Introduction au domaine de recherche

Théorie de l'intersection arithmétique

Léo Dubocs

Introduction

La théorie de l'intersection est un sujet ancien et important en géométrie algébrique, qui cherche à comprendre comment deux variétés algébriques définies sur un corps s'intersectent, et calculer les multiplicités de ces intersections.

Cependant, du fait qu'elle se base sur un corps, cette théorie ne se généralise pas facilement à un contexte arithmétique, où on aimerait regarder des variétés ou des schémas définis sur $\mathbb{Z}$.

La théorie de l'intersection arithmétique, initiée par Arakelov [Ara76] pour les surfaces et étendue en dimension supérieure par Gillet & Soulé [GS90], vise à pallier ce problème en rajoutant à l'objet algébrique une structure supplémentaire issue de l'analyse complexe. Cette théorie a permis de nombreuses avancées en géométrie arithmétique, on peut citer par exemple la preuve par Faltings [Fal83] de la conjecture de Mordell.

Ce mémoire vise à présenter les idées de la théorie de l'intersection arithmétique de Gillet & Soulé. Dans une première partie, on présente les définitions principales de la théorie de l'intersection classique sur un corps. Dans la seconde, on s'intéresse à la notion de courant en géométrie complexe, avant d'utiliser cette notion dans la troisième partie pour construire le produit d'intersection arithmétique.

1 Théorie classique de l'intersection

Dans cette partie, après une introduction informelle à la théorie des schémas, on présente la théorie de l'intersection classique sur un corps, en suivant par exemple [Ful98] ou [Har77, A].

1.1 Crash course sur les schémas

Le but de cette partie est de donner une introduction informelle à la théorie des schémas. Pour un traitement rigoureux, on pourra se référer par exemple à [Har77] ou [Vak18]. On pourra également regarder [Eis04] pour les définitions d'algèbre commutative non données ici.

Un *schéma* est l'équivalent en géométrie algébrique de ce qu'est une variété différentielle en géométrie différentielle. On peut y penser comme l'espace géométrique associé aux solutions d'un système d'équations polynomiales.

De même qu'une variété différentielle est obtenue en recollant des ouverts de $\mathbb{R}^n$, un schéma s'obtient par recollement de "briques élémentaires" appelées *spectres d'anneaux*. Si A est un anneau (unitaire commutatif), $\operatorname{Spec} A$ est l'ensemble des idéaux premiers de A, muni d'une topologie particulière.

Un schéma est également muni d'une structure supplémentaire, appelée *structure d'espace annelé*. Pour simplifier, à chaque point x du schéma X est associé un anneau local $O_{X,x}$, représentant les germes en x de fonctions régulières[1] sur X. On notera également $k(x)$ le quotient de $O_{X,x}$ par son unique idéal maximal.

Une des particularités de la topologie des schémas est que tous les singletons ne sont pas fermés. Si $X = \operatorname{Spec} A$, alors les $x \in X$ tels que $\{x\}$ est fermé sont les idéaux maximaux de A. Si $x \in X$ n'est pas fermé, alors on peut considérer son adhérence $\overline{\{x\}}$: c'est un sous-schéma de X, dont la codimension[2] est $\dim_{\mathrm{Krull}} O_{X,x}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, si on note $X^{(p)}$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\dim_{\mathrm{Krull}} O_{X,x} = p$, alors l'application $x \mapsto \overline{\{x\}}$ est en fait une bijection entre $X^{(p)}$ et les sous-schémas fermés irréductibles[3] de codimension p.

Si Z est un tel sous-schéma, on appelle *point générique* de Z son antécédent par cette bijection. Si on le note η, alors $O_{X,\eta}$ (que l'on notera aussi $O_{X,Z}$) s'identifie aux fonctions régulières qui sont définies dans un voisinage de $Z \subseteq X$. On note aussi $k(Z)$ pour $k(\eta)$, il s'apparente aux fractions rationnelles définies sur Z.

Un *morphisme de schémas* $X \to Y$ (analogue de ce qu'est une application lisse en géométrie différentielle) est la donnée d'une application continue $X \to Y$, ainsi qu'une donnée supplémentaire liée à la structure d'espace annelé de X et de Y. Dans notre description simplifiée, cela se traduit par des morphismes $O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ pour tout $x \in X$ (noter que les morphismes sur les anneaux locaux vont dans le sens opposé).

Soit A un anneau, on dit qu'un schéma X est un *schéma sur* A, si on se donne un morphisme $X \to \operatorname{Spec} A$. La structure additionnelle de ce morphisme nous permet alors de munir tous les $O_{X,x}$ de structure de A-algèbre. Les cas qui nous intéressent ici sont A est un corps, ou $A = \mathbb{Z}$.

