

Comment tisser un disque brownien

Introduction à un Domaine de Recherche, la *géométrie brownienne*

Alexis Metz-Donnadieu

Résumé

L'objectif de cet IDR est de donner un court état de l'art et un premier aperçu de la construction d'une famille de modèles devenus centraux en géométrie aléatoire, les *cartes browniennes*. Il s'agit d'une famille d'espaces métriques aléatoires apparaissant comme limite d'échelle d'une large classe de graphes aléatoires plongés sur des variétés bidimensionnelles. Cette théorie, généralement désignée sous le nom de *géométrie brownienne*, est un pan de recherche actif à l'interface entre combinatoire, physique mathématique et probabilités. L'étude de ces modèles s'inscrit aujourd'hui dans la continuité de plusieurs décennies de travail, depuis des travaux fondateurs de Schaeffer [12] au début des années 2000 et la première identification rigoureuse de la sphère brownienne dans des travaux de Le Gall ([16, 19]) dans les années 2010, jusqu'à une classification complète des surfaces browniennes orientables dans un travail tout récent de Bettinelli et Miermont [8].

On se propose de motiver la construction de ces objets par une question d'apparence anodine ; "*A quoi ressemble une triangulation aléatoire d'un grand polygone ?*". La section 1 précise cette question et présente un modèle de graphe aléatoire planaire, celui des *triangulations Boltzmann*. Lorsque l'on regarde une telle grande triangulation de loin, celle-ci s'approche de plus en plus d'un objet continu aléatoire –le *disque brownien*– qui encapsule les propriétés asymptotiques de notre modèle discret. La section 2 précise quel sens rigoureux donner à cette notion de *limite d'échelle* des modèles discrets et définit la topologie de *Gromov Hausdorff*. Évidemment, ces considérations ne sont utiles que si l'on peut donner une description précise de l'objet limite, c'est l'objectif des deux dernières sections. Les méthodes employées pour établir rigoureusement l'existence d'une limite dépendent de puissantes techniques combinatoires et en particulier d'approches bijectives avec des modèles d'arbres aléatoires étiquetés dont on donne un aperçu dans la section 3. La construction de l'objet limite est un analogue continu de ces bijections entre modèles discrets, on en donne construction informelle dans la section 4.

Table des matières

1	Comment tirer une grande triangulation au hasard ?	2
2	Limite de graphes et topologie de Gromov Hausdorff	3
3	Le miracle bijectif de Schaeffer, ou comment effiler une quadrangulation	5
4	Construction du disque brownien	9

1 Comment tirer une grande triangulation au hasard ?

Il est temps d'introduire rigoureusement le modèle discret qui va motiver notre discussion. Pour limiter un peu notre approche, on restreint notre présentation au cas des triangulations des polygones. Indiquons simplement que les méthodes sont généralisables à une classe beaucoup plus large de modèles de graphes aléatoires plongés dans des surfaces bidimensionnelles¹.

Definition 1.1 (Triangulation pointée d'un polygone). *Pour $L \geq 0$, on note C_L le polygone à L côtés plongé dans le plan et possédant une arête distinguée. Pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k)$ désignera l'ensemble des graphes planaires obtenus en rajoutant un sommet distingué à l'intérieur de C_L et $k - 1$ autres sommets, puis en traçant des arêtes (pouvant éventuellement être des boucles ou des arêtes doubles) entre ces sommets et ceux de C_L de sorte que toutes les faces à l'intérieur de C_L aient 3 côtés.*

Les éléments sont considérés à isomorphisme de graphe planaire près, au sens où deux éléments de $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k)$ sont identifiés si une déformation continue du plan permet d'envoyer l'un sur l'autre. On note $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L) = \bigcup_{k \geq 0} \mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k)$, l'ensemble des triangulations pointées de C_L .

Cette définition semble à priori de nature topologique mais il s'agit en fait plutôt d'objets combinatoires. En effet, une application de la formule d'Euler montre que le nombre d'arêtes de n'importe quel élément de $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k)$ vaut $3k + 2L - 3$ et cela indique que $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k)$ est fini. On dispose même d'une remarquable formule d'énumération (que l'on peut trouver dans [4]) :

$$\forall L \geq 3, k \geq 1, \quad \text{Card } \mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k) = 4^{k-1} \frac{(2L + 3k - 5)!!}{(k - 1)!(2L + k - 1)!!} L \binom{2L}{L}. \quad (1)$$

Remarque 1.2. *On prend des triangulations pointées (i.e avec un point distingué à l'intérieur) car les questions naturelles sur ces objets portent souvent sur la structure de graphe 'vu d'un point intérieur', mais on aurait tout aussi bien pu se limiter aux triangulations non pointées.*

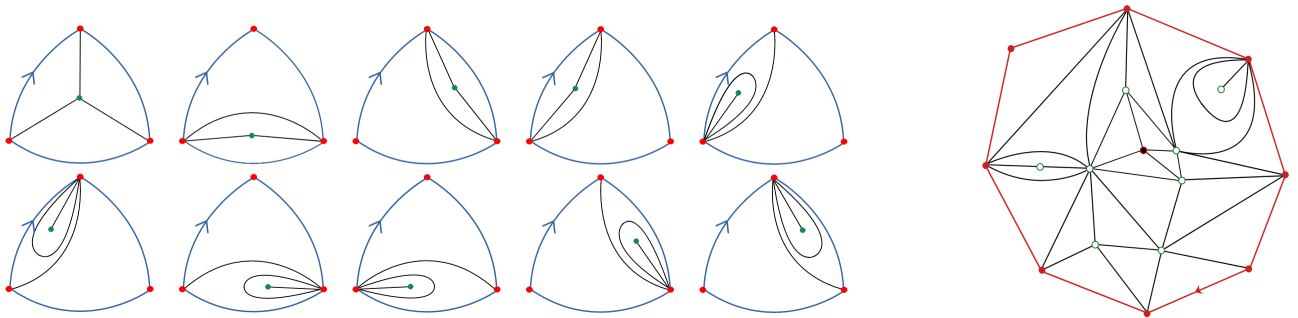


FIGURE 1 – Gauche : Les 10 éléments de $\mathbb{T}^{1,\bullet}(3, 1)$, la présence de boucles et d'arêtes doubles peut prêter à confusion mais le lecteur consciencieux vérifiera que toutes les faces internes ont trois côtés et se convaincra qu'il s'agit des seules configurations possibles. Droite : Un élément de $\mathbb{T}^{1,\bullet}(8, 9)$, le point distingué est en noir.

