

Le processus d'exclusion asymétrique : Limite hydrodynamique et phénomène de Cut-off

Ons Rameh

Introduction au domaine de recherche, sous la direction de Max FATHI

1 Introduction

Un des objectifs de la mécanique statistique est d'étudier l'évolution des systèmes ayant un nombre extrêmement large de degrés de liberté. Pour donner un ordre de grandeur, un litre d'eau pure contient de l'ordre de 10^{25} molécules. Si l'on veut encoder une seule configuration possible des molécules d'eau, on aura besoin de 10^{15} terabytes. En contrepartie, on est capable de décrire avec plus ou moins de précision l'état macroscopique de l'eau en mesurant sa température ou sa pression. Il s'avère que la connaissance précise de l'état du système n'est pas nécessaire pour comprendre le comportement global de quantités macroscopiques du système.

Afin de simplifier l'étude mathématique, on remplace l'approche déterministe régie par les lois de Newton par une approche stochastique. L'ergodicité des systèmes aléatoires permet d'éviter les configurations bloquantes, ce qui simplifie l'étude. Intuitivement, on s'attend à un phénomène de type loi des grands nombres si l'on se place à la bonne échelle spatio-temporelle. L'étude mathématique de la connexion entre une évolution macroscopique et un modèle d'interaction remonte à l'article de Morrey [9] qui a été poursuivie par nombreux mathématiciens. Dans cette introduction au domaine de recherche, on va s'intéresser dans un premier temps, au comportement hydrodynamique du modèle d'exclusion asymétrique (ASEP).

Par ailleurs, il est intéressant de se demander à partir de quel instant le système physique est considéré en équilibre. Il s'agit d'étudier la vitesse de convergence lorsque le nombre de particules considérées est "grand" (tend vers l'infini). Dans un second temps, on étudiera le comportement en temps long de l'ASEP.

2 Processus de Markov à temps continu

On commence par rappeler les concepts de base du processus de Markov. On se restreint dans la suite au processus à espace d'états fini E .

Comme la chaîne de Markov, le comportement futur du processus markovien à partir de l'instant s ne dépend du passé qu'à travers sa valeur à l'instant s . Afin de décrire la loi, il suffit de donner l'ensemble de matrices de transition $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in (\mathbb{R}^{E \times E})^{\mathbb{R}_+}$ qui doivent vérifier :

1. $P_0 = \text{Id}$
2. $P_{s+t} = P_s P_t$, pour tout $t, s \geq 0$. (Propriété de semi-groupe)

La famille $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un semi-groupe markovien. On peut à présent définir rigoureusement le processus de Markov associé à $(P_t)_t$.

Définition 2.1 (Processus de Markov). *Un processus markovien à valeurs dans E est la donnée des objets suivants.*

$$\left(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E) \right).$$

1. (Ω, \mathcal{F}) est un espace mesurable et $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une filtration sur (Ω, \mathcal{F}) .
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X_t : \Omega \rightarrow E$ est \mathcal{F}_t -mesurable.
3. $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un semi-groupe markovien.
4. Pour toute loi initiale $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, \mathbf{P}_μ est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) telle que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \forall j \in E, \quad \mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu [\mathbf{1}_{\{X_{t+s}=j\}} \mid \mathcal{F}_t] = P_s(X_t, j).$$

On admettra qu'il existe une modification càdlàg¹ du processus de Markov et on prendra toujours la version càdlàg.

La propriété de semi-groupe implique la propriété de Markov Faible.

Théorème 2.1. *Pour toute loi μ sur E , et pour toute fonction test mesurable bornées $\Phi : D(\mathbb{R}_+, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\mathbf{E}_\mu [\Phi((X_{s+t})_s) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}_{X_t}[\Phi(X)], \quad \mathbf{P}_\mu\text{-p.s.}$$

Définition 2.2. *On appelle générateur infinitésimal associé au semi-groupe $(P_t)_t$, la matrice $L = \frac{d}{dt}P_t(t = 0^+)$. On peut aussi voir le générateur comme un opérateur qui agit sur les fonctions*

$$L\varphi(x) = \sum_{y \neq x} L(x, y)(\varphi(y) - \varphi(x)), \forall \varphi : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

D'après la propriété de semi-groupe, le générateur caractérise complètement le processus markovien. Dans notre cas, le lien entre le générateur et le semi-groupe est simple vu que l'on suppose que l'espace d'états est fini. En effet, on peut montrer que $P_t = e^{tL}$, pour tout $t > 0$.

Le générateur permet d'associer à chaque fonction $F : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, deux martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$:

$$M^F(t) = F(t, X_t) - F(0, X_0) - \int_0^t ds (\partial_s + L) F(s, X_s)$$

$$N^F(t) = (M^F(t))^2 - \int_0^t ds \left\{ LF(s, X_s)^2 - 2F(s, X_s) LF(s, X_s) \right\}.$$

On clôt ce résumé en précisant la définition de mesure invariante :

Définition 2.3 (Mesure invariante). *On dit que μ est une mesure invariante du processus (ou du semi-groupe) si $\mu P_t = \mu$ pour tout $t \geq 0$, autrement dit si*

$$X_0 \sim \mu \quad \Rightarrow \quad \forall t \geq 0, \quad X_t \sim \mu.$$

De manière équivalente, la mesure est invariante si et seulement si $\mu L = 0$.