Si B est une A-algèbre, on peut regarder l'ensemble $X(B)$ des B-*points* de X. Cet ensemble est défini par $X(B) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} B, X)$, on peut y penser comme les solutions à valeurs dans B du système d'équations polynomiales qui définit X. Dans le cas particulier $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{C}$, l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X peut être muni d'une structure de *variété différentielle complexe*.

1. C'est-à-dire polynomiales, en un certain sens. Il faut les voir comme l'analogue des fonctions lisses à valeurs dans $\mathbb{R}$ en géométrie différentielle.

2. On ne définira pas précisément la dimension ici, et on se contentera d'une approche intuitive : un point est de dimension 0, une courbe est de dimension 1, etc.

3. Y est irréductible s'il n'est pas l'union de sous-schémas plus petits.

1.2 Équivalence rationnelle et groupes de Chow

On fixe dans toute cette partie un schéma X sur un corps k, que l'on suppose irréductible.

Définition 1.1. On note $Z^p(X)$ le groupe abélien libre engendré par $X^{(p)}$. Un élément de $Z^p(X)$ sera vu comme une somme formelle finie de sous-schémas fermés irréductibles de codimension p. Ces éléments sont appelés *cycles de codimension p*.

Soient $W \in X^{(p-1)}$, $x \in X^{(p)} \cap W$ et $r \in O_{W,x}$. On définit l'*ordre d'annulation de r en x* par

$$\mathrm{ord}_x(r) = \mathrm{length}_{O_{W,x}}(O_{W,x}/(r))$$

On vérifie que l'ordre est fini, et qu'il satisfait $\mathrm{ord}_x(rs) = \mathrm{ord}_x(r)+\mathrm{ord}_x(s)$. Cela nous permet d'étendre la définition de l'ordre d'annulation à toute $r \in k(W)^*$ [4]. Un ordre positif indique un zéro de r, tandis qu'un ordre négatif indique un pôle.

Définition 1.2. Soient $W \in X^{(p-1)}$ et $r \in k(W)^*$. On définit le *diviseur de r* par :

$$\operatorname{div} r = \sum_{x \in X^{(p)} \cap W} \mathrm{ord}_x(r) \, . \, \overline{\{x\}} \in Z^p(X).$$

On dit que deux cycles Z_1 et $Z_2 \in Z^p(X)$ sont *rationnellement équivalents* s'il existe un nombre fini de $W_i \in X^{(p-1)}$ et de $r_i \in k(W_i)^*$ tels que

$$Z_1 - Z_2 = \sum_i \operatorname{div}(r_i)$$

On note $\mathrm{CH}^p(X)$, et on appelle *p-ème groupe de Chow*, le quotient de $Z^p(X)$ par la relation d'équivalence rationnelle.

Exemple 1.3.

— Il n'y a pas de cycle de la forme $\operatorname{div} r$ dans $Z^0(X)$ (pour cause de dimension), donc $\mathrm{CH}^0(X) = Z^0(X) \simeq \mathbb{Z}$, un générateur est $[X]$.

— On peut montrer que $\mathrm{CH}^p(\mathbb{A}^n_k) = \mathbb{Z}$ si $p = n$ et 0 sinon.

— Soit $p \leq n$, tout sous-espace vectoriel E de k^{n+1} de codimension p définit un sous-espace projectif $\mathbb{P}(E) \subseteq \mathbb{P}^n$. On peut montrer que si $E, F \subseteq k^n$ sont de même dimension, alors $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$ sont rationnellement équivalents, et que $\mathrm{CH}^p(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathbb{Z}$.

4. Si $r \in k(W)$, alors pour tout $x \in W$, r s'écrit au voisinage de x comme quotient de germes de fonctions régulières – formellement $k(W) = \mathrm{Frac}(O_{W,x})$.

1.3 Fonctorialité

Définition 1.4. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme plat [5]. On définit le tiré en arrière de $Z \subseteq X$ par :

$$f^*([Z]) = [f^{-1}(Z)]$$

On étend f^* par linéarité en une application $Z^p(Y) \to Z^p(X)$.

Proposition 1.5. *Si $W \subseteq Y$ et $r \in k(W)^*$, alors $f^*(\operatorname{div} r) = \operatorname{div}(f^* r)$. En particulier, f^* se factorise en une application $\mathrm{CH}^p(Y) \to \mathrm{CH}^p(X)$.*

Définition 1.6. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme propre entre schémas. Notons $d = \dim X - \dim Y$. On définit le poussé en avant de $Z \subseteq X$ par :

$$f_*([Z]) = n[f(Z)]$$

où $n = [k(Z) : k(f(Z))]$ si cette extension de corps est finie, et 0 sinon.

On étend f_* par linéarité en une application $Z^p(X) \to Z^{p-d}(Y)$.

