} si et seulement si il n'est pas de la forme $\mathcal{L}[1]$.*

De plus, la classe des objets de \mathbf{D}_c^b vérifiant la propriété \mathcal{P} est stable par convolution et par dual $(-)^\vee$.

On obtient ainsi une sous-catégorie \mathbf{P} de \mathbf{Perv} munie de la convolution $*$ et du dual $(-)^\vee$. Il faut cependant prendre des précautions car \mathbf{P} n'est pas une sous-catégorie abélienne de \mathbf{Perv} . On note \mathbf{Neg} la sous-catégorie de \mathbf{Perv} constituée des faisceaux pervers dont la caractéristique d'Euler est

nulle. On a vu que \mathbf{Neg} est constituée des faisceaux pervers lisses sur E , et c'est une sous-catégorie de Serre de \mathbf{Perv} . On peut donc définir la catégorie abélienne quotient $\overline{\mathbf{Perv}} = \mathbf{Perv}/\mathbf{Neg}$ sur laquelle le produit de convolution est bien défini.

Proposition 4.3 ([GL96, Section 3.7]). *Le foncteur naturel $\mathbf{P} \rightarrow \overline{\mathbf{Perv}}$ obtenu en composant l'inclusion $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Perv}$ et la localisation $\mathbf{Perv} \rightarrow \overline{\mathbf{Perv}}$ est une équivalence de catégorie compatible au produit de convolution et au dual.*

La catégorie $\overline{\mathbf{Perv}}$ est la bonne catégorie à considérer pour définir naturellement le produit de convolution, mais l'équivalence de catégorie avec \mathbf{P} permet de définir la convolution entre braves faisceaux pervers, et nous permettra dans la suite de mener les calculs explicitement.

La catégorie \mathbf{P} est donc une catégorie tensorielle rigide pour le produit de convolution $*$ et le dual $(-)^{\vee}$. On la munit du foncteur fibre

$$\omega: \mathcal{F} \mapsto H^0(E, \mathcal{F}),$$

et on dénote la dimension tannakienne de $\mathcal{F} \in \mathbf{P}$ par

$$\dim(\mathcal{F}) := \dim(\omega(\mathcal{F})) = h^0(E, \mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}).$$

Théorème 4.4. *La catégorie \mathbf{P} munie du produit de convolution $*$ et du dual $(-)^{\vee}$ avec unité δ_0 est une catégorie tannakienne neutre pour le foncteur fibre ω .*

On note \mathbf{P}^{ss} la sous-catégorie de \mathbf{P} formée de ses objets semi-simples, qui hérite formellement de la structure de catégorie tannakienne neutre.

4.3 Calcul effectif du produit de convolution

On se propose dans cette section de mener un calcul explicite du produit de convolution dans \mathbf{P}^{ss} en terme de la monodromie, en identifiant E avec $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ muni de ses topologie et loi de groupe usuelles.

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} des éléments simples de \mathbf{P}^{ss} . Leur convolution $\mathcal{F} * \mathcal{G} \in \mathbf{P}^{\text{ss}}$ est semi-simple donc s'écrit comme somme directe de faisceaux gratte-ciel en degré 0 et de complexes de cohomologie d'intersection en degré -1 . Une application du lemme de Schur permet déjà de déterminer les composantes en degré zéro.

Proposition 4.5. *Soit $z \in E$ une singularité de $\mathcal{F} * \mathcal{G}$. Alors δ_z est un facteur direct de $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $\mathcal{F} \cong \tau_{z*} \mathcal{G}^{\vee}$, et dans ce cas il apparaît avec multiplicité un .*

Il reste donc à calculer le facteur de $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ isomorphe à un complexe de cohomologie d'intersection qui est entièrement déterminé par sa monodromie, que l'on va calculer dans le reste de la section. On suppose \mathcal{F} et \mathcal{G} en degré -1 .