3 Définitions et notations

On se propose dans cette section d'introduire les notions dont on aura besoin dans le reste du mémoire. On commence par définir le processus d'exclusion. Dans un deuxième temps, on définira l'équation de conservation scalaire.

1. càdlàg : continue à droite limitée à gauche

3.1 Modèle de processus d'exclusion

Dans ce rapport, on s'intéressera à des modèles d'interaction de particules sur le tore $\mathbb{T}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ avec des conditions aux bords périodiques ou sur le segment $\llbracket 0, N \rrbracket$.

Un exemple emblématique de système de particules en interaction est le modèle d'exclusion. Ce modèle a été introduit par Spitzer [15] en 1970 comme modèle de gaz sur réseau à température infinie puis par Clifford et Sandburry en 1973 comme la compétition de deux espèces qui se disputent un territoire.

On considère une configuration initiale $\eta_0 \in \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N}$. La présence d'une particule au site x est modélisée par $\eta_0(x) = 1$. On laisse les particules évoluer sur le réseau \mathbb{T}_N selon les règles suivantes :

1. Chaque site contient au plus une particule. C'est la règle d'exclusion.
2. Chaque site a une horloge qui sonnera avec des intertemps fixés par des lois exponentielles de taux 1. De plus, toutes les horloges sont indépendantes.
3. Si l'horloge du site i sonne, on choisit de tenter un saut à droite (resp. à gauche) avec une probabilité p (resp. $1 - p$). Le saut n'est effectué que lorsqu'il y a une particule au site i et que la destination est vide afin de respecter la règle d'exclusion.

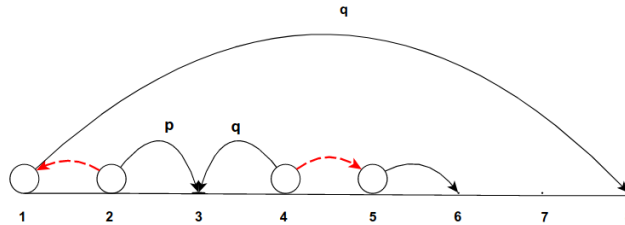


FIGURE 1 – Processus d'exclusion sur le tore \mathbb{T}_8 . Les flèches pointillées en rouge correspondent aux sauts interdits.

Le processus que l'on considère prend ses valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N}$. Il est markovien et son générateur est donné par :

$$(L_N f)(\eta) := \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{z \in \{-1, 1\}} \eta(x) [1 - \eta(x+z)] p(z) [f(\eta^{x, x+z}) - f(\eta)],$$

où $\eta^{x,y}$ est la configuration obtenue en faisant sauter une particule présente en x vers le site y . On a noté aussi $p(1) = p$ et $p(-1) = 1 - p = q$.

Mesures invariantes : On définit pour tout $\alpha \in [0, 1]$ la mesure $\nu_\alpha = \bigotimes_x \mathcal{B}(\alpha)$.² On remarque que cette famille est paramétrisée par la densité :

$$\mathbb{E}_{\nu_\alpha}(\eta(0)) = \alpha.$$

Proposition 3.1. *Les mesures $(\nu_\alpha)_{\alpha \in [0, 1]}$ sont des mesures invariantes pour le processus d'exclusion.*

Attractivité du processus d'exclusion : L'espace $\{0, 1\}^{\mathbb{T}_N}$ est muni de la relation d'ordre partielle suivante :

$$\eta \leq \xi \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in \mathbb{T}_N, \eta(x) \leq \xi(x),$$

2. $\mathcal{B}(\lambda)$ est la loi de Bernouilli de paramètre λ .

qui induit une relation d'ordre sur l'espace des mesures :

$$\mu \leq \nu \quad \text{si et seulement si} \quad \int f d\mu \leq \int f d\nu,$$

pour toute fonction f croissante sur $\{0, 1\}^{\mathbb{T}^N}$. Lors de l'étude du comportement macroscopique d'un système de particule, il peut être utile de coupler deux processus en respectant cette relation d'ordre.

Théorème 3.1. *Le semi-groupe (P_t) du processus d'exclusion conserve l'ordre partiel sur les mesures :*

$$\mu_1 \leq \mu_2 \implies \mu_1 P_t \leq \mu_2 P_t \quad \forall t \geq 0.$$

Il est dit attractif.