Proposition 1.7. *Si Z_1 et $Z_2 \in Z^p(X)$ sont rationnellement équivalents, alors $f_*(Z_1)$ et $f_*(Z_2)$ le sont aussi. En particulier, f_* se factorise en une application $\mathrm{CH}^p(X) \to \mathrm{CH}^{p-d}(Y)$.*

1.4 Degré d'un cycle et produit d'intersection

Les deux ingrédients principaux de la théorie de l'intersection sont le degré, qui permet d'obtenir un invariant numérique d'un cycle, et le produit d'intersection, qui permet de calculer l'intersection de deux cycles. La composition des deux nous permet de mesurer numériquement une intersection, et de pouvoir énoncer des théorèmes de type Bézout.

Définition 1.8. Notons n la dimension de X et π la projection $X \to \operatorname{Spec} k$. On appelle degré la composée

$$Z^n(X) \xrightarrow{\pi_*} Z^0(\operatorname{Spec} k) \simeq \mathbb{Z}$$

Proposition 1.9. *Si $W \subseteq X$ et $f \in k(W)^*$, alors $\deg(\operatorname{div} r) = 0$. En particulier, le degré se factorise en une application $\deg\colon \mathrm{CH}^n(X) \to \mathbb{Z}$.*

De plus on peut montrer que si $Z = \sum_i n_i x_i \in \mathrm{CH}^n(X)$, alors

$$\deg(Z) = \sum_i n_i [k(x_i) : k]$$

Remarque. Pour $r \in k(X)$, on a

$$\deg(\operatorname{div} r) = \sum_{x \in X^{(n)}} \operatorname{ord}_x(r)[k(x) : k]$$

Le fait que le degré se factorise par $\mathrm{CH}^n(X)$ revient à dire que r a autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicité dans une clôture algébrique de k.

5. Cette condition technique permet d'assurer que Z et $f^{-1}(Z)$ ont la même codimension.

Définition 1.10. Soient $Y = \sum n_i Y_i \in Z^p(X)$ et $Z_j = \sum m_j Z_j \in Z^q(X)$. On dit que Y et Z *s'intersectent proprement* si pour tout i et pour tout j, $Y_i \cap Z_j$ est de codimension $p + q$ si cette intersection n'est pas vide.

Théorème 1.11. *Soit X un schéma quasi-projectif non singulier sur un corps k.*

Il existe une unique application $\mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathrm{CH}^q(X) \to \mathrm{CH}^{p+q}(X)$, appelée produit d'intersection *et notée $([Y], [Z]) \mapsto [Y] \cdot [Z]$, qui vérifie les axiomes suivants :*

— *Le produit d'intersection fait de $\mathrm{CH}(X) := \bigoplus_p \mathrm{CH}^p(X)$ un anneau commutatif gradué, dont le neutre pour la multiplication est $[X] \in \mathrm{CH}^0(X)$.*

— *Si $f \colon X \to Y$ est plat, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{CH}(Y)$ on a*

$$f^*(\alpha \cdot \beta) = f^*(\alpha) \cdot f^*(\beta) \tag{1}$$

— *Si $f \colon X \to Y$ est propre et plat, alors pour tout $\alpha, \in \mathrm{CH}(X)$, $\beta \in \mathrm{CH}(Y)$ on a*

$$f_*(\alpha \cdot f^*(\beta)) = f_*(\alpha) \cdot \beta \tag{2}$$

— *Si Y et $Z \subseteq X$ s'intersectent proprement, alors pour toute composante irréductible*[6] *W de $Y \cap Z$ il existe un entier $m(W; Y, Z)$, ne dépendant que d'un voisinage du point générique de W, tel que*

$$[Y] \cdot [Z] = \sum_W m(W; Y, Z)[W] \tag{3}$$

Idée de démonstration. Lorsque Y et Z sont deux sous-schémas fermés qui s'intersectent proprement, on voudrait que les multiplicités $m(W; Y, Z)$ reflètent notre intuition géométrique (multiplicité de 1 pour deux courbes qui s'intersectent transversalement, multiplicité supérieure à 2 en cas en tangence, etc). La formule exacte est un résultat de Serre [Ser75] :

$$m(W; Y, Z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{length}_{O_{X,W}} \operatorname{Tor}_i^{O_{X,W}}(O_{X,W}/I, O_{X,W}/J)$$

où I et J sont les idéaux de $O_{X,W}$ définissant Y et Z respectivement.

Pour passer du cas général au cas particulier, il nous faut utiliser le lemme de déplacement de Chow [Cho56] :

Lemme 1.12. *Soient X un schéma* sur un corps*, soient Y, Z deux cycles. Alors il existe un cycle Z' qui est rationnellement équivalent à Z, et tel que Y et Z' s'intersectent proprement.*

Pour finir la preuve, il reste à montrer que la construction obtenue est indépendante du choix de Z', et vérifie les propriétés mentionnées. □

6. Les composantes irréductibles d'un schéma sont ses sous-schémas irréductibles maximaux ; ces composantes sont en nombre fini.