On cherche à présent construire une mesure de probabilité naturelle sur $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L)$ (on veut donner un sens à 'tirer une triangulation au hasard'). Il semble naturel de demander qu'une

1. cf [8] pour des modèles de quadrangulations plongées dans des surfaces bidimensionnelles orientables quelconques et citons également par exemple [19, 5, 6, 20] pour d'autres modèles de grand graphes planaires

configuration de $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L)$ soit d'autant moins probable que le nombre de sommets soit important. Il est utile d'emprunter ici le langage de la physique statistique, et on se propose d'associer à chaque élément $\tau \in \mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k)$ une *énergie* $\mathcal{H}(\tau) = k$ correspondant simplement au nombre de sommets internes de τ . Cela permet de définir une famille de *mesure de Boltzmann* $(\mu_\beta)_{\beta>0}$, définies par $\mu_\beta(\tau) = e^{-\beta\mathcal{H}(\tau)}$ et indexée par le paramètre β dit de température inverse. Il nous faut à présent choisir un $\beta \geq 0$ tel que μ_β soit renormalisable. De la formule (1), on déduit par un développement asymptotique que pour tout $L \geq 3$:

$$\text{Card } \mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3^{L-2}}{4\sqrt{2\pi}} L \binom{2L}{L} (12\sqrt{3})^k k^{-3/2}. \quad (2)$$

En particulier, la mesure μ_β peut être renormalisée en une mesure de probabilité si et seulement si β est supérieur ou égal au paramètre critique $\beta_c = \ln(12\sqrt{3})$. Cela motive :

Definition 1.3. *On appelle (la) mesure de Boltzmann sur $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L)$, la mesure de probabilité donnant poids $\mathcal{Z}(L)^{-1}(12\sqrt{3})^{-k}$ à tout $\tau \in \mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k)$, où $\mathcal{Z}^1(L)$ est la fonction de partition :*

$$\mathcal{Z}^1(L) = \sum_{\tau \in \mathbb{T}^{1,\bullet}(L)} e^{-\beta_c \mathcal{H}(\tau)} = \sum_{k \geq 0} (12\sqrt{3})^{-k} \text{Card } \mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k). \quad (3)$$

Le lecteur familier avec les modèles probabilistes issus de la physique statistique comprendra qu'il s'agit là d'un choix de mesure particulièrement naturelle sur $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L)$. Une façon de le sentir est de remarquer que comme le nombre de sommets est une grandeur extensive, l'énergie globale d'une triangulation est la somme des énergies sur des sous domaines disjoints. Heuristiquement, cela se traduit au niveau de la mesure de Boltzmann par le fait que les structures de graphes induites par la triangulation sur des sous domaines disjoints sont essentiellement indépendants, ce qu'il semble naturel de demander.

2 Limite de graphes et topologie de Gromov Hausdorff

A présent, pour chaque $L \geq 1$, on désignera par \mathcal{T}^L un élément de $\mathbb{T}^{1,\bullet}(L)$ tiré selon la mesure de Boltzmann. Notre objectif est d'obtenir de l'information sur les propriétés asymptotiques de \mathcal{T}^L lorsque L est très grand. Une idée assez classique en probabilité consiste à se demander si l'on ne pourrait pas faire apparaître un objet aléatoire limite qui capturerait le comportement asymptotique de nos variables. De façon un petit plus précise, la méthode générale consiste à introduire un espace métrique (\mathcal{X}, Δ) et une inclusion $\iota : \mathbb{T}^{1,\bullet}(L, k) \rightarrow \mathcal{X}$. Si l'espace est bien choisi, on peut espérer que les variables aléatoires $\iota(\mathcal{T}^L)$ aient une *limite en loi* \mathcal{T}^∞ dans \mathcal{X} lorsque le paramètre L tend vers $+\infty$. Pour rappel :

Definition 2.1. *On dit qu'une variable aléatoire \mathcal{T}^∞ à valeurs dans (\mathcal{X}, Δ) est la limite en loi de la suite de variables $(\iota(\mathcal{T}^L))_{L \geq 0}$ si pour toute fonction continue bornée $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathbb{E}[F(\iota(\mathcal{T}^L))] \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F(\mathcal{T}^\infty)].$$

Si les fonctions $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on peut choisir permettent de capturer des statistiques intéressantes sur les \mathcal{T}^L (on peut penser au diamètre du graphe, au degré du sommet distingué...)

et que la variable \mathcal{T}^∞ admet une description suffisamment simple, on peut espérer étudier directement $F(\mathcal{T}^\infty)$. On pourra alors traduire l'information obtenue sur cette variable en des propriétés limites sur les $F(\iota(\mathcal{T}^L))$. Évidemment, le choix de (\mathcal{X}, Δ) dépend fondamentalement des questions que l'on souhaite se poser sur \mathcal{T}^L , puisque cela détermine les observables $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on peut étudier. Par exemple, des questions de nature *locale* sur le graphe :

- *Quel est le degré typique d'un sommet à l'intérieur du graphe ?*
- *Quelle proportion d'arêtes sont des boucles ?*
- *Combien de sommets contient une boule de rayon 2 autour du point distingué ?*

se traitent de manière très différentes que des questions de nature *globale*, comme par exemple :

- *Quelle est la distance typique entre deux sommets du graphe ?*
- *Combien de sommets contient une boule de rayon $r \cdot \text{diam}(\mathcal{T}^L)$, où $0 < r < 1$ autour du point distingué ?*

Dans le premier cas (les questions "locales"), on sent que la topologie de \mathcal{X} doit prendre en compte finement la structure de graphe dans un voisinage du point distingué. Le choix qui est naturel dans ce cas est d'utiliser la *topologie de la convergence locale*. Les objets limites que l'on obtient par cette approche sont des graphes infinis (dans notre cas particulier il s'agit plus précisément de l'UIPT, *uniform infinite planar triangulation*). L'étude de ces *limites locales* forme un pan de la littérature à part entière, et on réfère le lecteur intéressé par cette approche à [3]. Dans la suite, on va plutôt s'intéresser au deuxième type de questions, celles de natures 'globales'² qui nécessitent de considérer le graphe \mathcal{T}^L dans son ensemble. La première étape est donc de construire un espace métrique (\mathcal{X}, Δ) adapté.

