

---

# INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES CONDENSÉES

---

Joseph Leclere

21 octobre 2024

## ABSTRACT

Introduite par D. Clausen et P. Scholze en 2019, la théorie des mathématiques condensées fournit un cadre catégorique pour traiter des questions relevant de l'algèbre topologique. Dans cette note, on introduit les prérequis de topologie générale nécessaires à la construction des ensembles condensés et illustre les bases de la théorie à travers l'étude de la complétion.

## 1 Introduction

En théorie des catégories, on étudie les objets à travers les relations entre eux. On souhaite ici étudier un espace topologique  $T$  via  $\mathcal{C}(-, T)$ . La catégorie des objets-test peut être restreinte aux compacts Hausdorff. La catégorie des espaces compacts Hausdorff contient suffisamment d'objets projectifs, c'est la première étape pour faire de l'algèbre homologique. La catégorie des groupes abéliens topologiques ne dispose pas des mêmes propriétés algébriques que la catégorie des groupes abéliens.

D'une part, la catégorie des groupes abéliens topologiques n'est pas abélienne, illustré par la suite exacte suivante :

$$(\mathbb{R}, \text{discret}) \xrightarrow{Id} \mathbb{R}$$

qui admet un noyau et conoyau nuls sans être pour autant un isomorphisme.

D'autre part, la géométrisation de l'algèbre repose sur la notion de localisation. En algèbre commutative, les localisations  $A \rightarrow A[\frac{1}{f}]$  sont des morphismes plats qui permettent recoller des objets. Cette propriété fait défaut en général sur un espace analytique, pour les anneaux de fonctions  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ . Il n'existe pas en général de catégorie de modules quasicohérents sur un espace analytique.

Les groupes abéliens condensés forment alors une catégorie abélienne contenant les groupes abéliens topologiques.

Cette note s'intéresse ensuite à la complétion des groupes abéliens condensés, l'étude du foncteur double-dual sur les  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels permettra une justification de la définition des modules complets libres introduits dans [2]. Après avoir alors défini la catégorie  $\text{Solid}_{\mathbb{F}_p}$  des modules solides, on discute des exemples de calculs pratiques de produits tensoriels et une comparaison entre la complétion dérivée d'un objet libre et l'homologie singulière en ouverture.

La théorie des mathématiques condensées a permis à P. Scholze et D. Clausen de développer un formalisme des champs analytiques lors d'un cours donné en 2023-2024 à l'IHES. L'introduction des champs analytiques donne un nouveau regard sur les comparaisons entre phénomènes algébriques et analytiques complexe, ils établissent les correspondances entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie de Betti via un isomorphisme entre les champs de Betti et de De Rham associés directement.

## 2 Catégorie des compacts Hausdorff et ensembles condensés

**Remarque.** *On fait le choix de travailler dans un cadre où on fait abstraction de tous les problèmes ensemblistes qui sont normalement nécessaires pour rendre correctes les constructions. En effet, la collection de tous les compacts Hausdorff ne forme pas un ensemble, cela pose des problèmes théoriques de définir des faisceaux sur une grosse catégorie, on perd notamment l'existence automatique de la faisceautisation qui est assez cruciale. Pour y remédier, les constructions sont conduites en se restreignant à la catégorie des compacts Hausdorff de cardinal borné par un cardinal fortement inaccessible donné.*

**Définition 1.** Un objet  $X$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est projectif si  $\text{Hom}(X, A) \twoheadrightarrow \text{Hom}(X, B)$  pour tout épimorphisme  $A \twoheadrightarrow B$ .

**Définition 2.** Un ensemble extrêmement discontinu est un objet projectif de la catégorie des espaces compacts Hausdorff.

La preuve du lemme suivant nécessite l'introduction de la compactification de Stone-Cech.