2 Courants en géométrie complexe

La difficulté pour étendre la théorie de l'intersection au contexte arithmétique est que $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et les variétés arithmétiques en général ne sont pas "compactes" et qu'on ne peut pas les "compactifier" en utilisant seulement le langage algébrique. L'idée d'Arakelov est d'adjoindre un objet issu de la géométrie complexe ; chez Gillet & Soulé cet objet est un courant de Green.

On présente dans cette partie les courants et les courants de Green, on pourra voir à ce sujet [Dem12] et [GS90] respectivement.

On fixe jusqu'à la fin de cette section X une variété différentielle complexe compacte, de dimension (complexe) n.

2.1 Formes différentielles en géométrie complexe

Notons $A^k(X)$ l'ensemble des k-formes différentielles sur X. On sait qu'on a une décomposition de la forme $A^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X)$, où $A^{p,q}(X)$ est l'ensemble des formes de type (p,q), c'est-à-dire qui s'écrivent localement sous la forme

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p \\ j_1<\ldots j_q}} \alpha_{I,J} \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z_{j_1}} \wedge \ldots \mathrm{d}\bar{z_{j_q}}.$$

La différentielle extérieure $d\colon A^k(X) \to A^{k+1}(X)$ se décompose alors en deux parties $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$, avec $\partial\colon A^{p,q}(X) \to A^{p+1,q}$ et $\bar{\partial}\colon A^{p,q+1}(X)$.

Si $f\colon X \to Y$ est une fonction lisse entre variétés différentielles, on dispose de la notion de tiré en arrière des formes différentielles $f^*\colon A^k(Y) \to A^k(X)$. Ce tiré en arrière commute avec d. Lorsque X et Y sont en fait des variétés complexes, et si f est holomorphe, alors le tiré en arrière vérifie $f^*(A^{p,q}(Y)) \subseteq A^{p,q}(X)$, et il commute avec ∂ et $\bar{\partial}$.

2.2 Courants

Comme on travaille sur une variété compacte, on peut munir $A^k(X)$ d'une topologie[7]. Celle-ci se traduit en termes de suites convergentes de la manière suivante :

Définition 2.1. On dit qu'une suite $(\alpha^{(i)})$ de $A^k(X)$ converge vers 0 si pour tout ouvert de coordonnées locales, les fonctions composantes $u_{I,J}^{(i)}$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles successives convergent uniformément vers 0.

De la même façon que les formes différentielles sont un analogue en dimension supérieure des fonctions lisses, les courants vont être un analogue en dimension supérieure des distributions.

7. Sinon, il faudrait regarder uniquement les formes à support compact

Définition 2.2. On note $\mathcal{D}^k(X)$ le dual topologique de $A^{2n-k}(X)$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues $A^{2n-k}(X) \to \mathbb{C}$. On l'appelle ensemble des *courants de degré k*.

De même que pour les formes différentielles, on a une décomposition de la forme $\mathcal{D}^k(X) = \bigoplus \mathcal{D}^{p,q}(X)$, où $\mathcal{D}^{p,q}(X)$ est le dual de $A^{n-p,n-q}(X)$.

Exemple 2.3. Si $\alpha \in A^{p,q}(X)$, alors α induit un courant $[\alpha] \in \mathcal{D}^{p,q}(X)$ via

$$\forall \eta \in A^{n-p,n-q}(X),\ [\alpha](\eta) = \int_X \alpha \wedge \eta.$$

Exemple 2.4. Si $Z \subseteq X$ est une sous-variété complexe de codimension p, alors on définit un courant $\delta_Z \in D^{p,p}(X)$, dit *courant d'intégration*, par

$$\forall \eta \in A^{n-p,n-p}(X),\ \delta_Z(\eta) = \int_Z \eta.$$

Si $Z \subseteq X$ n'est en fait qu'un sous ensemble analytique (c'est-à-dire, Z peut posséder des singularités), une telle définition est toujours possible, en intégrant seulement sur le lieu non singulier de Z, et en montrant que l'intégrale impropre obtenue converge bien. [Lel57]

Définition 2.5. On définit la différentielle extérieure au niveau des courants de la manière suivante : si $T \in \mathcal{D}^k(X)$, alors $\mathrm{d}T \in \mathcal{D}^{k+1}(X)$ est donné par

$$\forall \eta \in A^{2n-k-1}(X),\ \mathrm{d}T(\eta) = (-1)^{k+1}T(\mathrm{d}\omega)$$

On définit de même $\partial\colon \mathcal{D}^{p,q}(X) \to \mathcal{D}^{p+1,q}(X)$ et $\bar{\partial}\colon \mathcal{D}^{p,q}(X) \to \mathcal{D}^{p+1,q}(X)$.