Quel peut être notre choix d'espace (\mathcal{X}, Δ) ? Les questions qui nous intéressent portent sur la géométrie du graphe \mathcal{T}^L dans son ensemble. Plus spécifiquement on s'intéresse aux propriétés géométriques limites de l'espace métrique (\mathcal{T}^L, d_L) , où d_L est la distance de graphe sur \mathcal{T}^L . Comme le diamètre de \mathcal{T}^L va avoir tendance à diverger vers $+\infty$ lorsque $L \rightarrow \infty$, il est nécessaire de "dezoomer" et de considérer plutôt des variables $(\mathcal{T}^L, c_L \cdot d_L)$, où c_L est un facteur de renormalisation choisi de sorte que le diamètre de l'espace renormalisé soit à peu près d'ordre constant. Les variables aléatoires que l'on considère sont donc des *espaces métriques compacts aléatoires* et il faut construire l'espace (\mathcal{X}, Δ) en conséquence. La question devient, quelles manières à t-on de comparer deux espaces métriques compacts (X, d_X) et (Y, d_Y) ?

Si les espaces (X, d_X) et (Y, d_Y) sont inclus isométriquement dans le même espace (Z, d_Z) un choix naturel est d'utiliser la *distance de Hausdorff*, qui mesure les distances atteintes par le point de X le plus loin de Y et le point de Y le plus loin de X :

$$d_{\text{Haus}}^Z(X, Y) = \max \left\{ \sup_{u \in X} d_Z(u, Y), \sup_{v \in Y} d_Z(v, X) \right\}. \quad (4)$$

Le problème est qu'ici, il n'y a à priori pas de façon canonique d'inclure les espaces $(\mathcal{T}^L, c_L \cdot d_L)$

2. La dichotomie globale/locale est un peu grossière et on la fait ici plutôt pour des raisons pédagogiques. Par exemple, si l'on cherche à comprendre le degré maximal d'un sommet dans le graphe, aucune des deux approches n'est particulièrement adaptée.

dans un même espace métrique. L’astuce va être de considérer simultanément tous les choix possibles d’inclusions isométriques dans même un espace métrique compact (Z, d_Z) .

Définition/Proposition 2.2. *Dans la suite, on note \mathcal{X} l’ensemble des classes d’isométries d’espaces métriques compacts. La distance de Gromov Hausdorff entre deux éléments (X, d_X) et (Y, d_Y) de \mathcal{X} est donnée par :*

$$d_{\text{GH}}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \inf_{\substack{(Z, d_Z) \\ \iota_X: X \hookrightarrow Z \\ \iota_Y: Y \hookrightarrow Z}} d_{\text{Haus}}^Z(\iota_X(X), \iota_Y(Y)), \quad (5)$$

l’infimum étant pris sur tous les choix de classes d’isométries d’espaces métriques compacts (Z, d_Z) et d’inclusions isométriques $\iota_X : X \hookrightarrow Z$ et $\iota_Y : Y \hookrightarrow Z$. On montre que d_{GH} est une distance sur \mathcal{X} qui en fait un espace métrique complet localement compact (cf [11]).

On est maintenant en mesure de formuler une question précise :

Problème : Existe-t-il des constantes de renormalisations $(c_L)_L$ et une variable aléatoire (\mathbb{D}, D) dans $(\mathcal{X}, d_{\text{GH}})$ (qui est donc un espace métrique compact aléatoire) tels que les $(\mathcal{T}^L, c_L \cdot d_L)$ convergent en loi vers (\mathbb{D}, D) dans $(\mathcal{X}, d_{\text{GH}})$?

C’est cette question qui a été moteur de la recherche en géométrie brownienne. La première réponse positive à ce type de questions, initialement pour un modèle de quadrangulations uniformes de la sphère, a été établie simultanément dans des travaux de Le Gall [16] et de Miermont [21] au début des années 2010. Dans le cas précis qui nous intéresse (triangulation du disque), il faut attendre 2020 et un travail d’Albenque Holden et Sun [1]. Comme indiqué dans l’introduction, les méthodes pour établir ce type de résultat sont basées sur des techniques combinatoires assez fines, dont on se propose de faire un tour d’horizon non exhaustif dans la section 3.

3 Le miracle bijectif de Schaeffer, ou comment effiler une quadrangulation

Dans un souci de simplicité, il est utile dans cette section de travailler avec un modèle de graphe aléatoire un peu différent, celui des *quadrangulations de la sphère*.

Définition 3.1. *On appelle quadrangulation plane un graphe plane connexe plongé sur la sphère dont toutes les faces ont 4 côtés. Si $n \geq 1$, on notera \mathcal{Q}_n l’ensemble des quadrangulations planes enracinées et pointées, c’est à dire des triplets (Q, e, v_*) où Q est une quadrangulation plane possédant n faces, e est une arête orientée distinguée de Q et v_* est un sommet de Q . Tout élément de \mathcal{Q}_n a $2n$ arêtes et $n + 2$ sommets (par une application facile de la formule d’Euler).*

Ce modèle est historiquement le premier pour lequel une limite d’échelle a été formellement identifiée. La raison à cela est qu’il existe une bijection fondamentale introduite par Schaeffer et Chassaing [12] entre les quadrangulations de la sphère et une certaine classe d’arbres planaires

étiquetés qui simplifie grandement l'étude de ce modèle. Cette bijection a eu une influence séminale sur le reste de la théorie et joue un rôle majeur dans la première construction de la sphère brownienne. C'est l'occasion pour nous de la présenter.

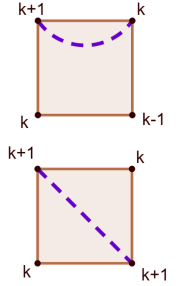
Definition 3.2. *On appelle arbre plan un graphe acyclique plongé sur la sphère (ou de façon équivalente dans le plan) possédant un sommet distingué 'racine' et dont l'un des secteurs angulaires créé par T autour de la racine est également distingué (cf figure 2).*

Un arbre plan bien étiqueté est un couple (T, ℓ) , où T est un arbre plan et où ℓ est une fonction sur les sommets de T à valeurs dans \mathbb{Z} , qui vaut 0 sur la racine et dont les incréments le long des arêtes sont à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On notera \mathcal{F}_n l'ensemble des arbres plans bien étiquetés possédant n arêtes.