**Définition 3.** La compactification de Stone-Cech  $S(X)$  d'un espace topologique  $X$  est défini comme le compact initial parmi les compacts Hausdorff munis d'une application  $X \rightarrow K$ . Son existence est garantie par la construction suivante, à savoir l'adhérence de l'image de  $Y$  dans  $\prod_{Y \rightarrow K} K$  qui est compact par le théorème de Tychonoff. On restreint l'ensemble d'indices aux compacts de cardinal inférieur ou égal à celui de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  pour rendre la définition correcte.

**Lemme 2.1** (Résolutions projectives). Pour tout  $X$  compact Hausdorff, il existe un ensemble  $S$  extrêmement discontinu muni d'une surjection continue vers  $X$ .

*Démonstration.* La propriété universelle de la compactification de Stone-Cech fournit la flèche suivante.

$$\begin{array}{ccc} X^{disc} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ S(X^{disc}) & & \end{array}$$

$S(X^{disc})$  est en fait extrêmement discontinu. On se donne une surjection  $A \twoheadrightarrow B$  et une application continue  $S(X^{disc}) \rightarrow B$ . Cela revient à se donner une application  $X^{disc} \rightarrow B$  qui admet un relèvement ensembliste à  $A$  qui est automatiquement continu pour  $X^{disc}$  discret. Par la propriété universelle, on obtient alors un relèvement continu  $S(X^{disc}) \rightarrow A$ .

Ainsi,  $X$  est dominé par un extrêmement discontinu  $S(X^{disc})$ . □

**Lemme 2.2.** Un compact Hausdorff  $S$  est extrêmement discontinu si et seulement pour tout ouvert  $U \subset S$ ,  $\bar{U}$  est encore ouvert.

*Démonstration.* Soit  $F = S \setminus U$ ,  $F \cup \bar{U} \rightarrow S$  admet une section  $s$  et  $s^{-1}(\bar{U}) = \bar{U}$  alors que le facteur  $\bar{U}$  en tant que facteur direct et un ouvert de  $F$ .  $\bar{U}$  est donc un ouvert de  $S$ . □

**Lemme 2.3** (Recouvrements par des extrêmement discontinus). Soit  $S$  extrêmement discontinu et  $R \subset S$  fermé, alors  $R$  est également extrêmement discontinu.

L'ensemble des familles conjointement surjectives forme un précouvreur dans la catégorie des ensembles extrêmement discontinus.

*Démonstration.* — Avec la première définition, soit  $U \subset R$  ouvert, il existe un ouvert  $U'$  de  $S$  tel que  $U' \cap R = U$ . Comme  $R$  est fermé,  $\bar{U}^R = \bar{U}' \cap R$  qui est un ouvert de  $R$  puisque  $U'$  est ouvert.

Avec la seconde définition, soit  $S' \twoheadrightarrow R$ ,  $U := S \setminus R$ , on peut former :

$$S' \coprod \bar{U} \twoheadrightarrow S$$

qui admet une section  $\iota$ , la composée  $R \hookrightarrow S \xrightarrow{\iota} S'$  donne une section.

— Soit  $(S_i \xrightarrow{f_i} S)$  conjointement surjective et  $R \xrightarrow{S}$ ,

Par la propriété précédente,  $R_i := g^{-1}(f_i(S_i))$  et  $f_i(S_i)$  sont extrêmement discontinus.

En particulier,  $S_i \xrightarrow{f_i} (S_i)$  admet une section  $\iota_i$  et alors,

$$g|_{R_i} \text{ se factorise en } R_i \xrightarrow{g} f_i(S_i) \xrightarrow{\iota_i} S_i \xrightarrow{f_i} f_i(S_i).$$

□

**Définition 4.** Soient  $\mathcal{CHaus}$  la catégorie des espaces compacts Hausdorff et  $\text{ExtDisc}$  la catégorie des espaces extrêmement discontinus. On les munit respectivement de la topologie dont les recouvrements sont donnés par les familles finies d'applications continues conjointement surjectives.