Le signe est fait de telle sorte que pour toute forme $\alpha \in A^k(X)$, on ait $\mathrm{d}[\alpha] = [\mathrm{d}\alpha]$. Cela résulte en effet de la formule de Stokes, car pour tout η :

$$0 = \int_X \mathrm{d}(\alpha \wedge \eta) = \int_X \mathrm{d}\alpha \wedge \eta + (-1)^k \int_X \alpha \wedge \mathrm{d}\eta = [\mathrm{d}\alpha](\eta) - \mathrm{d}[\alpha](\eta)$$

Définition 2.6. Soient $f\colon X \to Y$ une application holomorphe entre variétés complexes et $T \in \mathcal{D}^{p,q}(X)$. Notons $d = \dim X - \dim Y$. On définit le poussé en avant $f_*T \in \mathcal{D}^{p-d,q-d}(Y)$ par

$$\forall \eta \in A^{2n-p-q}(Y),\ f_*T(\eta) = T(f^*\eta)$$

2.3 Courants de Green

On note dans la suite $\mathrm{d}^{\mathrm{c}} = \frac{1}{4i\pi}(\partial - \bar{\partial})$, on a alors $\mathrm{dd}^{\mathrm{c}} = -\frac{1}{2i\pi}\partial\bar{\partial}$.

Définition 2.7. Soit $Z \subseteq X$ un sous ensemble analytique de codimension p. Un courant de Green pour Z est un courant $g \in \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X)$ tel qu'il existe une forme $\omega \in A^{p,p}(X)$ telle que

$$\mathrm{dd}^{\mathrm{c}} g + \delta_Z = [\omega]$$

On étend cette définition dans le cas où $Z = \sum n_i Z_i$ est un cycle analytique, en remplaçant δ_Z par $\sum n_i \delta_{Z_i}$.

Proposition 2.8 (Formule de Poincaré-Lelong)**.** *Soit X une var complexe, $f \in \mathcal{M}(X)$ une fonction méromorphique, $\sum m_j Z_j = \operatorname{div} f$ son diviseur.*

Alors on a l'égalité de courants dans $\mathcal{D}^{1,1}(X)$:

$$\mathrm{dd^c}[\log|f|^2] = \sum m_j \delta_{Z_j}.$$

Autrement dit, les cycles de la forme $\operatorname{div} f$ possèdent un courant de Green. Mieux, celui-ci est en fait donné par une forme différentielle sur $X \setminus \bigcup_j Z_j$.

Idée de démonstration. On montre d'abord le cas où $X = \mathbb{C}$ et $f = z$.

Soient φ une fonction lisse et $\varepsilon > 0$. En appliquant deux fois le théorème de Stokes, on a :

$$\begin{aligned}\int_{|z|=\varepsilon} \log|z|^2 \bar{\partial}\varphi &= \int_{|z|\geq\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\, \mathrm{d}\bar{z} + \int_{|z|\geq\varepsilon} \log|z|^2 \partial\bar{\partial}\varphi \\ &= \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\varphi(z)\mathrm{d}z}{z} + \int_{|z|\geq\varepsilon} \log|z|^2 \partial\bar{\partial}\varphi\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Cauchy, on obtient comme voulu

$$\partial\bar{\partial}[\log|z|^2](\varphi) = [\log|z|^2](\partial\bar{\partial}\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z|\geq\varepsilon} \log|z|^2 \partial\bar{\partial}\varphi = -2i\pi\varphi(0)$$

On se ramène du cas général à ce cas particulier en remarquant que, dans un voisinage U d'un point de Z_j, la fonction f s'écrit $f(w) = g(w)w_1^{m_j}$ avec g holomorphe sans zéro. Alors

$$\mathrm{dd^c}[\log|f|^2] = m_j \mathrm{dd^c}[\log|w_1|^2] = m_j \delta_{\{w_1=0\}} = m_j \delta_{Z_j \cap U}.$$

□

Théorème 2.9. *Soit X une variété complexe, que l'on suppose kählérienne. Alors tout sous-ensemble analytique $Z \subseteq X$ possède un courant de Green.*

Si g_1 et $g_2 \in \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X)$ sont deux courants de Green pour Z, alors

$$g_1 - g_2 = [\eta] + \partial S + \bar{\partial} T$$

pour η une forme différentielle et S, T des courants de degré approprié.

De plus, le courant de Green pour Z peut être choisi de la forme $[g]$, avec g une forme différentielle lisse sur $X \setminus Z$. On appellera forme de Green *une telle forme.*

À propos de la démonstration. L'existence et la formule d'unicité ne sont pas très difficiles à démontrer, et découlent de la théorie de Hodge et du lemme $\partial\bar{\partial}$. La seconde partie en revanche, est très technique mais sera cruciale dans la suite. □

Exemple 2.10. Soient $X = \mathbb{C}^2$ et $Z = \{0\}$. On peut montrer, via la formule de Bochner-Martinelli [GH78] que

$$g = \frac{1}{2\pi} \log(|z_1|^2 + |z_2|^2) \frac{(z_1\mathrm{d}z_1 - z_2\mathrm{d}z_2) \wedge (\bar{z}_1\mathrm{d}\bar{z}_1 - \bar{z}_2\mathrm{d}\bar{z}_2)}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2}$$

vérifie $\mathrm{dd^c}[g] = \delta_0$ autrement dit $[-g]$ est un courant de Green pour Z.