Considérons une quadrangulation $Q \in \mathcal{Q}_n$, dont on note e et v_* l'arête et le sommet distingués. On va construire à partir de Q un élément $T \in \mathcal{F}_n$, où chacun des $n + 1$ sommets de $V(Q) \setminus \{v_*\}$ s'identifiera à un sommet de T et chacune des n faces de Q s'identifiera à une arête de T . Plus précisément on va associer à chaque face f de Q une arête reliant deux sommets de f .

Pour chaque sommet u de Q , notons $\ell(u)$ la distance de u au sommet distingué v_* pour la distance de graphe. Soit f une face de Q , comme Q est biparti, la fonction ℓ prend sur les sommets de f :

1. soit les valeurs $k + 1, k, k - 1, k$ pour un certain $k \geq 1$. Dans ce cas, on associe à f l'arête reliant le sommet d'étiquette $k + 1$ au sommet directement à sa gauche dans f .
2. soit les valeurs $k + 1, k, k + 1, k$ pour un certain $k \geq 0$. Dans ce cas, on associe à f l'arête reliant les deux sommets opposés d'étiquette $k + 1$ dans f (ce n'est donc pas une arête de Q).



On construit de cette manière n arêtes entre certains sommets de $V(Q) \setminus \{v_*\}$ (par construction il ne peut pas y avoir d'arêtes reliées à v_* celui-ci étant d'étiquette minimale).

Lemme 3.3. *Le graphe T induit par ces arêtes est un arbre.*

Preuve : Le graphe T est construit par n arêtes sur les $n + 1$ sommets de $V(Q) \setminus \{v_*\}$, pour montrer que c'est un arbre, il suffit de montrer qu'il est acyclique. Supposons donc par l'absurde qu'il contient un cycle u_1, \dots, u_n . Ce cycle sépare la sphère en deux régions, un 'intérieur' contenant v_* et un 'extérieur' ne contenant pas v_* . Notons k_* la valeur minimale prise par ℓ sur ce cycle. Clairement, tous les sommets dans la région extérieure ont alors une étiquette supérieure ou égale à k_* . Mais il existe quelque part sur ce cycle une arête passant de l'étiquette k_* à $k_* + 1$ et une arête passant de $k_* + 1$ à k_* . Ces arêtes sont associées à deux faces de Q , chacune d'entre elle contenant un sommet d'étiquette $k_* - 1$ (cas 1 ci dessus) et ces deux sommets sont dans des régions de la sphère différentes. Il existe donc au moins un sommet dans la région extérieure qui est à distance $k_* - 1$ de v_* , c'est une contradiction. \square

Par convention, on distingue dans T le seul secteur angulaire issu du sommet de e d'étiquette maximale et qui contient e . Cela donne à l'arbre T une structure naturelle d'arbre plan héritée de la structure planaire de Q . Si l'on note v_0 le sommet racine dans T , on définit sur T

l'étiquetage $\tilde{\ell}(v) = \ell(v) - \ell(v_0)$ qui, vu les cas 1 et 2 ci dessus a bien le long de chaque arête de T des incréments à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. Au final on a donc associé à tout $Q \in \mathcal{Q}_n$ un arbre plan bien étiqueté $(T, \tilde{\ell}) \in \mathcal{F}_n$. On a perdu dans cette construction l'information de l'orientation de l'arête distinguée e . Notons donc $\varepsilon = +1$ si e est orienté vers son sommet d'étiquette maximale et -1 sinon. Le miracle est que cette construction est bijective :

Proposition 3.4 (Schaeffer, Chassaing [12]). *La construction décrite précédemment, associant à Q le couple $((T, \ell), \varepsilon)$, est une bijection entre \mathcal{Q}_n et $\mathcal{F}_n \times \{-1, +1\}$.*

Décrivons brièvement comment reconstruire Q à partir de $((T, \ell), \varepsilon)$. L'arbre T définit $2n$ secteurs angulaires dans le plan qui sont ordonnés cycliquement autour de l'arbre dans le sens horaire. Partant de chaque secteur angulaire qui n'est pas d'étiquette minimale, on trace une arête contournant T qui le relie au premier secteur qui suit dans l'ordre horaire et qui est d'étiquette strictement plus petite. On relie enfin les secteurs d'étiquettes minimales au sommet distingué v_* . L'arête distinguée est celle issue de la racine, orientée dans le sens prescrit par ε . On laisse le lecteur se convaincre que l'on récupère ainsi toutes les arêtes de Q .

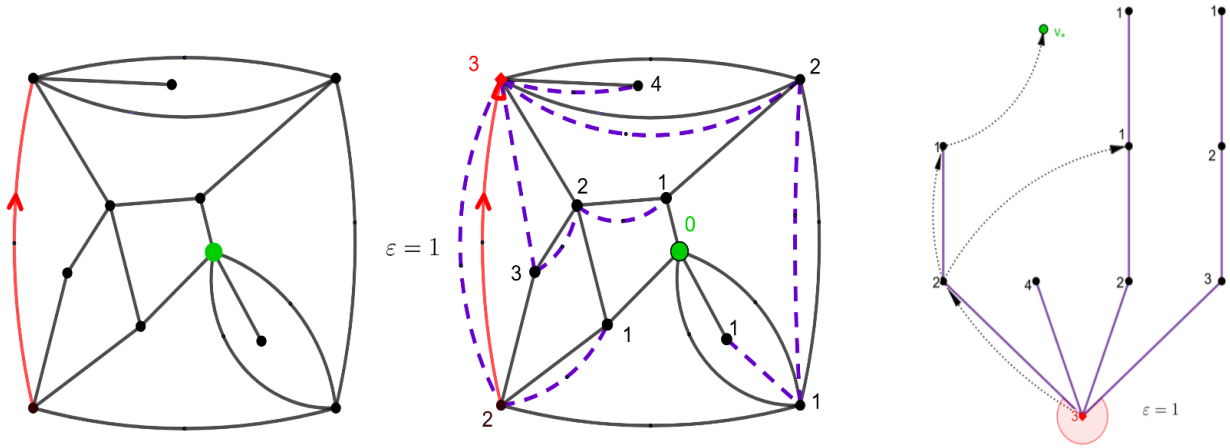


FIGURE 2 – Bijection de Schaeffer. (Gauche) On part d'une représentation planaire d'une quadrangulation de la sphère (la face extérieure a aussi 4 côtés), l'arête et le point distingués sont en rouge et vert. (Centre) On étiquette les sommets par les distances au point distingué et on construit sur chaque face une arête en violet pointillé (rmq : le sens horaire sur la face extérieure est inversé par la représentation planaire). (Droite) On obtient un arbre plan bien étiqueté que l'on enracine sur le secteur angulaire associé à l'extrémité d'étiquette maximale de l'arête distinguée. Les 4 premières étapes de la bijection inverse sont misent en pointillés (on relie chaque secteur angulaire au premier secteur d'étiquette plus petite qui suit pour l'ordre de contour).