**Theorem 2.4** (Critère pour être un faisceau sur les différents sites). — *Sur le site extrêmement discontinu, un pré-faisceau  $\mathcal{F}$  est un faisceau si et seulement si pour toute famille finie  $(S_i)_I$ ,  $\mathcal{F}(\coprod_{i \in I} S_i) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(S_i)$ .*  
— *Sur CHaus, un préfaisceau  $\mathcal{F}$  est un faisceau si et seulement si :*  
— *Pour toute famille finie  $(S_i)_I$ ,  $\mathcal{F}(\coprod_{i \in I} S_i) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(S_i)$ .*  
— *Pour  $S' \twoheadrightarrow S$ ,  $T(S) \xrightarrow{\sim} eq(T(S') \xrightarrow{p_1^*, p_2^*} T(S' \times_S S'))$ .*

*Démonstration.* La propriété de faisceau peut se résumer aux deux types de recouvrements suivants auxquels on s'intéressera :

- Type 1 : Le crible engendré par  $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$  finie avec  $\coprod_{i \in I} S_i \xrightarrow{\sim} S$ .
- Type 2 : Le crible engendré par les surjections  $(S' \twoheadrightarrow S)$ .

Pour un crible de type 1 engendré par  $(S_i \rightarrow S)$ , le produit fibré  $S_i \times_S S_j$  existe dans les deux catégories puisqu'il vaut  $S_i$  si  $i = j$ , et  $\emptyset$  sinon.

Lorsque les produits fibrés existent, la propriété de faisceau se résume à vérifier l'égalité suivante :

$$\mathcal{F}(S) = eq\left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}(S_i) \xrightarrow{p_1^*, p_2^*} \prod_{i, j} \mathcal{F}(S_i \times_S S_j)\right)$$

Ici, les deux flèches dans l'égaliseur sont données par l'identité et donc,  $\mathcal{F}(\coprod_{i \in I} S_i) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(S_i)$ .

La différence entre les deux sites apparait pour tester la propriété de faisceau relativement aux recouvrements de type 2.

- Si on regarde un crible couvrant engendré par un singleton  $(S' \twoheadrightarrow S)$  sur le site extrêmement discontinu, toute application vers  $S$  se factorise par  $S'$  en composant par un inverse à droite.

La propriété de faisceau est donc vérifiée automatiquement pour tout préfaisceau.

- Lorsqu'on regarde le site CHaus, il admet tous les produits fibrés et on est dans le cas plus simple où la propriété de faisceau engendrée par  $(S' \twoheadrightarrow S)$  se reformule par :

$$T(S) = eq(T(S') \xrightarrow{p_1^*, p_2^*} T(S' \times_S S'))$$

□

**Theorem 2.5** (Equivalence des sites). *L'inclusion  $\text{ExtDisc} \subset \text{CHaus}$  induit par restriction une équivalence de catégories :*

$$\text{Sh}(\text{CHaus}) \xrightarrow{\sim} \text{Sh}(\text{ExtDisc})$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur CHaus,  $S \in \text{CHaus}$ ,

Par la compactification de Stone-Cech, il existe des surjections  $X \twoheadrightarrow S$ ,  $Y \twoheadrightarrow X \times_S X$  depuis des extrêmement discontinus.

Le critère pour la propriété de faisceau sur CHaus du théorème précédent entraîne que il y a une bijection :

$$\mathcal{F}(X \times_S X) \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathcal{F}(Y) \mid p_1^*(x) = p_2^*(x)\}$$

Ainsi, l'application  $\mathcal{F}(X \times_S X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$  est injective puisqu'elle se factorise par :

$$\mathcal{F}(X \times_S X) \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathcal{F}(Y) \mid p_1^*(x) = p_2^*(x)\} \xrightarrow{\subset} \mathcal{F}(Y)$$