2.4 Le $*$-product de courants de Green

De la même manière qu'on ne peut pas multiplier deux distributions, il est impossible de définir un produit extérieur entre deux courants. En revanche, on peut multiplier un courant par une forme différentielle de la manière suivante :

Définition 2.11. Soient $T \in \mathcal{D}^{p,q}(X)$ et $\alpha \in A^{p',q'}(X)$. Alors on définit $T \wedge \alpha \in \mathcal{D}^{p+p',q+q'}(X)$ par

$$(T \wedge \alpha)(\eta) = T(\alpha \wedge \eta)$$

Définition 2.12. Soient $Y, Z \subseteq X$ deux sous-ensembles analytiques, de codimension respective p et q, tels que $Z \nsubseteq Y$.

1. Soit $g_Y \in A^{p-1,p-1}(X \setminus Y)$ une forme de Green pour Y, notons $i \colon Z \hookrightarrow X$ l'inclusion. On définit le courant $[g_Y] \wedge \delta_Z \in \mathcal{D}^{p+q-1,p+q-1}(X)$ par

$$[g_Y] \wedge \delta_Z = i_*[i^* g_Y]$$

2. Soient g_Y une forme de Green pour Y et g_Z un courant de Green pour Z. On définit alors le $*$-product $[g_Y] * g_Z \in \mathcal{D}^{p+q-1,p+q-1}(X)$ par

$$[g_Y] * g_Z = [g_Y] \wedge \delta_Z + g_Z \wedge \omega_Y$$

   Ici ω_Y est la forme différentielle telle que $\mathrm{dd^c}[g_Y] + \delta_Y = [\omega_Y]$.

Théorème 2.13. *Soient Y, Z, g_Y, g_Z comme précédemment, on suppose de plus que Y et Z s'intersectent proprement. Dans ce cas $[Y] \cdot [Z]$ est défini comme un élément de $Z^{p+q}(X)$ (voir (3)), et on a*

$$\mathrm{dd^c}([g_Y] * g_Z) + \delta_{[Y]\cdot[Z]} = [\omega_Y \wedge \omega_Z]$$

Autrement dit, $[g_Y] * g_Z$ est un courant de Green pour $Y \cdot Z$.

Motivation pour le théorème. Si on oublie un instant qu'on a affaire a des courants, et qu'on calcule comme avec des formes différentielles, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{dd^c}(g_Y * g_Z) &= \mathrm{dd^c}(g_Y \wedge \delta_Z + g_Z \wedge \omega_Y) \\
&= \mathrm{dd^c} g_Y \wedge \delta_Z + \mathrm{dd^c} g_Z \wedge \omega_Y \qquad \text{car } \omega_Y \text{ et } \delta_Z \text{ sont fermées} \\
&= (\omega_Y - \delta_Y) \wedge \delta_Z + (\omega_Z - \delta_Z) \wedge \omega_Y \\
&= \omega_Y \wedge \omega_Z - \delta_Y \wedge \delta_Z
\end{aligned}$$

Cependant il faut garder à l'esprit que ce calcul ne fait pas sens mathématiquement, et est juste là pour motiver le théorème.

On termine cette partie en s'intéressant aux propriétés de ce $*$-product, et à la manière de le définir entre deux courants de Green arbitraires.

Notons $\widetilde{A}^{p,q}(X) = A^{p,q}(X)/(\operatorname{Im}\partial + \operatorname{Im}\bar{\partial})$ et similairement pour $\widetilde{\mathcal{D}}^{p,q}(X)$.

Proposition 2.14. *Soient Y, Z comme précédemment. Soient g_Y, h_Y deux formes de Green pour Y telles que $[g_y] = [h_y]$ dans $\widetilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X)$. Soient g_Z, h_Z vérifiant les mêmes hypothèses pour Z. Alors $[g_Y] * [g_Z] = [h_Y] * [h_Z]$ dans $\widetilde{\mathcal{D}}^{p+q-1,p+q-1}(X)$.*

Cela nous permet la définition suivante :

Définition 2.15. Soient Y, Z comme précédemment, soient g_Y et g_Z deux courants de Green pour Y et Z respectivement. D'après le théorème 2.9, il existe une forme de Green h_Y pour Y, et ce même théorème nous dit qu'il existe une forme η telle que $g_Y = [h_Y + \eta]$ dans $\widetilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X)$.