Preuve : On considère des états initiaux η_0 de loi μ_1 et ξ_0 de loi μ_2 . Comme $\mu_1 \leq \mu_2$, on peut les coupler de telle sorte à avoir :

$$\eta_0 \leq \xi_0, \quad p.s$$

Il suffit de synchroniser les horloges de chaque site des deux processus ainsi que le choix du pas à effectuer. On vérifie que tous les sauts (cf Figure 3.1) conservent l'ordre des configurations :

$$\text{Pour } t > 0, \quad \eta_t \leq \xi_t.$$

ce qui suffit pour conclure. □

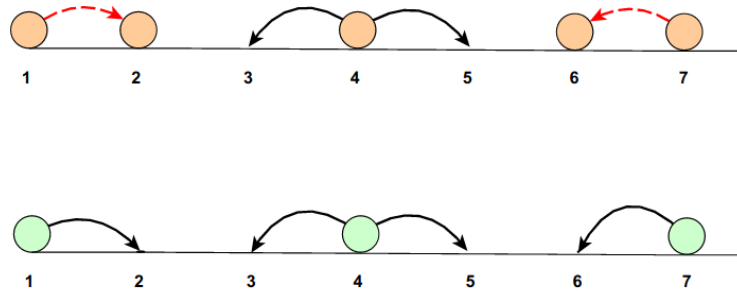


FIGURE 2 – Le processus ξ (resp. η) correspond aux particules en orange (resp. vert). La figure résume les configurations de sauts qu'on peut avoir.

3.2 L'équation de conservation scalaire

Une des équations qui émerge dans le cadre de l'étude de la limite hydrodynamique du processus d'exclusion est l'équation de conservation scalaire :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \Phi(\rho) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0 \end{cases} \quad (1)$$

où le flux $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne, $(t, x) \mapsto \rho(t, x) \in \mathbb{R}$ l'inconnue de l'équation et $\rho_0 \in L^\infty$ la condition initiale.

Une solution classique du problème de Cauchy est une solution $\rho \in C^1$ et continue jusqu'au bord. La méthode des caractéristiques donne l'existence et l'unicité d'une solution classique jusqu'à un temps T^* . T^* correspond au premier instant pour lequel des caractéristiques entrent en collision ce qui crée une discontinuité.

Théorème 3.2. *On suppose que $\Phi \in \mathcal{C}^2$. Soit $\rho_0 \in \mathcal{C}^1$ bornée et de dérivé borné. On définit :*

$$T^* = -\frac{1}{\max(\inf(\Phi' \circ \rho_0), 0)}.$$

Alors, le problème de Cauchy possède une unique solution de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0, T^)$ et n'en possède pas sur $\mathbb{R} \times [0, T]$ si $T \geq T^*$.*

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans le livre de D.Serre ([13] proposition 2.1.1). Par conséquent, la notion de solution classique ne suffit pas et on introduit une notion de solution faible.

Définition 3.1. *Une solution faible ρ au problème (1) est une fonction mesurable bornée telle que :*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\partial_t \psi \rho + \partial_x \psi \Phi(\rho)] dx dt + \int_{-\infty}^\infty \psi(x, 0) \rho_0(x) dx = 0, \quad (2)$$

pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{D}([0, \infty) \times \mathbb{R})$.

Cet affaiblissement de la notion de solution entraîne la non-unicité. On doit introduire un critère pour choisir parmi elles la solution ‘‘physique’’ :

Définition 3.2. *Une solution entropique ρ au problème (1) est une fonction mesurable et bornée telle que :*

$$\int_{(0, \infty) \times \mathbb{R}} dt du \partial_t G |\rho - c| + \partial_x G \operatorname{sgn}(\rho - c) (\Phi(\rho) - \Phi(c)) + \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(u) - c| G(x, 0) du \geq 0. \quad (3)$$

pour toute fonction test positive $G \in \mathcal{D}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.1. *Une solution faible ρ est réversible au sens où $v(x, t) = \rho(-x, (s - t))$ est aussi solution sur $\mathbb{R} \times (0, s)$. L'introduction de l'inégalité entropique permet de garder trace de l'irréversibilité des modèles physiques étudiés. En effet, la loi de conservation scalaire correspond au modèle non visqueux de l'équation avec un terme diffusif :*

$$\partial_t \rho + \partial_x \Phi(\rho) = \varepsilon \partial_x^2 \rho.$$

On peut montrer que sous des hypothèses adéquates, la suite de solutions ρ^ε converge presque partout vers la solution entropique ce qui justifie la notion de solution entropique.

Dans ce cadre, le problème de Cauchy est bien posé.

Théorème 3.3 (Kruzhkov [5]). *Pour toute fonction $\rho^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une unique solution entropique ρ à (1) dans $L^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0, \infty), L^1_{loc}(\mathbb{R}))$. De plus, si $\rho^0, \tilde{\rho}^0 \in L^1$ alors :*

$$\|\rho(t) - \tilde{\rho}(t)\|_1 \leq \|\rho^0 - \tilde{\rho}^0\|_1.$$

Une preuve de ce théorème est également donnée dans le livre de D.Serre (théorème 2.3.5 [13]).

4 Limite hydrodynamique

Le but est de donner la description hydrodynamique d'un système de particules en interaction (η_t) . Autrement dit, on souhaite exhiber une EDP qui régit le comportement macroscopique de la densité de particules.

Plus exactement, on veut étudier le comportement de la mesure empirique associée au processus $(\eta_t)_t$:

$$\pi_t^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \eta_t(x) \delta_{\frac{x}{N}},$$

en montrant une convergence vers une mesure à densité $t, u \mapsto \rho(t, u)$, solution d'une certaine EDP. Cette EDP est appelée l'équation hydrodynamique associée au système. On commence maintenant par considérer le cas de particules indépendantes.