Ainsi, on sait par le théorème précédent sur CHaus que  $\mathcal{F}(S) = eq(\mathcal{F}(X) \xrightarrow{p_1^*, p_2^*} \mathcal{F}(X \times_S X))$  et l'égalisateur ne change pas en composant à droite par l'injection  $\mathcal{F}(X \times_S X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ , ie :

$$\mathcal{F}(S) = (\mathcal{F}(X) \xrightarrow{p_1^*, p_2^*} \mathcal{F}(Y))$$

Un faisceau sur CHaus est donc uniquement déterminé par ses valeurs sur le site extrêmement discontinu. □

On peut ainsi définir les ensembles condensés de deux manières équivalentes.

**Définition 5.** *On appelle  $\text{CondEns}$  la catégorie des faisceaux d'ensembles sur CHaus ou sur ExtDisc indifféremment. On définit  $\text{CondAb}$  la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur ces mêmes catégories.*

**Lemma 2.6.** *En tant que catégorie de faisceaux,  $CondAb$  est une catégorie abélienne muni d'un produit tensoriel. La catégorie des groupes abéliens topologiques compactement engendrés forment une sous-catégorie pleine de  $CondAb$ .*

Le point de départ des mathématiques condensées était un formalisme permettant d'étendre la catégorie des espaces topologiques où l'algèbre homologique se comporterait mieux, c'est ce qu'on regarde pour commencer.

Pour un espace topologique  $T$ , on cherche à l'étudier via l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans  $T$  pour des sources variables.

**Lemma 2.7.** *Le foncteur  $\underline{T} : S \in CHaus \rightarrow \mathcal{C}(S, T) \in Ens$  définit un faisceau d'ensembles.*

*Démonstration.* Puisque les surjections entre des compacts Hausdorff sont des applications quotients, on a :

$$\mathcal{C}(S, T) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{C}(S' \times_S S', T) \mid p_1^*(f) = p_2^*(f)\}$$

□

Les deux approches présentent chacune leurs avantages et désavantages :

- Les propriétés générales et structurelles des ensembles condensés, ainsi que les constructions futures sont guidées par le fait qu'on peut calculer toutes les opérations catégoriques point par point en évaluant sur un extrêmement discontinu.
- La catégorie des groupes abéliens condensés est générée par les modules libres  $\mathbb{Z}[S]$  pour  $S$  extrêmement discontinu qui sont compacts projectifs.

On peut donc ramener un certain nombre de questions théoriques aux groupes abéliens libres.

- Le grand désavantage est l'absence de tractabilité pratique des extrêmement discontinus puisqu'on ne connaît pas d'espace usuel qui le soit en dehors des ensembles finis discrets.

Pour donner un exemple d'application, on va démontrer que la catégorie  $CondAb$  admet les colimites quelconques et qu'elles sont calculées point par point.

**Lemma 2.8.** *Soit  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  un système d'éléments de  $CondAb$ , le préfaisceau colimite des  $\mathcal{F}_i$  sur le site extrêmement discontinu est en fait un faisceau.*

*Démonstration.* En raison du critère pour qu'un préfaisceau sur le site extrêmement discontinu soit un faisceau, Soient  $S, T$  extrêmement discontinu,

$$(\text{colim}_i \mathcal{F}_i)(S \coprod T) = \text{colim}_i (\mathcal{F}_i(S \coprod T)) = \text{colim}_i (\mathcal{F}_i(S) \times \mathcal{F}_i(T)) = \text{colim}_i (\mathcal{F}_i(S) \oplus \mathcal{F}_i(T)) = (\text{colim}_i \mathcal{F}_i(S)) \times (\text{colim}_i \mathcal{F}_i(T))$$

où on a échangé librement la somme directe  $\oplus$  et  $\times$  puisque la catégorie des objets en groupes abéliens d'une catégorie de faisceaux est abélienne. L'intérêt de cet échange est de justifier comment sortir le produit direct d'une colimite quelconque.