Cette bijection a des conséquences puissantes et importantes dont la première est sans doute qu'elle permet d'obtenir une formule étonnamment simple pour le cardinal de \mathcal{Q}_n . En effet, il est bien connu que le nombre d'arbres plans à n arêtes est donné par le nombre de Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ et pour chacun de ces arbres, on a 3^n bons étiquetages possibles (il suffit de choisir les incréments dans $\{-1, 0, 1\}$ le long des arêtes de T). En conséquence :

$$|\mathcal{Q}_n| = 2 \cdot |\mathcal{F}_n| = \frac{2 \cdot 3^n}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (6)$$

Une deuxième conséquence importante pour notre discussion est que cela permet d'estimer l'ordre de grandeur du diamètre d'un élément Q^n pris uniformément au hasard dans \mathcal{Q}_n .

Notons en effet (T_n, ℓ_n) l'élément de \mathcal{F}_n associé à Q_n . Le diamètre de Q_n est du même ordre de grandeur que la valeur maximale prise par ℓ_n qui mesure à un facteur additif près la distance du point distingué aux autres points de Q_n . Mais un résultat classique en probabilité est que la hauteur d'un arbre plan choisi uniformément au hasard parmi ceux possédant n arêtes est avec grande probabilité de l'ordre de \sqrt{n} . Conditionnellement à T_n , les incréments de ℓ_n le long des arêtes sont i.i.d. et uniformes dans $\{-1, 0, 1\}$, on s'attend donc à ce que l'ordre de grandeur de la valeur maximale prise par ℓ_n soit celle d'une somme de \sqrt{n} variables aléatoires i.i.d. centrées. Par le théorème central limite, une telle somme est d'ordre de grandeur $\sqrt{\sqrt{n}} = n^{1/4}$. De fait :

Proposition 3.5. [12] *La suite de variables $(n^{-1/4} \text{diam}(Q_n))_n$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Dans le cas de nos triangulations \mathcal{T}^L on montre facilement grâce à un développement asymptotique de (1) que l'espérance du nombre de sommets internes dans \mathcal{T}^L est de l'ordre de L^2 . Par analogie avec le cas précédent, on s'attend donc à ce que le diamètre de \mathcal{T}^L soit de l'ordre de \sqrt{L} et que le bon facteur de normalisation soit $c_L \sim L^{-1/2}$.

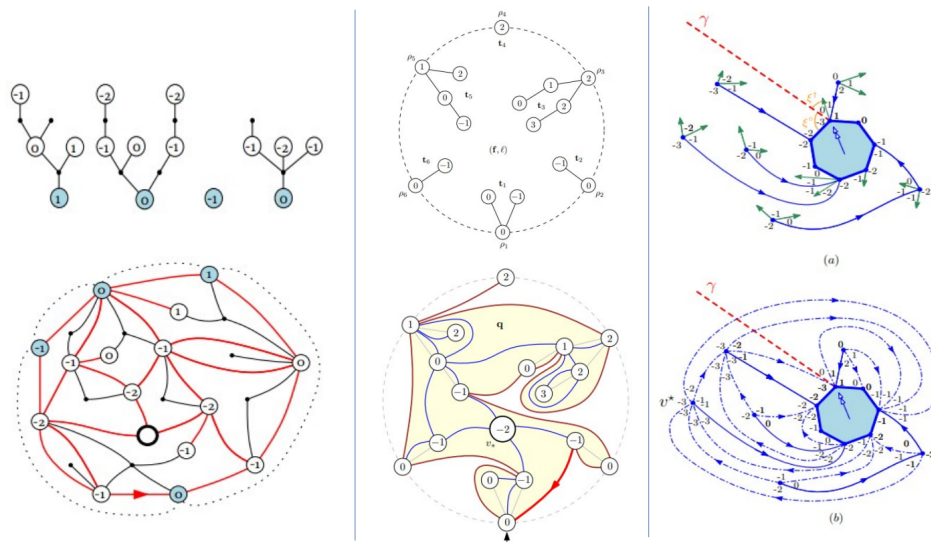


FIGURE 3 – Thème et variations sur la bijection de Schaeffer. La bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer associe à chaque quadrangulations à bords une forêts d'arbres étiquetés (milieu, image extraite de [7]). La bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter [10] (gauche, image extraite de [13]) donne une bijection entre des modèles de cartes planaires biparties très généraux et certaines familles d'arbres bitypes. La bijection de Poulalhon-Schaeffer [14] donne une bijection avec les triangulations en utilisant une classe particulière d'arbres étiquetés dit 'bourgeonnant' (droite, image extraite de [1])...

Dans un soucis de simplicité, on a restreint notre présentation au cas des quadrangulations de la sphère. Mais il existe en fait de nombreuses variantes de la bijection de Schaeffer pour une classe assez large de modèles de graphes aléatoires planaires (à titre indicatif, la figure 3 donne un panorama non exhaustif de certaines de ces variantes). Le point commun entre toutes ces bijections et qu'elles associent à chaque élément d'une certaine classe de graphes planaires un ou plusieurs arbres étiquetés. Elles jouent presque toujours des rôles centraux dans les résultats de limites d'échelles de cartes aléatoires. De fait, les constructions des objets limites sont en général des analogues continus des bijections discrètes (cf section 4).

4 Construction du disque brownien

On a vu à la section précédente que certains modèles de graphes planaires sont couplés avec des modèles d'arbres plans étiquetés aléatoires. On va donc commencer par comprendre quel peut être l'analogie continu d'un arbre plan bien étiqueté uniforme.