Soit $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ les ensembles de singularités de \mathcal{F} et de \mathcal{G} , et U et V les ouverts lisses complémentaires. On note $j_U: U \hookrightarrow E$ et $j_V: V \hookrightarrow E$ les inclusions et $\mathcal{F} = j_{U*} \mathcal{L}[1]$ et $\mathcal{G} = j_{V*} \mathcal{M}[1]$. Alors la convolution $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ a pour singularités $X + Y = \{x_i + y_j \mid x_i \in X, y_j \in Y\}$. En toute généralité on peut montrer que $\mathcal{H}^k(\mathcal{F} * \mathcal{G})_z = H^k(E, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}(z - x))$, où $\mathcal{G}(z - x) = (x \mapsto z - x)^* \mathcal{G}$, donc ici

$$\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F} * \mathcal{G})_z = H_p^1(E \setminus (X \cup (z - Y)), \mathcal{L}|_{E \setminus (X \cup (z - Y))} \otimes \mathcal{M}|_{E \setminus (X \cup (z - Y))}).$$

On pose

$$\begin{aligned} W &:= \text{pr}_1^{-1}(U) \cap d^{-1}(V) \cap \text{pr}_2^{-1}(E \setminus (X + Y)) \\ &= \{ (x, y) \in E^2 \mid y \in E \setminus (X + Y), x \in E \setminus (X \cup (y - Y)) \} \subset E \times E, \end{aligned}$$

où $d: (x, y) \mapsto y - x$, et la deuxième projection induit une fibration localement triviale $\text{pr}_2: W \rightarrow E \setminus (X + Y)$ de fibre $E \setminus (X \cup (y_0 - Y))$ en y_0 , et pour $(x_0, y_0) \in W$ on obtient la suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0) \rightarrow \pi_1(W, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(E \setminus (X + Y), y_0) \rightarrow 1. \quad (1)$$

On va voir que cette suite exacte scinde et permet de calculer l'action de $\pi_1(E \setminus (X + Y), y_0)$ sur la fibre générique $(\mathcal{F} * \mathcal{G})_{y_0}$ qui détermine le produit de convolution.

4.3.1 Déformation

Pour effectuer les calculs de monodromie, on souhaite se ramener à une configuration standard des singularités qui vérifie les conditions suivantes :

- $\{y_0\}, X, Y \subset]0, \frac{1}{2}[$,
- $x_1 < \dots < x_p < y_0 - y_1 < \dots < y_0 - y_q$.

On note $R_{X,Y}(z) := \{ (i, j) \mid x_i + y_j = z \}$ l'ensemble des relations de (X, Y) en $z \in E$ et

$$\text{Conf}_{X,Y} := \left\{ (X', Y') \in E^{p+q} \mid \begin{array}{l} \forall i, j, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q, \\ R_{X',Y'}(x_i + y_j) = R_{X,Y}(x_i + y_j), \end{array} \right\} \subset E^{p+q}$$

l'espace des configurations des singularités vérifiant les mêmes relations que (X, Y) . On peut alors vérifier que l'on peut déformer E pour se ramener au cas voulu en considérant des chemins dans l'espace des configurations que l'on relève en isotopies. Il faut cependant faire attention au cas où les relations de (X, Y) proviennent du quotient de \mathbb{C} par $\mathbb{Z}[i]$, auquel cas la convolution est limite de convolutions où les relations proviennent de \mathbb{C} (voir Figure 2).

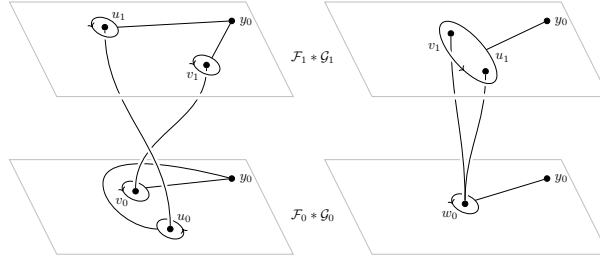


FIGURE 2 – Déformation de la monodromie entre $\mathcal{F}_0 * \mathcal{G}_0$ et $\mathcal{F}_1 * \mathcal{G}_1$.