4.1 Cas des particules indépendantes

On commence par considérer le modèle des marches aléatoires simples indépendantes. Comme les particules sont échangeables, on s'intéresse uniquement au nombre de particules à chaque site au lieu de la position des particules. Autrement dit, on considère

$$\eta_t(x) = \sum_{i=1}^K \mathbb{1}_{X_t^i=x},$$

où $(X_t^i)_i$ sont des marches aléatoires simples indépendantes de paramètres (p, q) et K le nombre total de particules. On remarque que pour tout $\alpha > 0$, la mesure de probabilité $\mathcal{P}(\alpha)^{\otimes \mathbb{T}_N}$ ³ est une mesure invariante.

Afin de décrire complètement le processus, il faut donner une loi initiale. Par ailleurs, on veut une loi initiale qui soit l'analogie microscopique d'un profil de densité macroscopique $\rho_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Il est naturel de considérer un système en équilibre local : localement autour du site x , le système à l'état initial se comporte comme une mesure d'équilibre de densité fixée par le profil de densité macroscopique. On note pour tout $\rho_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\nu_{\rho_0}^N = \bigotimes_{x \in \mathbb{T}_N} \mathcal{P}\left(\rho_0\left(\frac{x}{N}\right)\right).$$

La loi du processus à l'instant t est entièrement décrite par sa transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N} \left(\exp \left[- \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \lambda(x) \eta_t(x) \right] \right) = \exp \left[\sum_{y \in \mathbb{T}_N^d} \left(e^{-\lambda(y)} - 1 \right) \psi_{N,t}(y) \right]$$

où $\psi_{N,t}(y) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} p_t(y-x) \rho_0(x/N)$ et p_t la loi de X_t^1 partant de 0.

Si ρ_0 est continue, $(\psi_{N,t}([uN]))_{u \in \mathbb{R}}$ converge simplement vers $(\rho_0(u))_{u \in \mathbb{R}}$. Autrement dit, la densité macroscopique reste constante et égale à ρ_0 . Le système évolue très lentement pour qu'on puisse voir un mouvement macroscopique.

Afin d'observer une dynamique macroscopique, il faut accélérer le système. On cherche une suite réelle $(\theta_N)_N$ tel que $(\psi_{N,\theta_N t}([uN]))$ ne converge pas trivialement vers ρ_0 . Par exemple, si le système est asymétrique ($p \neq q$), on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{x: |x/N - (p-q)t| \leq \varepsilon} p_{tN}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{X_{tN}^1}{N} - (p-q)t \right| \leq \varepsilon \right] = 1.$$

Il en découle que

$$\psi_{N,Nt}([uN]) \longrightarrow \rho_0(u - (p-q)t).$$

Dans le cas de particules indépendantes, l'équation hydrodynamique est l'équation de transport

$$\partial_t \rho + (p-q) \cdot \partial_x \rho = 0.$$

4.2 Cas du processus d'exclusion asymétrique (ASEP)

On s'intéresse dans la suite au comportement hydrodynamique du système d'exclusion dans le cas asymétrique $p(1) > p(-1)$ et on note la mesure empirique :

$$\pi_t^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \eta_t(x) \delta_{\frac{x}{N}},$$

3. $\mathcal{P}(\alpha)$ est la loi de Poisson de paramètre α .

où η_t est à présent le processus accéléré par un facteur N .

Il convient de se demander à ce stade par quelle EDP la dynamique macroscopique est régie. On se donne une fonction test $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, la martingale associée est donnée par ⁴ :

$$\begin{aligned} M_t^G &= \langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - \int_0^t \color{red}{N} L_N \langle \pi_s^N, G \rangle ds \\ &= \langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - \int_0^t ds \sum_x \mathbf{1}_{\substack{\eta_s(x)=1 \\ \eta_s(x+1)=0}} p \left[G\left(\frac{x+1}{N}\right) - G\left(\frac{x}{N}\right) \right] \\ &\quad + q \mathbf{1}_{\substack{\eta_s(x)=1 \\ \eta_s(x-1)=0}} \left[G\left(\frac{x-1}{N}\right) - G\left(\frac{x}{N}\right) \right] \\ &\sim \langle \pi_t^N, G \rangle - \langle \pi_0^N, G \rangle - \frac{1}{N} \int_0^t ds \sum_x \partial_x G\left(\frac{x}{N}\right) \left[p \mathbf{1}_{\substack{\eta_s(x)=1 \\ \eta_s(x+1)=0}} - q \mathbf{1}_{\substack{\eta_s(x)=1 \\ \eta_s(x-1)=0}} \right] + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Si l'on prend l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} G(x/N) (\rho^N(t, x/N) - \rho^N(0, x/N)) \\ \sim \frac{1}{N} \int_0^t ds \sum_x \partial_x G\left(\frac{x}{N}\right) \mathbb{E} \left[p \mathbf{1}_{\substack{\eta_s(x)=1 \\ \eta_s(x+1)=0}} - q \mathbf{1}_{\substack{\eta_s(x)=1 \\ \eta_s(x-1)=0}} \right] + O\left(\frac{1}{N}\right), \end{aligned}$$

où $\rho^N(t, x/N) = \mathbb{E}[\eta_t(x)]$.