□

Justifions également le deuxième point puisqu'il s'agit d'une des briques essentielles de la théorie.

**Définition 6.** *Pour un ensemble condensé  $X$ , on appelle  $\mathbb{Z}[X]$  l'image de  $X$  par l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $CondAb \rightarrow CondEns$ .*

*Pour  $S \in CHaus$ , il est donné par la faisceautisation de  $T \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{C}(T, S)]$ .*

**Lemma 2.9.** *Pour  $S \in ExtDisc$ ,  $\mathbb{Z}[S]$  est un objet compact projectif de  $CondAb$ .*

*Démonstration.* Par adjonction, pour  $M \in CondAb$ ,

$$\text{Hom}_{CondAb}(\mathbb{Z}[S], M) = \text{Hom}_{CondEns}(\underline{S}, M) = M(S)$$

En vertu du lemme précédente, le foncteur  $\text{Hom}_{CondAb}(\mathbb{Z}[S], -)$  commute à toutes les colimites : la commutation aux colimites filtrantes correspond à sa compacité tandis que la commutation aux colimites finies correspond à sa projectivité. □

**Lemma 2.10.** *Une suite courte de groupes abéliens condensés  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  est exacte si et seulement si pour tout  $S \in ExtDisc$ ,  $0 \rightarrow A(S) \rightarrow B(S) \rightarrow C(S) \rightarrow 0$  est exacte en tant que groupes abéliens.*

### 3 Double-dual et complétion

#### 3.1 Correspondance explicite dans le cas classique

Pour motiver le point de départ des mathématiques solides, on propose une construction plus ancienne et une plus moderne de la complétion d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{F}_p$ .

Avec  $\mathcal{C} = Vect_{\mathbb{F}_p}$ , on établira en suivant [1] qu'il y a un isomorphisme entre les foncteurs  $\mathcal{C} \xrightarrow{(-)^{**}} \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C} \xrightarrow{\widehat{(-)}} \mathcal{C}$  de complétion profinie.

On utilisera le point de vue suivant sur la complétion profinie utilisée dans l'article, il y a un isomorphisme  $V \in \mathcal{C}$ ,  $\widehat{V} \xrightarrow{\sim} \lim_{\leftarrow v} F_v$  où  $v = (F_v, \phi)$  parcourt les paires d'un groupe fini  $F_v$  avec une surjection  $V \xrightarrow{\phi} F_v$ , appelées des approximations finies de  $V$ .

Cette description est plus appropriée pour construire explicitement l'isomorphisme entre les deux foncteurs. On regarde la complétion profinie comme étant donnée par la construction de droite dans le reste de cette section.

**Lemma 3.1.** *Il existe un morphisme de comparaison  $\widehat{V} \rightarrow V^{**}$  donné par :*

$$(x_v) \rightarrow (f \in V^* \rightarrow x_{v_f})$$

où  $x_{v_f}$  désigne l'approximation finie de  $V$  donnée par  $f$ .

*Démonstration.* On doit vérifier que la fonction ainsi définie est effectivement linéaire.

Soit  $V \xrightarrow{\phi=(f,g)} \mathbb{F}_p^2$ , les compatibilités entre approximations donnent :

$$x_{v_{f+\lambda g}} = (p_1 + \lambda p_2)(x_\phi) = p_1(x_\phi) + \lambda p_2(x_\phi) = x_{v_f} + \lambda x_{v_g}.$$

□

**Theorem 3.2.** *Pour tout  $V \in \mathcal{C}$ , le morphisme précédent  $\widehat{V} \rightarrow V^{**}$  définit un isomorphisme.*

*Démonstration.*

— Injectivité : Soit  $x \in \widehat{V}$ , on suppose que  $\forall f \in V^*, x_{v_f} = 0$ ,

Soit  $v = (\mathbb{F}_p^n, \phi)$  une approximation finie de  $V$  et  $p_i : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p$  les  $n$  projections canoniques, on a :  $p_i(x_v) = x_{v_{p_i \circ \phi}} = 0$  par hypothèse pour chaque  $i$ , et donc  $x_v = 0$ .