L'arbre brownien à étiquetage brownien Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons (T_n, ℓ_n) un élément choisi uniformément au hasard dans \mathcal{F}_n et notons d_n la distance de graphe sur T_n . On rappelle que T_n définit $2n$ secteurs angulaires dans le plan, notons les c_0, c_1, \dots, c_{2n} dans l'ordre cyclique horaire en partant du secteur racine $c_0 = c_{2n}$. On appelle hauteur d'un secteur angulaire la distance de son sommet associé dans T_n avec le sommet racine. Un objet utile pour étudier les arbres planaires est le *processus de contour* :

Definition 4.1. *Le processus de contour de T_n est la fonction $S_n : [0, 2n] \mapsto \mathbb{N}^*$ définie comme interpolation linéaire de la suite des hauteurs successives des sommets c_0, c_1, \dots, c_{2n} (cf fig 5).*

L'application associant à un arbre T son processus de contour est une bijection entre les arbres plans à n arêtes et les fonctions $c : [0, 2n] \rightarrow \mathbb{N}^*$ dont les incréments valent ± 1 et qui vérifient $c(0) = c(2n) = 0$. Il suit que la loi de S_n est celle d'une marche aléatoire symétrique simple conditionnée à l'événement $\{S_n(0) = S_n(2n) = 0 \text{ et } S_n(j) \geq 0 \text{ pour tout } j \in [0, 2n]\}$. L'intérêt

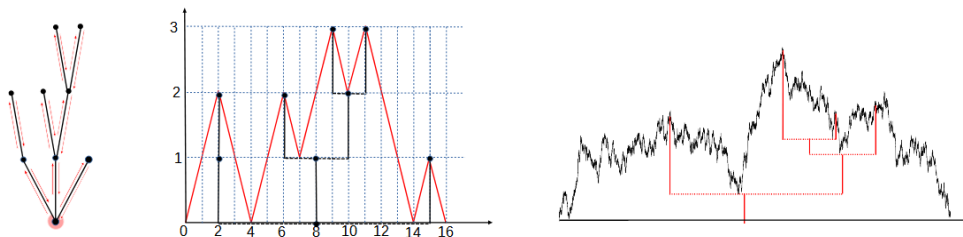


FIGURE 4 – A l'arbre T_n (gauche), on associe sa fonction de contour S_n (milieu). L'arbre brownien est 'l'arbre réel' dont la fonction de contour est une excursion brownienne (droite).

de cette définition est l'on comprend très bien la limite d'échelle des fonctions S_n :

Lemme 4.2 ([17] théorème 1.15). *On a la convergence en loi dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+), \|\cdot\|_\infty)$:*

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} S_n(2nt), t \in [0, 1] \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\zeta(t), t \in [0, 1]),$$

où $(\zeta(t))_{t \in [0,1]}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+)$ vérifiant $\zeta(0) = \zeta(1) = 0$ et appelée excursion brownienne normalisée. La variable ζ s'interprète comme un mouvement Brownien conditionné à valoir 0 en 1 et à rester positif sur $[0, 1]$.³

On va utiliser ce résultat pour construire un objet candidat à être limite d'échelle des arbres T_n . Commençons par remarquer que pour tout $k, l \in [0, 2n]$, la distance $d_{T_n}(c_k, c_l)$ entre deux

3. Ce lemme est une sorte de version conditionnée du bien connu *théorème de Donsker* donnant la convergence des marches aléatoires symétriques simple vers un mouvement Brownien.

sommets associés aux secteurs angulaires c_k et c_l dans T_n vérifie la formule très simple :

$$d_{T_n}(c_k, c_l) = S_n(k) + S_n(l) - 2 \min_{i \in [k, l]} S_n(i).$$

Reprenons alors ζ l'excursion brownienne normalisée fournie par le lemme précédent. Par analogie avec la formule précédente, considérons la pseudo distance d_ζ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall s, t \in [0, 1], \quad d_\zeta(s, t) = \zeta(s) + \zeta(t) - 2 \min_{u \in [s, t]} \zeta(u).$$

On note \sim_ζ la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ définie par $s \sim_\zeta t$ si et seulement si $d_\zeta(s, t) = 0$.

Définition/Proposition 4.3. *L'arbre brownien ou CRT est l'espace métrique pointé (T_ζ, d_ζ, ρ) , où $T_\zeta = [0, 1] / \sim_\zeta$ est l'espace métrique quotient induit par la pseudo distance d_ζ et où ρ est le point de T_ζ associé à la classe d'équivalence de 0 et 1.*

C'est un espace métrique compact qui a une structure d'arbre réel⁴ et qui apparaît comme limite en loi des espaces métriques $(T_n, \frac{1}{2\sqrt{n}}d_{T_n})$ pour la distance de Gromov Hausdorff (cf [17]).

C'est un objet devenu maintenant classique en géométrie aléatoire qui apparaît en fait comme limite d'échelle d'une classe beaucoup plus large de modèles d'arbres plans aléatoires. La paternité de sa construction est généralement attribué à Aldous, et on réfère le lecteur intéressé à [2] pour une étude plus détaillée des propriétés de T .

On souhaite à présent rendre compte de la limite des étiquettes ℓ_n en définissant un étiquetage aléatoire sur l'arbre brownien. Conditionnellement à T_n , les suites d'étiquettes le long des branches de T_n sont des marches aléatoires symétriques issues de 0 à incréments i.i.d. dans $\{-1, 0, 1\}$. Par le théorème de Donsker, on s'attend à ce qu'à la limite, la loi de l'étiquetage entre ρ et v se comporte comme un mouvement brownien. Reprenons donc l'arbre brownien (T_ζ, d_ζ) défini précédemment. Conditionnellement à T_ζ , on note $\ell : T_\zeta \rightarrow \mathbb{R}$ l'unique champ gaussien centré continu vérifiant $\ell(\rho) = 0$ et dont la structure de covariance est :

$$\forall u, v \in T, \quad \mathbb{E}[\ell(u)\ell(v)] = \min_{w \in [x_u, x_v]} \zeta(w),$$

où x_u et x_v sont des antécédents de u et v par la projection canonique $[0, 1] \rightarrow T_\zeta$. On peut montrer que conditionnellement T_ζ , la fonction aléatoire ℓ est bien définie et se comporte comme des mouvements browniens le long des branches de T_ζ qui deviennent indépendant à chaque point de branchement⁵.