Intuitivement, on peut supposer que localement autour de x , on se comporte comme une mesure d'équilibre de densité locale $\rho^N(t, x/N)$. Selon cette heuristique, on peut remplacer le terme en espérance par $(p - q)\rho^N(1 - \rho^N)$:

$$\frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} G(x/N) (\rho^N(t, x/N) - \rho^N(0, x/N)) \sim \frac{p - q}{N} \int_0^t \sum_x \partial_x G\left(\frac{x}{N}\right) \rho^N(1 - \rho^N)(s, x/N) ds.$$

On voit apparaître la formulation faible de l'équation de conservation scalaire :

$$\partial_t \rho + \partial_x \Phi(\rho) = 0, \quad \text{où} \quad \Phi(\rho) = (p - q)(\rho(1 - \rho)).$$

Rost [12] en 1981 donne la première preuve du comportement hydrodynamique d'un système asymétrique en considérant un processus d'exclusion totalement asymétrique ($p = 1$). En 1987, Benassi et Fouque [1] prouvent la limite hydrodynamique dans le cas asymétrique en dimension 1. Rezakanlou dans son article [10], étudie une généralisation de l'ASEP en toute dimension.

Théorème 4.1. *Soit $\rho_0 : \mathbb{T} \mapsto [0, 1]$ un profil de densité borné mesurable. Soit $N \geq 1$, on définit la loi initiale $\mu^N = \otimes_{x \in \mathbb{T}_N} \mathcal{B}(\rho_0(\frac{x}{N}))$.*

On note ρ l'unique solution entropique du problème de Cauchy (1). Pour tout $t \geq 0$, $G : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ continue et $\delta > 0$, on obtient la convergence suivante :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} G(x/N) \eta_t(x) - \int_{\mathbb{T}} G(u) \rho(t, u) du \right| > \delta \right] = 0.$$

Autrement dit, la mesure empirique π_t^N converge en probabilité pour la topologie faible vers $\pi(s, du) = \rho(s, u) du$.

4. Le terme en couleur est dû à l'accélération du temps par un facteur N .

Éléments de la preuve : La preuve consiste à montrer les faits suivants :

- La suite de mesure empirique est relativement compacte par un argument du type Prokhorov. Dans notre cas, on montre que la loi de la trajectoire $\mathcal{Q}_N = \mathcal{L}(t \mapsto \pi_t^N)$ est tendue dans l'espace des fonctions cadlag à valeurs dans $\mathcal{M}_+(\mathbb{T})$.⁵ On note \mathcal{Q}^* une valeur d'adhérence de \mathcal{Q}_N .
- \mathcal{Q}^* est concentré sur des trajectoires à valeurs dans les mesures absolument continues $t \mapsto \rho(t, u)du$.
- La densité $\rho(t, u)$ vérifie l'équation de conservation scalaire \mathcal{Q}^* -p.s grâce à un argument de martingale.
- On pourra dans ce cas conclure parce que l'EDP admet une unique solution.

Reprenons le troisième point. On ne peut pas se contenter d'utiliser l'heuristique puisqu'on n'a pas unicité de la solution faible. On veut montrer que pour tout G régulière et $c \in [0, 1]$, on a l'inégalité entropique \mathcal{Q}^* -p.s

$$\int_{(0, \infty) \times \mathbb{R}} dt du \partial_t G |\rho - c| + \partial_x G \operatorname{sgn}(\rho - c)(\Phi(\rho) - \Phi(c)) \geq 0.$$

Au lieu de comparer le processus à la constante c , l'idée est d'introduire un deuxième ASEP qui sera à l'équilibre avec une densité fixée c . Les deux processus sont couplés en respectant l'ordre grâce à l'attractivité. En utilisant les martingales associées à G , on montre que

$$\lim \mathbb{P}^N \left[\int_0^t \frac{1}{N} \sum_u \partial_t G \left(s, \frac{x}{N} \right) |\eta_s(x) - \xi_s(x)| + \int_0^t \frac{1}{N} \sum_u \partial_x G \left(s, \frac{x}{N} \right) q(\eta_s, \xi_s) \geq -\varepsilon \right] = 1,$$

où $q(\rho, c) = \operatorname{sgn}(\rho - c)(\Phi(\rho) - \Phi(c))$.

La deuxième idée consiste à utiliser l'heuristique de l'équilibre local. Intuitivement, sur un cube de taille εN , le système atteint plus rapidement l'état d'équilibre. On peut dans ce cas substituer des moyennes sur des cubes de taille εN par l'espérance par rapport à la mesure d'équilibre. Cette substitution est essentiellement possible grâce à l'attractivité du processus et au choix du couplage ainsi qu'à l'estimation de variation de l'entropie. \square

Remarque 4.1. *1. Il existe deux méthodes principales générales valides pour des grandes classes de domaines pour démontrer une limite hydrodynamique. D'abord, la méthode entropique introduite par Guo, Papanicolaou et Varadhan [2]. La preuve précédente en est une application. Ensuite, la méthode d'entropie relative introduite par Yau [16]. Elle consiste à démontrer une inégalité de type Gronwall pour l'entropie relative par rapport à un état d'équilibre local à variation lente. Le livre de Kipnis et Landim [3] présente ces deux méthodes en les appliquant à différents modèles de processus en interaction.*

2. Le processus d'exclusion a également été étudié dans le cas symétrique. Dans ce cas, le comportement macroscopique à l'échelle diffusiv est régi par l'équation de la chaleur.