On définit alors le $*$-product entre courants par

$$g_Y * g_Z = [h_Y + \eta] * g_Z \in \widetilde{\mathcal{D}}^{p+q-1,p+q-1}(X)$$

Théorème 2.16. *Le $*$-product, ainsi défini entre courants de Green généraux, et à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{D}}$, est commutatif et associatif.*

3 Groupes de Chow et produit d'intersection arithmétiques

On utilise la notion de courant de Green pour présenter les objets de la théorie d'intersection arithmétique de [GS90]. On pourra aussi voir à ce sujet [Sou+92] et [Bos91].

Dans la suite, on fixe X une variété arithmétique, c'est-à-dire un schéma régulier, projectif, plat [8] sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. On notera $X(\mathbb{C})$ la variété complexe obtenue en considérant les points complexes de X.

3.1 Groupes de Chow arithmétiques

Définition 3.1. On définit pour $p \in \mathbb{N}$, le groupe abélien des cycles arithmétiques :

$$\widehat{Z}^p(X) = \{(Z, g) \in Z^p(X) \oplus \widetilde{D}^{p-1,p-1}(X(\mathbb{C})) \mid g \text{ courant de Green pour } Z(\mathbb{C})\}$$

La formule de Poincaré-Lelong nous dit que si $i\colon Y \hookrightarrow X$ est un sous-schéma de codimension $p-1$, et $r \in k(Y)^*$, alors $(\operatorname{div}(r), -i_*[\log |r|^2])$ est un élément de $\widehat{Z}^p(X)$. On le note $\widehat{\operatorname{div}}(r)$.

Définition 3.2. On note $\widehat{R}^p(X)$ le sous-groupe de $\widehat{Z}^p(X)$ engendré par les cycles de la forme $\widehat{\operatorname{div}}(r)$, et $\widehat{CH}^p(X) = \widehat{Z}^p(X) \big/ \widehat{R}^p(X)$ le p-ème *groupe de Chow arithmétique.*

Exemple 3.3.

— Il n'y a pas de courants de Green pour $[X] \in Z^0(X)$, donc $\widehat{CH}^0(X) \simeq \mathrm{CH}^0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

8. L'adjectif régulier est une hypothèse technique qui permet de s'assurer que X est "suffisamment ressemblant à un schéma sur un corps". L'adjectif projectif signifie que X peut-être vu comme un sous-schéma d'un espace projectif, elle implique en particulier que $X(\mathbb{C})$ est kählérienne.

— Montrons que l'application $a\colon \mathbb{R} \to \widehat{CH}^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})$, qui à x associe $[(0,x)]$, est un isomorphisme.

$(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})(\mathbb{C})$ est un singleton, et $\{p\}(\mathbb{C})$ est vide. Un courant de Green pour $\{p\}$ est donc juste un nombre réel, ainsi

$$\widehat{Z}^1(X) = \left\{ \left(\sum n_p \cdot p, x \right) \,\middle|\, n_p \in \mathbb{Z} \text{ presque tous nuls}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $Z = (\sum n_p \cdot p, x) \in \widehat{Z}^1(X)$, alors il est rationnellement équivalent à

$$Z - \widehat{\operatorname{div}}\left(\prod p^{n_p}\right) = \left(0, x + \sum n_p \log |p|^2\right),$$

ce qui montre la surjectivité de a.

Pour l'injectivité, si $(0,x) \sim (0,0)$, il existe $r = \varepsilon \prod p^{n_p} \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $(0,x) = \widehat{\operatorname{div}}(r) = \left(\sum n_p \cdot p, -\log |r|^2\right)$. Un tel r vérifie alors $n_p = 0$ pour tout p, donc $r = \pm 1$ et $x = -\log |r| = 0$.

3.2 Fonctorialité

Théorème 3.4. *Soient X et Y deux variétés arithmétiques, et soit $f\colon X \to Y$ un morphisme.*

1. *Supposons que f soit plat, alors pour tout p il existe un morphisme de tiré en arrière $f^*\colon \widehat{CH}^p(Y) \to \widehat{CH}^p(X)$.*
2. *Supposons que f soit propre, et que f induise une application lisse $X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$. Notons $d = \dim X - \dim Y$. Alors pour tout p il existe un morphisme de poussé en avant $\widehat{CH}^p(X) \to \widehat{CH}^{p-d}(Y)$*

Idée de démonstration. La construction rigoureuse de ces fonctorialités présente des difficultés techniques. Heuristiquement, ces opérations sont définies par les formules suivantes :

1. $f^*[(Z,[g])] = [(f^*(Z),[f^*g])]$, où $f^*(Z)$ est le pullback de cycles défini en 1.4 et f^*g est le pullback classique de formes différentielles.
2. $f_*[(Z,g)] = [(f_*Z, f_*g)]$, où f_*Z est le pushforward de cycle défini en 1.6, et où f_*g est le pushforward de courants, défini en 2.6.