4.3.2 Groupe de tresses

On introduit dans cette section le groupe de tresses pour calculer l'action de $\pi_1(E \setminus (X+Y), y_0)$ sur $\pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0)$. On se réfère à [Bir69].

Soit $F_n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in E^n \mid \forall i, j, x_i \neq x_j \}$ l'espace des configurations de n points dans E . Il est muni d'une action naturelle du groupe des permutations de n éléments \mathfrak{S}_n définie par $\sigma \cdot (x_1, \dots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in F_n$. On note $B_n := \pi_1(F_n / \mathfrak{S}_n)$ le groupe de tresses plein à n brins de E , et $P_n := \pi_1(F_n) \subseteq B_n$ le groupe de tresses pures à n brins de E .

Le groupe de tresses plein B_n admet une présentation avec générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \alpha, \beta$ et relations (voir Figure 3). Le groupe de tresses pures P_n est alors le sous-groupe de B_n généré par les tresses α_i et β_i (Figure 4).

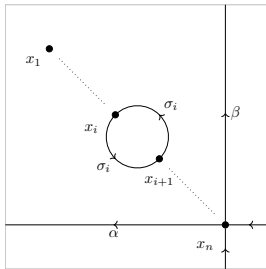


FIGURE 3 – Générateurs de B_n .

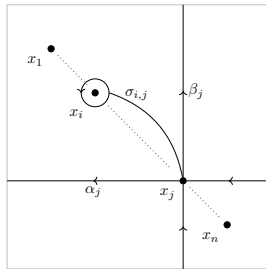


FIGURE 4 – Générateurs de P_n .

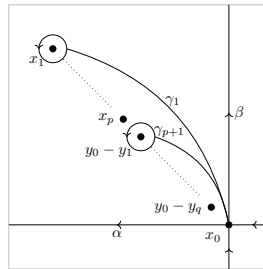


FIGURE 5 – Générateurs de $\pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0)$.

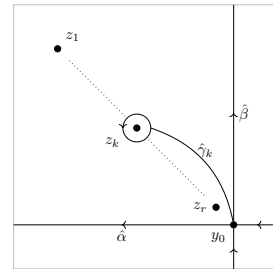


FIGURE 6 – Générateurs de $\pi_1(E \setminus (X + Y), y_0)$.

On considère la fibration $f: F_{n+1} \rightarrow F_n$, $(x_1, \dots, x_n, x_0) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ de fibre $E \setminus X$ où X est un ensemble à n points de E , et on notera x_0 le $(n+1)$ -ème point en lieu de x_{n+1} car il jouera le rôle de point base. Cette fibration admet une section $s: F_n \rightarrow F_{n+1}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, x_0)$ avec $x_0 := x_n + \frac{1}{2} \min_{i < n} \text{dist}(x_i, x_n)$, où dist est la distance sur E induite par l'identification à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$.

Soit $\tilde{\phi}: W \rightarrow F_{n+1}$ et $\phi: E \setminus (X + Y) \rightarrow F_n$ les applications définies par

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x, y) &= (x_1, \dots, x_p, y - y_1, \dots, y - y_q, x), \\ \phi(y) &= (x_1, \dots, x_p, y - y_1, \dots, y - y_q).\end{aligned}$$