Définition 4.4 (Arbre brownien à étiquetage brownien). *L'espace métrique (T, d_T, ρ) muni de l'étiquetage ℓ s'appelle l'arbre brownien à étiquetage brownien.*

4. avoir la propriété 'd'arbre réel' signifie qu'entre tout couple (u, v) de points de T_ζ il existe un unique chemin continu injectif reliant u à v dans T_ζ .

5. la description reste pour des questions de concisions assez informelle ici, et on se réfère à [18] pour une description plus détaillée de cet objet

Disque brownien libre Fort des notations précédentes, on est maintenant en mesure de donner une construction du disque brownien, et on reprend ici la présentation de [15]. Fixons $(\zeta(t))_{t \in [0,1]}$ une excursion brownienne normalisée (qui correspondra à la limite des 'bords' des triangulations \mathcal{T}^L). Il existe un analogue de la bijection de Schaeffer pour les triangulations, appelé bijection de Poulalhon Schaeffer [14] qui associe à chaque élément de $\mathbb{T}^1(L)$ une forêt d'arbres plans étiquetés. Par analogie, la construction du disque brownien se base sur une forêt (infinie cette fois) d'arbres browniens de tailles variables.

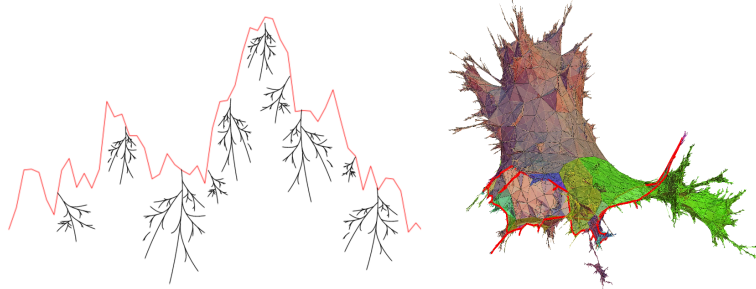


FIGURE 5 – Gauche :Construction d'un disque brownien. On rattache une famille dénombrable d'arbres browniens sur une excursion brownienne (*ourdisage...*) puis on recolle ensuite cette famille sur elle-même par un analogue continu de la bijection inverse de Schaeffer (... et *tissage*). Droite : approximation du disque brownien plongé dans \mathbb{R}^3 , le bord est en rouge (source : page web professionnelle de Jérémie Bettinelli).

Plus précisément, on tire indépendamment de ζ une famille dénombrable $P = (t_i, s_i)_{i \in I}$ de points dans $[0, 1] \times \mathbb{R}_+^*$ telle que :

- pour tout fermé $A \subset [0, 1] \times \mathbb{R}_+^*$ la loi du nombre de points dans $P \cap A$ est une variable de Poisson d'intensité $\int_0^1 du \int_0^\infty ds 2\pi^{-1/2} s^{-3/2} \mathbb{1}_{(u,s) \in A}$,
- pour tout A_1 et A_2 fermés disjoints le nombre de points dans $P \cap A_1$ et $P \cap A_2$ sont indépendants.

On parle de processus ponctuel de Poisson et l'existence d'une telle famille est un résultat standard de probabilité. Chaque couple (t_i, s_i) indique la position et la taille d'un arbre brownien. Indépendamment de ζ et de P , tirons $(T_i, d_i, \rho_i, \ell_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'arbres browniens à étiquetages browniens indépendants et considérons l'ensemble $\mathcal{I} := [0, 1] \cup \bigcup_{i \in I} T_i / \sim$, où \sim est la relation d'équivalence identifiant ρ_i et t_i pour $i \in I$. On le munit de l'étiquetage :

$$\ell(x) = \begin{cases} \sqrt{3}\zeta(t_i) + s_i^{1/4}\ell_i(x) & \text{si } x \in T_i, \text{ pour un certain } i \in I \\ \sqrt{3}\zeta(x) & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases} .$$

L'ensemble \mathcal{I} est l'analogue continu d'une famille d'arbres planaires étiquetés. Pour tout $i \in I$ notons $p_i : [0, 1] \rightarrow T_i$ la projection canonique fournie dans la construction de T_i et $\tilde{p}_i(t) = p_i(s_i^{-1}t)$ sa renormalisation par le facteur s_i . On montre facilement que la quantité $\Sigma := \sum_{i \in I} s_i$ est finie presque sûrement (elle est même d'espérance finie) et il est possible de concaténer les fonctions \tilde{p}_i dans l'ordre prescrit par les t_i pour obtenir une projection $\pi : [0, \Sigma] \rightarrow \mathcal{I}$ qui correspond à une version continue du processus de contour.

Il faut maintenant définir le 'recollement' de \mathcal{I} – analogue de la bijection inverse de Schaeffer– qui va faire apparaître le disque brownien. Pour tout $u, v \in \mathcal{I}$, il existe un intervalle $[s, t]$ dans $[0, \Sigma]$ de longueur minimale vérifiant $\pi(s) = u$ et $\pi(t) = v$, où par convention $[s, t] = [s, \Sigma] \cup [0, t]$ si $s \geq t$. On note $[[u, v]]$ le sous ensemble de \mathcal{I} défini par $\{\pi(b), b \in [s, t]\}$.

Pour rappel dans la bijection inverse de Schaffer, on relie un secteur angulaire c_i à un secteur c_j si les étiquettes entre c_i et c_j sont plus grands que l'étiquette de c_i . Considérons alors :

$$\forall u, v \in \mathcal{I}, \quad D^\circ(u, v) := \ell(u) + \ell(v) - 2 \max \left(\min_{w \in [[u, v]]} \ell(w), \min_{w \in [[v, u]]} \ell(w) \right). \quad (7)$$

Par construction $D^\circ(u, v) = 0$ si et seulement si $\ell(u) = \ell(v)$ et toutes les étiquettes entre u et v pour le parcours de contour π (i.e sur les intervalles $[[u, v]]$ et $[[v, u]]$) sont plus grandes que $\ell(u)$. Le quotientage de \mathcal{I} par la relation d'équivalence $s \sim t \Leftrightarrow D^\circ(u, v) = 0$ va bien s'identifier au disque brownien mais ne permet pas de donner directement la bonne métrique. Il faut pour cela une pseudo métrique D définie pour tout $u, v \in \mathcal{I}$ par :

$$D(u, v) := \inf_{u=u_0, u_1, \dots, u_p=v} \sum_{j=1}^p D^\circ(u_j, u_{j+1}), \quad (8)$$

où l'infimum est pris sur tous les choix d'entiers $p \geq 1$ et d'éléments $u_0, \dots, u_p \in \mathcal{I}$. On peut finalement donner une réponse précise à notre problème initial :