Par ailleurs, on peut se demander à quel point on peut mettre en valeur des similarités entre la structure microscopique et la dynamique macroscopique. Un des aspects intéressants de l'équation de conservation scalaire est l'apparition de discontinuités. Rezakhanlou dans l'article [11] s'intéresse à l'analogie microscopique de ces discontinuités. Il s'avère être la limite de la localisation d'une particule de seconde espèce qu'on a rajoutée initialement au système.

On se place dans le reste de la section sur le réseau \mathbb{Z} . On commence par définir la notion de particule de seconde espèce. On considère un état initial η_0 et $a > 0$. On rajoute une particule

5. pour la topologie de Skorokhod. Comme dans notre cas la limite est continue, la convergence est uniforme.

dite de seconde espèce à la position $x_0 = [aN]$ en définissant :

$$\begin{aligned}\xi_0(u) &= \eta_0(u) \text{ for } u \neq x_0 \\ \xi_0(x_0) &= \eta_0(x_0) + 1.\end{aligned}$$

Comme on se place dans un cadre de processus attractif, pour tout t , il existe un site x_t tel que :

$$\begin{aligned}\xi_t(u) &= \eta_t(u) \text{ for } u \neq x_t \\ \xi_t(x_t) &= \eta_t(x_t) + 1.\end{aligned}$$

où (η_t, ξ_t) sont couplés selon le couplage introduit dans la preuve du théorème 3.1. On peut ainsi regarder de manière équivalente le processus Markovien (η, x) .

Si on était dans le cadre de solution classique, on se serait attendu à obtenir une concentration sur les caractéristiques. On a tout de même un équivalent à la notion de caractéristiques grâce à la notion de solution de Fillipov.

Définition 4.1. *Une caractéristique généralisée est une solution absolument continue de*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Phi'(\rho(x, t)) \\ x(0) = a \end{cases}$$

au sens où pour tout $t \leq T$

$$\frac{dx}{dt} \in [\Phi'(\rho(x(t)^+, t)), \Phi'(\rho(x(t)^-, t))].$$

La caractéristique généralisée suivra une courbe caractéristique classique tant qu'elle reste sur les points de continuité. Puis, elle suivra les courbes de discontinuité. Le théorème suivant donne les hypothèses suffisantes pour justifier l'heuristique précédente.

Théorème 4.2 (Rezakhanlou [11]). *Soit $\rho_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ un profil de densité bornée mesurable et à support compact. On suppose que*

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} \rho_0(y) dy \leq \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^a \rho_0(y) dy.$$

et

$$\int_a^{a+\delta} (1 - \rho_0(y)) dy \int_{a-\delta}^a \rho_0(y) dy \neq 0, \quad \forall \delta > 0$$

alors $(\frac{x_t L}{L})$ converge faiblement vers $(x(a, t))_t$ dans $D([0, T], \mathbb{R})$ où $t \mapsto x(a, t)$ est la caractéristique généralisée qui part du point a .

5 Phénomène de Cut-off du processus d'exclusion

5.1 Notion de temps de mélange

On souhaite étudier le comportement en temps long d'un processus markovien. Par conséquent, on doit se fixer une distance entre les mesures pour pouvoir quantifier. Dans notre cas, on considère la distance en variation totale.

Définition 5.1. *On se donne μ, ν deux mesures de probabilités sur E un ensemble fini. On définit la distance en variation totale entre μ et ν :*

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \max_{A \subset E} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\mu(x) - \nu(x)|.$$

Comme pour les chaînes de Markov finies, si le générateur est irréductible, le processus markovien converge à l'équilibre vers une unique mesure invariante. Afin de mieux comprendre le comportement du processus en temps long, on veut estimer la vitesse de convergence vers l'équilibre. Typiquement, si on se donne une marge d'erreur ε , il est naturel de se demander à partir de quel instant la distance de la loi du processus markovien à la mesure d'équilibre est en dessous de ε .

Définition 5.2 (Temps de mélange). *On se donne (X_t) un processus de Markov à espace fini E de mesure invariante μ^* de semi-groupe $(P_t)_t$. Le temps de mélange du semi-groupe par rapport à l'état x :*

$$T_{\text{mix}}(x; \varepsilon) := \inf \{t \geq 0 : d_{\text{TV}}(\delta_x P^t, \mu^*) \leq \varepsilon\}.$$

Le temps de mélange du semi-groupe est défini par :

$$T_{\text{mix}}(\varepsilon) := \sup \{T_{\text{mix}}(x; \varepsilon) : x \in E\}.$$

On peut à présent introduire la notion de Cut-off. La présence d'un cut-off signifie que pour des temps inférieurs au temps de mélange, la loi de la chaîne reste loin de la mesure stationnaire. Puis, le comportement change de manière abrupte et la loi devient infinitésimalement proche de la mesure d'équilibre.