□

3.3 Degré arithmétique et produit d'intersection

Définition 3.5. Notons π la projection $X \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et $n+1$ la dimension de X, de sorte que $\dim X - \dim \operatorname{Spec}\mathbb{Z} = n$. On appelle *degré arithmétique*, et on note $\widehat{\deg}$, la composée

$$\widehat{CH}^{n+1}(X) \xrightarrow{\pi_*} \widehat{CH}^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{R}$$

où l'isormorphisme est donnée par a^{-1} (voir l'exemple 3.3)

De plus on peut montrer que si $Z = (\sum_i n_i x_i, g) \in \widehat{CH}^{n+1}(X)$, alors

$$\widehat{\deg}(Z) = \sum_i n_i \log(\operatorname{Card} k(x_i)) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} g$$

Remarque. Si $r = \varepsilon \prod p^{v_p} \in \mathbb{Q}$, alors

$$\widehat{\deg}(\widehat{\operatorname{div}}\, r) = \widehat{\deg}\left(\sum v_p \cdot p, -\log |r|^2\right) = \sum n_p \log p - \log |r| = 0$$

par la formule du produit. On voit donc clairement ici que pour que le degré arithmétique puisse être défini, on a besoin de la contribution archimédienne des courants de Green : la partie uniquement algébrique ne possède pas à elle seule cette propriété d'invariance.

Théorème 3.6. *Il existe un produit d'intersection*

$$\widehat{CH}(X)^p_{\mathbb{Q}} \times \widehat{CH}^q(X)_{\mathbb{Q}} \to \widehat{CH}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$$

qui munit le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\widehat{CH}(X)_{\mathbb{Q}}$ est muni d'une structure multiplicative graduée et commutative, dont le neutre est $[(X, 0)] \in \widehat{CH}^0(X)$.

Si $Y, Z \subseteq X$ s'intersectent proprement et si g_Y, g_Z sont des courants de Green respectifs, alors on a

$$([Y], g_Y) \cdot ([Z], g_Z) = ([Y] \cdot [Z], g_Y * g_Z) \in \widehat{CH}^{p+q}(X)$$

De plus, les formules (1) et (2) sont également vérifiées.

À propos de la démonstration. La preuve de ce résultat est complexe et technique. La difficulté principale est que comme X est un schéma sur $\mathbb{Z}$, le lemme de déplacement 1.12 n'est plus valable. Ainsi on ne peut pas se ramener facilement du cas "intersection propre" au cas général. Les auteurs contournent cette difficulté en utilisant des constructions K-théoriques, et au prix de devoir tensoriser par $\mathbb{Q}$ (voir [GS87]).

L'autre difficulté majeure a déjà été évoquée dans la seconde partie : la définition du $*$-product de courants de Green nécessite le théorème 2.9 d'existence de courants de Green représentés par des formes différentielles, qui est également un résultat difficile. □

Références

[Ara76] S. J. ARAKELOV. « Intersection theory of divisors on an arithmetic surface ». In : *Mathematics of the USSR. Izvestiya* 8.6 (1976), p. 1167-1180.

[Bos91] J.-B. BOST. « Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques ». In : *Séminaire Bourbaki : volume 1990/91, exposés 730-744*. 1991, p. 43-88.

[Cho56] W.-L. CHOW. « On equivalence classes of cycles in an algebraic variety ». In : *Annals of Mathematics* 64 (1956).

[Dem12] J.-P. DEMAILLY. *Complex Analytic and Differential Geometry*. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf. 2012.

[Eis04] D. EISENBUD. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics 150. Springer New York, 2004.

[Fal83] G. FALTINGS. « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. » In : *Inventiones Mathematicae* 73 (1983), p. 349.

[Ful98] W. FULTON. *Intersection theory*. Springer New York, 1998.

[GH78] P. GRIFFITHS et J. HARRIS. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 1978.

[GS87] H. GILLET et C. SOULÉ. « Intersection theory using Adams operations ». In : *Inventiones mathematicae* 90 (1987), p. 243-277.

[GS90] H. GILLET et C. SOULÉ. « Arithmetic intersection theory ». In : *Publications Mathématiquesde l'IHÉS* 72 (1990), p. 93-174.

[Har77] R. HARTSHORNE. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer New York, 1977.

[Lel57] P. LELONG. « Intégration sur un ensemble analytique complexe ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 85 (1957), p. 239-262.

[Ser75] J.-P. SERRE. *Algèbre Locale, Multiplicités*. Lectures Notes in Mathematics 11. Springer Berlin Heidelberg, 1975.

[Sou+92] C. SOULÉ et al. *Lectures on Arakelov Geometry*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 33. Cambridge University Press, 1992.

[Vak18] R. VAKIL. *Foundations of algebraic geometry*. https://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf. 2018.