Définition/Proposition 4.5 (disque brownien). *Le disque brownien libre \mathbb{D} est défini comme quotient de \mathcal{I} par la relation d'équivalence $s \sim t \Leftrightarrow D^\circ(s, t) = 0$. La fonction D passe au quotient par \sim et définit une métrique sur \mathbb{D} qui en fait un espace compact. On a bien :*

$$\left(\mathcal{T}^L, \sqrt{\frac{3}{2}} L^{-1/2} d_L \right) \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbb{D}, D),$$

cette convergence ayant lieu en loi dans l'espace métrique de Gromov Hausdorff $(\mathcal{X}, d_{\text{GH}})$ introduit dans la section 2 (cf [1] pour une référence de ce résultat).

Conclusion et perspectives

On a motivé ici la construction du disque brownien comme limite de triangulations de polygones mais cet objet a en fait une propriété d'*universalité* au sens où il apparaît comme limite d'échelle d'une classe beaucoup plus large de graphes aléatoires. Étendre la classe d'universalité des surfaces browniennes (c'est à dire l'ensemble des modèles discrets qui ont pour limite d'échelle les surfaces browniennes) reste un sujet de recherche actif. Les méthodes employées pour cela restent basées sur des techniques combinatoires bijectives, qui, bien qu'élégantes, sont assez peu robustes lorsque l'on modifie légèrement la loi du modèle discret que l'on considère. Par exemple, on ne sait toujours pas établir une limite d'échelle pour les graphes planaires pris uniformément parmi les 5-angulations mais on sait le faire pour les quadrangulations et les 6-angulations.

Un autre pan de la recherche en géométrie brownienne a pour objectif de raffiner notre compréhension des surfaces browniennes. Un papier récent de Le Gall et Riera [15] s'inscrit dans cette démarche et établit une propriété Markovienne spatiale pour le disque brownien libre. La thèse poursuivie par l'auteur de cet IDR s'inscrit dans la continuité de ces travaux et l'un des objectifs est de comprendre plus finement le *cylindre brownien* (analogue à deux bords du disque brownien) en le voyant comme un sous espace métrique du disque brownien.

Références

- [1] Marie ALBENQUE, Nina HOLDEN et Xin SUN. *Scaling limit of triangulations of polygons*. 2020. arXiv : 1910.04946 [math.PR].
- [2] David ALDOUS. “The continuum random tree. III.” In : *Ann. Probab.* (1993), p. 248-289.
- [3] Omer ANGEL et Oded SCHRAMM. “Uniform Infinite Planar Triangulations”. In : *Communications in Mathematical Physics* 241.2-3 (2003), p. 191-213. DOI : 10.1007/s00220-003-0932-3. URL : <https://doi.org/10.1007/s00220-003-0932-3>.
- [4] Olivier BERNARDI et Éric FUSY. *Bijections for planar maps with boundaries*. 2017. arXiv : 1510.05194 [math.CO].
- [5] Louigi Addario BERRY et Marie ALBENQUE. *The scaling limit of random simple triangulations and random simple quadrangulations*. 2016. arXiv : 1306.5227 [math.PR].
- [6] Jérémie BETTINELLI, Emmanuel JACOB et Grégory MIERMONT. “The scaling limit of uniform random plane maps, via the Ambjørn–Budd bijection”. In : *Electronic Journal of Probability* 19.none (2014). DOI : 10.1214/ejp.v19-3213. URL : <https://doi.org/10.1214/ejp.v19-3213>.
- [7] Jérémie BETTINELLI et Gregory MIERMONT. *Compact Brownian surfaces I. Brownian disks*. 2015. DOI : 10.48550/ARXIV.1507.08776. URL : <https://arxiv.org/abs/1507.08776>.
- [8] Jérémie BETTINELLI et Grégory MIERMONT. *Compact Brownian surfaces II. Orientable surfaces*. 2022. arXiv : 2212.12511 [math.PR].
- [9] Jérémie BETTINELLI et Grégory MIERMONT. *Compact Brownian surfaces II. Orientable surfaces*. 2022. arXiv : 2212.12511 [math.PR].
- [10] J. BOUTTIER, P. Di FRANCESCO et E. GUITTER. *Planar maps as labeled mobiles*. 2004. arXiv : math/0405099 [math.CO].
- [11] Dmitri BURAGO, Yuri BURAGO et Sergei IVANOV. *A course in metric geometry*. 2001.
- [12] Philippe CHASSAING et Gilles SCHAEFFER. *Random Planar Lattices and Integrated SuperBrownian Excursion*. 2002. arXiv : math/0205226 [math.CO].
- [13] Nicolas CURIEN. *Peeling random planar maps*. 2009.
- [14] D. POULALHON et G. SHAEFFER. “Optimal coding and sampling of triangulations”. In : *Algorithmica* 46 3 (2006), p. 505-527.
- [15] Jean-François Le GALL et Armand RIERA. *Spatial Markov property in Brownian disks*. 2023. DOI : 10.48550/ARXIV.2302.01138. URL : <https://arxiv.org/abs/2302.01138>.
- [16] Jean-François LE GALL. “Geodesics in large planar maps and in the brownian map”. In : *Acta Math.* 205(2) (2010), p. 287-360.
- [17] Jean-François LE GALL. “Random trees and applications”. In : *Probability Surveys* 2 (2005), p. 245-311.
- [18] Jean-François LE GALL. *Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations*. 1999.

- [19] Jean-François LE GALL. “Uniqueness and universality of the Brownian map”. In : *Ann. Probab.* 41(4) (2013), p. 2880-2960.
- [20] Cyril MARZOUK. “On scaling limits of random trees and maps with a prescribed degree sequence”. In : *Annales Henri Lebesgue* 5 (2022), p. 317-386. DOI : 10.5802/ah1.125. URL : <https://doi.org/10.5802%2Fah1.125>.
- [21] Grégory MIERMONT. *The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations*. 2011. arXiv : 1104.1606 [math.PR].