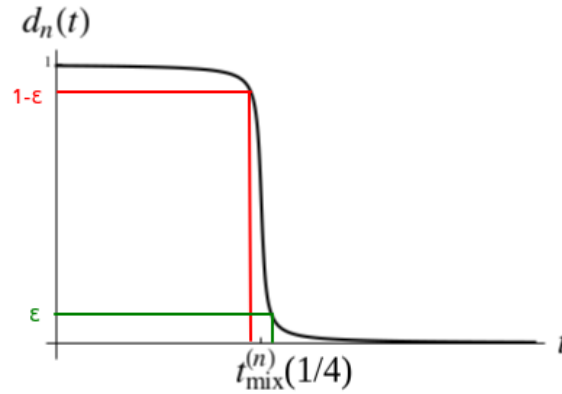


FIGURE 3 – Le graphe de la distance en variation totale (après remise à l'échelle de $T_{\text{mix}}^N(1/4)$) approche une fonction en escalier.

Définition 5.3. *On se donne une suite de processus de Markov (X_t^n) à espace d'état fini E_n . Cette suite admet un cut-off si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T_{\text{mix}}^N(\varepsilon) - T_{\text{mix}}^N(1 - \varepsilon)}{T_{\text{mix}}^N(1/4)} = 0.$$

Autrement dit, relativement à l'ordre de grandeur du temps de mélange $T_{\text{mix}}^N(1/4)$, la fenêtre pour passer d'une erreur $1 - \varepsilon$ à ε est petite. On pourra consulter le livre de Levin, Peres, et Wilmer[8] pour une référence générale.

5.2 Modèle ASEP sur le segment

On s'intéresse dans la suite au processus ASEP sur le segment $\llbracket 1, N \rrbracket$. On conserve les mêmes règles d'évolution pour les particules sur $\llbracket 2, N - 1 \rrbracket$. Toutefois, on interdit les sauts à gauche (resp. droite) pour une particule à la position 1 (resp. N). Le générateur est donné par :

$$(\tilde{L}_N f)(\eta) := \sum_{x=1}^N \sum_{\substack{z \in \{-1, 1\} \\ x+z \notin \{0, N+1\}}} \eta(x)[1 - \eta(x+z)]p(z) [f(\eta^{x, x+z}) - f(\eta)],$$

où $\eta^{x,y}$ est la configuration obtenue en faisant sauter une particule présente en x vers le site y .

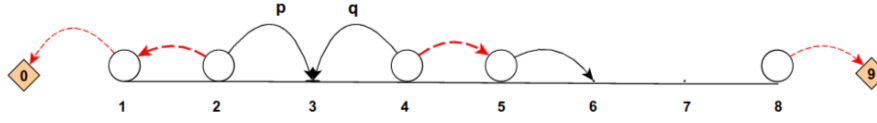


FIGURE 4 – Processus d’exclusion sur le segment $\llbracket 1, 8 \rrbracket$. Les flèches pointillés en rouge correspondent aux sauts interdits.

Afin d’obtenir un générateur irréductible, on restreint l’espace d’état à l’ensemble des configurations à nombre de particules fixés. On note pour tout $N, k \in \mathbb{N}$

$$\Omega_{N,k}^0 = \left\{ \eta \in \{0, 1\}^{\llbracket 1, N \rrbracket} : \sum_{i=1}^N \eta(i) = k \right\}.$$

Dans ce cadre, le générateur \tilde{L}_N admet une unique mesure d’équilibre qu’on notera $\pi_{N,k}$. Dans leur article [6], Labbé et Lacoïn mettent en évidence l’existence d’un phénomène de cut-off pour le cas d’un processus d’exclusion simple asymétrique.

Théorème 5.1 (Labbé, Lacoïn [6]). *On considère l’ASEP sur un segment. On se donne $k > 0$. On note*

$$d^{N,k}(t) := \max_{\xi \in \Omega_{N,k}^0} \left\| P_t^\xi - \pi_{N,k} \right\|_{TV},$$

$$T_{mix}^{N,k}(\varepsilon) := \inf \{ t \geq 0 : d^N(t) < \varepsilon \}.$$

Alors, pour tout $p \in (1/2, 1]$, $\alpha \in [0, 1]$ et $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ k/N \rightarrow \alpha}} \frac{T_{mix}^{N,k}(\varepsilon)}{N} = \frac{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{1-\alpha})^2}{p-q}.$$

La preuve se base essentiellement sur quatre principaux arguments :

1. Dans un premier temps, on remarque que la pire condition initiale correspond à mettre toutes les particules au début du segment. On peut donc se restreindre à cette condition initiale.
2. Ils étudient la limite hydrodynamique de l’ASEP sur un segment. Il est naturel de s’attendre à l’équation de conservation scalaire avec des conditions aux bords de type Neumann. Grâce à cette étude, on peut donner une borne inférieure de la distance entre la première particule et le dernier site vide qu’on note (Δ_s) .
3. La borne supérieure est obtenue grâce à un couplage avec le processus ASEP sur \mathbb{Z} ainsi que des arguments des inégalités de concentration.
4. Conditionnellement à Δ_s , le processus se comporte comme un ASEP sur un segment de taille Δ . On conclut en remarquant qu’une fois que le processus est confiné dans une petite fenêtre, l’équilibre est atteint “rapidement”.