On obtient ainsi un morphisme de fibrations

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & E \setminus (X + Y) \\ \downarrow \tilde{\phi} & & \downarrow \phi \\ P_{n+1} & \longrightarrow & P_n \end{array}$$

qui induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0) & \longrightarrow & \pi_1(W, (x_0, y_0)) & \longrightarrow & \pi_1(E \setminus (X + Y), y_0) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \tilde{\phi}_* & & \downarrow \phi_* \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0) & \longrightarrow & P_{n+1} & \longrightarrow & P_n \longrightarrow 1, \end{array}$$

où $P_n = \pi_1(F_n, (x_1, \dots, x_p, y_0 - y_1, \dots, y_0 - y_q))$ et $P_{n+1} = \pi_1(F_{n+1}, (x_1, \dots, x_p, y_0 - y_1, \dots, y_0 - y_q, x_0))$. On a vu que la ligne du bas scinde, donc celle du haut aussi et l'action induite de $\pi_1(E \setminus (X + Y), y_0)$ sur $\pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0)$ se déduit de celle de P_n sur $\pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0)$ par composition avec ϕ_* . Cela permettra de calculer la représentation de monodromie de $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ d'ouvert lisse $E \setminus (X + Y)$ avec fibre générique $H_p^1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y))), \mathcal{L}|_{E \setminus (X \cup (y_0 - Y))} \otimes \mathcal{M}|_{E \setminus (X \cup (y_0 - Y))}$ en y_0 .

En se plaçant dans la configuration standard des singularités, on peut alors calculer à la main l'action des générateurs de $\pi_1(E \setminus (X + Y), y_0)$ sur ceux de $\pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0)$.

4.3.3 Monodromie

Avec l'étude précédente on sait maintenant calculer l'action de $\pi_1(E \setminus (X + Y), y_0)$ sur $\pi_1(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0)$ induite par la section, qui nous servira à déterminer la représentation par monodromie de $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ donnée par l'action de $\pi_1(E \setminus (X + Y), y_0)$ sur $H_p^1(E \setminus (X \cup (z - Y))), \mathcal{L}|_{E \setminus (X \cup (z - Y))} \otimes \mathcal{M}|_{E \setminus (X \cup (z - Y))}$. Commençons par calculer la monodromie de $\mathcal{G}(y_0 - x)$.

Lemme 4.6. *Si \mathcal{G} a pour uplet de monodromie (C_1, \dots, C_q, A, B) pour le choix standard de générateur comme en Figure 1, alors $\mathcal{G}(y_0 - x)$ a pour monodromie*

$$(C_q, C_{q-1}^{C_q}, \dots, C_1^{C_2 \dots C_q}, C_q^{-1} \dots C_1^{-1} A^{-1}, B^{-1} C_1 \dots C_q)$$

pour un choix de générateurs analogue.

En choisissant des isotopies de E qui relèvent les lacets de $\gamma \in \pi_1(E \setminus (X + Y), y_0)$ on arrive enfin à démontrer le résultat suivant :

Proposition 4.7. *Soit $\gamma \in \pi_1(E \setminus (X + Y), y_0)$ et $\tilde{\gamma} := (\text{pr}_{n+1} s \phi \times \text{id}) \circ \gamma \in \pi_1(W, (x_0, y_0))$ un relèvement de γ compatible avec la section au niveau des groupes de tresses. Soit $[\delta] \in H_p^1(E \setminus (X \cup (z - Y))), \mathcal{L}|_{E \setminus (X \cup (z - Y))} \otimes \mathcal{M}|_{E \setminus (X \cup (z - Y))}$ la classe d'un cocycle δ , alors $[\delta]^\gamma = [\delta']$ où δ' est le cocycle défini sur $\pi(E \setminus (X \cup (y_0 - Y)), x_0)$ par*

$$\delta'(\eta) = \delta(\eta^{\gamma^{-1}}) \cdot \rho(\tilde{\gamma}),$$

où $\rho(\tilde{\gamma})$ est la monodromie de $\tilde{\gamma}$ sur $(\text{pr}_1^* \mathcal{F} \otimes d^* \mathcal{G})|_W$ et

$$\rho(\tilde{\gamma}) = \begin{cases} C_i \otimes 1 & \text{si } \gamma = \hat{\gamma}_m \text{ et } z_m = x_i + y_q, \\ A \otimes 1 & \text{si } \gamma = \hat{\alpha}, \\ B \otimes 1 & \text{si } \gamma = \hat{\beta}. \end{cases}$$

5 Réalisation de G_2 comme groupe fondamental

Dans cette section on se propose de réaliser le groupe de Lie simple exceptionnel G_2 comme groupe fondamental d'un objet de \mathbf{P}^{ss} . On définit pour cela une certaine classe de faisceaux pervers auto-duaux appelés *faisceaux à sept points*, et on utilise les propriétés de G_2 pour déterminer son groupe fondamental.