— Surjectivité : Soit  $\Theta \in V^{**}$ , on souhaite trouver un  $x \in \widehat{V}$  tel que pour tout  $f \in V^*, x_{v_f} = \Theta(f)$ .

Pour  $v = (\mathbb{F}_p^n, \phi)$  une approximation finie de  $V$ ,  $p_i$  les projections canoniques, le candidat se doit d'être nécessairement donné par  $x_v = (\Theta(p_i \circ \phi))_{i=1}^n$ .

Il s'agit de vérifier que ces données sont compatibles pour définir effectivement un antécédent dans  $\widehat{V}$ .

On suppose qu'on prend  $v = (\mathbb{F}_p^n, \phi)$  et  $w = (\mathbb{F}_p, \psi)$  avec un morphisme d'approximations finies  $\phi \xrightarrow{u} \psi$  (on peut supposer avoir juste  $\mathbb{F}_p$  à l'arrivée, quitte à composer avec les différentes projections si  $w$  avait  $\mathbb{F}_p^n$  comme arrivée).

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{F}_p^n & \xrightarrow{p_i} & \mathbb{F}_p \\ & \searrow \psi & \downarrow u & \nearrow \lambda_i & \\ & & \mathbb{F}_p & & \end{array}$$

Il suffit alors d'appliquer  $\Theta$  à la ligne du dessus ou la trajectoire du dessous pour avoir la compatibilité.

□

#### 3.2 Approche catégorique

On s'intéresse désormais brièvement à un point de vue topologique sur cette dualité.

On a une équivalence  $Vect^{fd}(\mathbb{F}_p) \xrightarrow{(-)^*} Vect^{fd}(\mathbb{F}_p)$ .

La catégorie des  $k$ -espaces vectoriels discrets est équivalente à  $Ind(Vect^{fd}(\mathbb{F}_p))$ , on combine alors cette équivalence avec la dualité précédente :

$$\begin{array}{ccc} Vect^{fd}(\mathbb{F}_p)^{op} & \xrightarrow{\widehat{(-)}} & Vect^{fd}(\mathbb{F}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Vect(\mathbb{F}_p)^{op} & \xrightarrow{\widehat{(-)}} & Pro(Vect^{fd}(\mathbb{F}_p)) \end{array}$$

Il y a une dualité entre les  $k$ -espaces vectoriels discrets et les  $k$ -espaces vectoriels profinis.

## 4 Anneaux analytiques et catégorisation de la notion de complétion

### 4.1 Application de l'approche double-dual dans le cadre condensé

La catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels condensés est générée par les modules condensés libres  $\mathbb{F}_p[S]$  pour  $S$  profini, on s'intéresse alors dans ce cas à ce que produit topologiquement le double-dual.

**Définition 7.** Pour deux groupes abéliens condensés  $A, B$ , on dénote  $\underline{Hom}(A, B)$  le faisceau associé au préfaisceau  $(S \in CHaus \rightarrow Hom(A(S), B(S)))$ . Il est appelé le *Hom enrichi de A vers B*.

Il existe une adjonction Hom-tenseur dans ce cas avec le  $\underline{Hom}$  et le produit tensoriel condensé.

**Lemma 4.1.** Soient  $A, B, C$  des groupes abéliens condensés, il existe un isomorphisme naturel :

$$Hom(A \otimes B, C) \xrightarrow{\sim} Hom(A, \underline{Hom}(B, C))$$

**Theorem 4.2.** Soit  $S$  un ensemble profini, on se donne une présentation  $S = \lim_{\leftarrow} S_i$ , on a alors :

$$\underline{Hom}(\mathbb{F}_p[S], \mathbb{F}_p) = \varinjlim C(S_i, \mathbb{F}_p)$$

Il s'agit d'un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel discret, dont le dual topologique est :

$$\underline{Hom}(\varinjlim C(S_i, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \underline{Hom}(C(S_i, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p)$$

De plus,  $C(S_i, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p^{S_i}$  fini et discret.