6 Perspectives

On s’intéresse au processus Zéro Range qui autorise une évolution sans restriction sur le nombre de particules par site. On se donne une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui s’annule en 0. À partir de la configuration $\eta \in \mathbb{N}^{\mathbb{T}^N}$, il y a un saut du site x vers le site y avec un taux égal à

$g(\eta(x))p(y-x)$ indépendamment du nombre de particules dans les autres sites. Plus précisément, le générateur est défini par :

$$(L_N f)(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{z \in \{0,1\}} p(z)g(\eta(x)) [f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta)], \quad (4)$$

où $\eta^{x,y}$ est la configuration obtenue si une particule saute de x vers la position y .

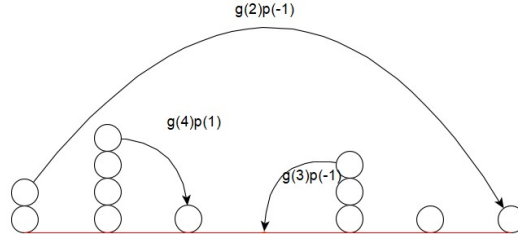


FIGURE 5 – Processus Zero range sur le tore \mathbb{T}_7 .

Théorème 6.1. *Un processus ZR est attractif si g est croissante.*

Le processus ZRP admet des propriétés similaires au processus d'exclusion. Notamment, Rezakhanlou [10] étudie la limite hydrodynamique de le processus ZR asymétrique (AZRP) dans le cadre attractif et l'on voit apparaître une équation de conservation scalaire avec un flux qui dépend de g .

Il est naturel de se demander dans quelles mesures peut-on alléger l'hypothèse d'attractivité. En effet, on peut voir l'attractivité comme l'analogue microscopique de la contraction L^1 . Par ailleurs, il s'avère qu'aucune des normes L^p est contractante pour $p > 1$. Toutefois, Vasseur et ses collaborateurs ([7], [4], [14]) ont construit une version perturbée de la norme L^2 qui est contractante. Plus précisément, ils introduisent un décalage en se basant sur les caractéristiques généralisées dont on a un équivalent microscopique donné par les particules de seconde espèce [11]. De la même manière que l'attractivité est l'analogue de la norme L^1 , il est naturel de se questionner sur l'existence d'un analogue microscopique de cette norme L^2 perturbée et de se demander si elle donnera des nouvelles preuves de limites hydrodynamiques.

Par ailleurs, de manière analogue à l'article de Labbé et Lacoïn, il convient de se demander :

- Quelle est la limite hydrodynamique de l'AZRP attractif sur un segment ?
- Est-ce qu'on voit apparaître un phénomène de Cut-off dans ce cadre ?

Dans le cas ASEP, la pire configuration initiale correspond à mettre toutes les particules au début du segment. Cependant, comme le ZRP autorise la superposition des particules, le pire cas s'obtient en mettant toutes les particules à la position initiale. Par conséquent, on voit apparaître une condition initiale Dirac dans une équation scalaire. Pour ce faire, on aimerait définir une notion de solution pour des conditions initiales de type Dirac qui n'a pas encore été étudiée.

Références

- [1] Albert Benassi and Jean-Pierre Fouque. Hydrodynamical Limit for the Asymmetric Simple Exclusion Process. *The Annals of Probability*, 15(2) :546 – 560, 1987.

- [2] M. Z. Guo, G. C. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan. Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 118(1) :31 – 59, 1988.
- [3] C. Kipnis and C. Landim. *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*. Springer, 1999.
- [4] Sam G. Krupa and Alexis Vasseur. Single entropy condition for burgers equation via the relative entropy method. 2017.
- [5] S N Kružkov. Generalized solutions of nonlinear first order equations with several independent variables. II. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1(1) :93–116, feb 1967.
- [6] Cyril Labbé and Hubert Lacoïn. Cutoff phenomenon for the asymmetric simple exclusion process and the biased card shuffling. *The Annals of Probability*, 47(3), may 2019.
- [7] Nicholas Leger. L^2 stability estimates for shock solutions of scalar conservation laws using the relative entropy method. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 199(3) :761–778, jul 2010.
- [8] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Society, 2006.
- [9] Charles B. Morrey. On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 40(5) :317–322, 1954.
- [10] Fraydoun Rezakhanlou. Hydrodynamic limit for attractive particle systems on \mathbb{Z}^d . *Communications in Mathematical Physics*, 140 :417–448, 1991.
- [11] Fraydoun Rezakhanlou. Microscopic structure of shocks in one conservation laws. *Annales De L Institut Henri Poincare-analyse Non Lineaire*, 12 :119–153, 1995.
- [12] Hermann Rost. Non-equilibrium behaviour of a many particle process : Density profile and local equilibria. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 58 :41–53, 1981.
- [13] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation*. Number vol. 1 in Fondations (Diderot). Diderot, 1996.
- [14] Denis Serre and Alexis F. Vasseur. L^2 -type contraction for systems of conservation laws. *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques*, 1 :1–28, 2014.
- [15] Frank Spitzer. Interaction of markov processes. *Advances in Mathematics*, 5(2) :246–290, 1970.
- [16] Horng-Tzer Yau. Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. *Letters in Mathematical Physics*, 22(1) :63–80, May 1991.