5.1 Groupe de Lie G_2 .

En se reposant sur la classification des formes trilinéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension 7 et de leur stabilisateur étudiée dans [CH88], on donne la définition suivante du groupe G_2 .

Définition 5.1. Le groupe de Lie G_2 est un sous-groupe de dimension 14 de $\text{SO}(7)$ qui s'obtient comme stabilisateur d'une forme trilinéaire alternée sur un espace de dimension 7 équivalente à la forme trilinéaire alternée sur \mathbb{C}^7 définie par

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + \omega_4 \wedge \omega_5 \wedge \omega_6 + \omega_1 \wedge \omega_4 \wedge \omega_7 + \omega_2 \wedge \omega_5 \wedge \omega_7 + \omega_3 \wedge \omega_6 \wedge \omega_7$$

où $(\omega_1, \dots, \omega_7)$ désigne la base duale canonique.

On cherche à caractériser les sous-groupes fermés de $\text{O}(7)$ dont les représentations standard sont Lie-irréductibles. Suivant [Kat90] et [OV90] on peut calculer le moment d'ordre k , défini pour tout sous-groupe H de GL_7 par

$$M_k(H) := \dim((W^{\otimes k})^H),$$

où W est la représentation standard de H de dimension 7, on peut alors déterminer G_2 par ses moments d'ordre 3 et 4 (voir Table 1).

	M_3	M_4
$\text{SO}(7)$	0	3
$\text{O}(7)$	0	3
$\text{PSL}(2)$	1	7
$\pm\text{PSL}(2)$	0	7
G_2	1	4
$\pm G_2$	0	4

TABLE 1 – Moments d'ordre 3 et 4 de certains sous-groupes de $\text{O}(7)$.

5.2 Faisceaux à sept points

On construit une classe de faisceaux dits *faisceaux à sept points* et on montre que leur groupe fondamental est égal à G_2 . On appelle *faisceau à sept points* un objet simple $\mathcal{F} \in \mathbf{P}$ auto-dual de rang 2 avec exactement sept singularités de la forme

$$X = \{ 0, \pm a, \pm b, \pm(a + b) \},$$

pour $a, b \in E$, en lesquelles l'action de monodromie locale est unipotente et non triviale. La dimension de \mathcal{F} est donc égale à 7 par la Proposition 2.9.

Un exemple de faisceaux à sept points s'obtient avec la construction qui suit. On note $\pi: E \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ le revêtement double correspondant à l'involution $(-\text{id})$, et $\bar{X} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ l'image par π des singularités X . Soit \mathcal{L} un système local irréductible de rang 2 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bar{X}$ dont l'action de monodromie locale est unipotente et non triviale en chaque singularité, et on note $\mathcal{F} \in \mathbf{P}^{\text{ss}}$ le complexe de cohomologie d'intersection associé au pullback $\pi^*\mathcal{L}$. Dans la suite on ne considère que ces faisceaux à sept points dits de type *pullback de Beauville*, on les appellera donc simplement *faisceaux à sept points*.

Le faisceau à sept point \mathcal{F} est entièrement déterminé par la monodromie du système local \mathcal{L} sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bar{X}$. On se ramène par déformation à une configuration standard et on fixe un choix de générateurs des groupes fondamentaux de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bar{X}$ et de $E \setminus X$ (voir Figure 7), suivant lequel on peut déterminer l'ensemble des possibilité pour la monodromie de \mathcal{L} .