Ainsi,  $\underline{Hom}(\underline{Hom}(\mathbb{F}_p[S], \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p)$  est profini.

*Démonstration.* Déjà, sans souligner le Hom, on a par définition que  $Hom(\mathbb{F}_p[S], \mathbb{F}_p) = C(S, \mathbb{F}_p)$  et puisque  $S$  est profini et  $\mathbb{F}_p$  est fini, toute application doit se factoriser à travers l'un des  $S_i$ , ie :  $C(S, \mathbb{F}_p) = \varinjlim C(S_i, \mathbb{F}_p)$ .

Ensuite, sur les  $T$ -points pour un ensemble profini  $T$ , on a désormais :

$$\begin{aligned} Hom(\mathbb{F}_p[S \times T], \mathbb{F}_p) &= C(S \times T, \mathbb{F}_p) \\ &= C(T, C(S, \mathbb{F}_p)) \\ &= C(T, \varinjlim C(S_i, \mathbb{F}_p)) \end{aligned} \tag{1}$$

où l'équation 2 découle de l'adjonction Hom-tenseur pour la topologie compacte-ouverte puisque  $T, S$  sont Hausdorff.  $\square$

La construction précédente pour  $S = \lim_{\leftarrow} S_i$  associée à l'objet libre  $\mathbb{F}_p[S]$  le module profini  $\mathbb{F}_p[S]^\blacksquare := \lim_{\leftarrow} \mathbb{F}_p[S_i]$ , c'est notre candidat de module complet libre généré par  $S$ .

**Remarque.** En fait, on peut montrer que pour  $S$  profini,  $\mathbb{F}_p[S]^\blacksquare$  est isomorphe à  $\prod_I \mathbb{F}_p$  pour un unique cardinal  $I$ , où le cardinal  $I$  est tel que  $C(S, \mathbb{F}_p) = \bigoplus_I \mathbb{F}_p$ .

## 4.2 Introduction de la notion d'anneau analytique

Nous avons désormais un choix naturel pour les modules libres complets sur  $\mathbb{F}_p$ , on peut définir les modules solides.

**Définition 8.** La catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -modules solides  $\text{Solid}_{\mathbb{F}_p}$  est définie comme étant la plus petite sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}_{\mathbb{F}_p}(\text{CondAb})$  stable par extensions et (co)limites contenant  $\mathbb{F}_p[S]^\blacksquare$  pour tout  $S$  profini.

**Theorem 4.3.** La catégorie  $\text{Solid}_{\mathbb{F}_p}$  est abélienne et ses objets sont exactement les  $M \in \text{Mod}_{\mathbb{F}_p}(\text{CondAb})$  tels que :

$$\forall S \in \text{ProFin}, \underline{\text{Hom}}(\mathbb{F}_p[S]^\blacksquare, M) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\mathbb{F}_p[S], M)$$

**Définition 9.** L'inclusion  $\text{Solid}_{\mathbb{F}_p} \hookrightarrow \text{Mod}_{\mathbb{F}_p}(\text{CondAb})$  admet un adjoint à gauche appelé la solidification, noté  $(-)^{\blacksquare}$ .

La solidification du produit tensoriel  $- \otimes -$  sur  $\text{CondAb}$  munit  $\text{Solid}_{\mathbb{F}_p}$  d'un produit tensoriel tel que l'inclusion ci-dessus soit symétrique monoïdale, dénoté  $- \otimes^{\blacksquare} -$ .