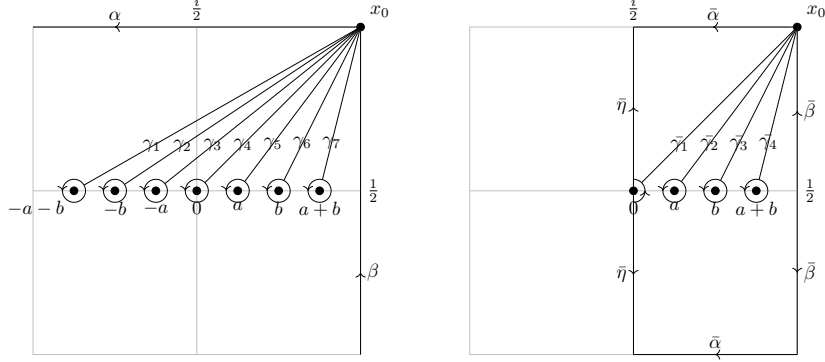


FIGURE 7 – Générateurs de $\pi_1(E \setminus X, x_0)$ et de $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bar{X}, x_0)$.

Proposition 5.2. *On suppose que \mathcal{L} est irréductible et que ses matrices de monodromies (A_1, A_2, A_3, A_4) sont unipotentes. Alors dans une base bien choisie de la fibre générique \mathcal{L}_{x_0} les matrices $A_1, A_2, A_3 \in \text{GL}(\mathcal{L}_{x_0})$ sont dans l'une des formes figurant dans la Table 2 avec des paramètres $y, a, b \in \mathbb{C}$ respectant les contraintes données, et A_4 se déduit de la relation $A_1 A_2 A_3 A_4 = 1$. Le uplet de monodromie de \mathcal{F} est donnée par*

$$(A_4, A_3^{A_4}, A_2^{A_3 A_4}, A_1^2, A_2, A_3, A_4, \text{id}, \text{id}).$$

	A_1	A_2	A_3	
i)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$	$y \neq 0$
ii)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$y \neq 0$
iii)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$	$y \neq 0$
iv)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(a-1)^2}{b(a+b)} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{(a-1)^2}{b} & 2-a \end{pmatrix}$	$a \neq 1, b \neq 0,$ $a+b \neq 0$

TABLE 2 – Monodromies possibles pour un faisceau à sept points.

Suivant la Proposition 4.7 on peut alors calculer, à l'aide d'un logiciel de calcul algébrique, l'action de monodromie de la convolution $\mathcal{F} * \mathcal{F}$ en termes de cocycles, ce qui conduit à la décomposition

$$\mathcal{F} * \mathcal{F} \cong \delta_0 \oplus \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2,$$

où G_1 et G_2 sont des objets simples de rangs 8 et 18 et de dimensions 14 et 27 respectivement. Soit $f: \mathcal{F} * \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ la projection sur le facteur direct $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} * \mathcal{F}$. De plus \mathcal{F} est auto-dual donc on peut définir la forme trilinéaire non nulle

$$\psi: (\mathcal{F} * \mathcal{F}) * \mathcal{F} \xrightarrow{f * \text{id}} \mathcal{F} * \mathcal{F} \cong \mathcal{F} * \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\text{ev}} \delta_0$$

qui est fixée par $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Le faisceau \mathcal{F} étant auto-dual et de dimension 7 il vient $G_{\mathcal{F}} \subseteq \text{O}(7)$, un raisonnement sur les rangs et la caractérisation de G_2 parmi les sous-groupes fermés de $\text{O}(7)$ permet alors de conclure :

Proposition 5.3. *Soit \mathcal{F} un faisceau à sept points. Alors son groupe fondamental est de type G_2 et correspond au stabilisateur de la forme trilinéaire alternée ψ .*

Références

- [Ach21] Pramod N. ACHAR. *Perverse sheaves and applications to representation theory*. T. 258. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2021, p. xii+562.
- [BCP97] Wieb BOSMA, John CANNON et Catherine PLAYOUST. « The Magma algebra system. I. The user language ». In : *J. Symbolic Comput.* 24.3-4 (1997). Computational algebra and number theory (London, 1993), p. 235-265.
- [Bir69] Joan S. BIRMAN. « On braid groups ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 22 (1969), p. 41-72.
- [CH88] Arjeh M. COHEN et Aloysius G. HELMINCK. « Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7 ». In : *Comm. Algebra* 16.1 (1988), p. 1-25.
- [Col+22] Benjamin COLLAS, Michael DETTWEILER, Stefan REITER et Will SAWIN. « Monodromy of elliptic curve convolution, seven-point sheaves of G_2 type, and motives of Beauville type ». In : *J. Reine Angew. Math.* 784 (2022), p. 1-26.
- [Del+82] Pierre DELIGNE, James S. MILNE, Arthur OGUS et Kuang-yen SHIH. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*. T. 900. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982, p. ii+414.
- [DJ17] Michael DETTWEILER et Mirjam JÖLLENBECK. « Monodromy of the multiplicative and the additive convolution ». In : *Algorithmic and experimental methods in algebra, geometry, and number theory*. Springer, Cham, 2017, p. 177-197.
- [DR20] Michael DETTWEILER et Stefan REITER. « On the Hodge theory of the additive middle convolution ». In : *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 56.3 (2020), p. 503-537.
- [DW06] Michael DETTWEILER et Stefan WEWERS. « Variation of local systems and parabolic cohomology ». In : *Israel J. Math.* 156 (2006), p. 157-185.
- [GL96] Ofer GABBER et François LOESER. « Faisceaux pervers l -adiques sur un tore ». In : *Duke Math. J.* 83.3 (1996), p. 501-606.
- [GM03] Sergei I. GELFAND et Yuri I. MANIN. *Methods of homological algebra*. Second. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003, p. xx+372.
- [Ill17] Luc ILLUSIE. « Around the Thom-Sebastiani theorem, with an appendix by Weizhe Zheng ». In : *Manuscripta Math.* 152.1-2 (2017), p. 61-125.
- [Kat15] Nicholas M. KATZ. « Elliptic convolution, G_2 , and elliptic surfaces ». In : *Astérisque* 370 (2015), p. 197-205.
- [Kat90] Nicholas M. KATZ. *Exponential sums and differential equations*. T. 124. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990, p. xii+430.
- [Krä16] Thomas KRÄMER. *Characteristic cycles and the microlocal geometry of the Gauss map, I*. 2016.
- [KW15] Thomas KRÄMER et Rainer WEISSAUER. « Vanishing theorems for constructible sheaves on abelian varieties ». In : *J. Algebraic Geom.* 24.3 (2015), p. 531-568.
- [LMW21] Yongqiang LIU, Laurentiu MAXIM et Botong WANG. « Perverse sheaves on semi-abelian varieties ». In : *Selecta Math. (N.S.)* 27.2 (2021), Paper No. 30, 40.
- [Max19] Laurențiu G. MAXIM. *Intersection homology & perverse sheaves—with applications to singularities*. T. 281. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2019, p. xv+270.
- [Mil17] James S. MILNE. *Algebraic groups*. T. 170. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. The theory of group schemes of finite type over a field. Cambridge University Press, Cambridge, 2017, p. xvi+644.
- [Nor02] Madhav V. NORI. « Constructible sheaves ». In : *Algebra, arithmetic and geometry, Part I, II (Mumbai, 2000)*. T. 16. Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 2002, p. 471-491.

- [OV90] A. L. ONISHCHIK et È. B. VINBERG. *Lie groups and algebraic groups*. Springer Series in Soviet Mathematics. Translated from the Russian and with a preface by D. A. Leites. Springer-Verlag, Berlin, 1990, p. xx+328.
- [Wei06] Rainer WEISSAUER. *Brill-Noether Sheaves*. 2006.