**Lemma 4.4.** Pour le produit tensoriel solide,  $\prod_I \mathbb{F}_p \otimes^{\blacksquare} \prod_J \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \prod_{I \times J} \mathbb{F}_p$ .

*Démonstration.* On cherche des ensembles profinis  $S, S'$  tels que  $\mathbb{F}_p[S]^\blacksquare = \prod_I \mathbb{F}_p$  et  $\mathbb{F}_p[S']^\blacksquare = \prod_J \mathbb{F}_p$ .

Ensuite, par construction,  $\mathbb{F}_p[S]^\blacksquare \otimes^{\blacksquare} \mathbb{F}_p[S']^\blacksquare = (\mathbb{F}_p[S] \otimes \mathbb{F}_p[S'])^\blacksquare$

Or,  $\mathbb{F}_p[S] \otimes \mathbb{F}_p[S'] = \mathbb{F}_p[S \times S']$ .

Justifions alors que le cardinal indexant le produit de copies de  $\mathbb{F}_p$  dans  $\mathbb{F}_p[S \times S']^\blacksquare$  est bien  $I \times J$ .

Par l'adjonction Hom-tenseur pour la topologie compacte-ouverte,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(S \times S', \mathbb{F}_p) &= \mathcal{C}(S, \mathcal{C}(S', \mathbb{F}_p)) \\ &= \mathcal{C}(S, \bigoplus_J \mathbb{F}_p) \\ &= \bigoplus_J \mathcal{C}(S, \mathbb{F}_p) \\ &= \bigoplus_J \bigoplus_I \mathbb{F}_p. \end{aligned}$$

□

**Remarque.** La même définition peut être faite mutatis mutandis en remplaçant  $\mathbb{F}_p$  par  $\mathbb{Z}$  et fournit la catégorie  $\text{Solid}$  des modules solides. On se permettra de l'utiliser par la suite dans les exemples qui seront plus clairs en travaillant relativement à  $\mathbb{Z}$  qu'à  $\mathbb{F}_p$ .

**Remarque.** En fait, la notion plus générale d'anneau pré-analytique est la donnée d'un anneau condensé de base  $A$  et de la donnée d'objets  $\mathcal{A}[S]$  pour tout  $S \in \text{ExtDisc}$  considérés comme complets libres relativement à  $A$ . Pour qu'il soit analytique, on requiert des conditions techniques pour que la catégorie résultante possède les mêmes propriétés que  $\text{Solid}_{\mathbb{F}_p}$ . On souhaite au final que les modules  $\mathcal{A}$ -complets soient encore les  $A$ -modules  $M$  pour lesquels  $\text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(A[S], M)$ .

## 4.3 Applications computationnelles

Soit  $l$  différent de  $p$ , nous allons décrire  $\mathbb{Z}_l \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$  algébriquement.

- D'un point de vue topologique, le premier facteur induit une topologie  $l$ -adique tandis que le second facteur induit une topologie  $p$ -adique sur le produit tensoriel.

La topologie induite est donc la topologie grossière, aucun point n'est distinguable. Sa complétion en tant que groupe topologique sera donc nulle.

- Cependant, nous allons montrer que

$$\mathbb{Z}_l \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$$

est loin d'être nul :

$\mathbb{Z}_p$  est  $\mathbb{Z}$ -plat, donc en particulier à partir de l'injection  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_l$ , on déduit  $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$  et inversement aussi que  $\mathbb{Z}_l \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ .

En regardant la multiplication par  $q \neq p$  sur le facteur  $\mathbb{Z}_p$ , on en déduit que la multiplication par  $q$  sur  $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$  est un isomorphisme et en particulier que  $\mathbb{Q}_l \subset \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ .

Pour conclure, non seulement  $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \neq 0$  mais il contient une copie de  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mathbb{Q}_l$  respectivement.

— Quelles propriétés un produit tensoriel doit vérifier pour rendre ce produit nul ?

Un autre point de vue sur  $\mathbb{Z}_p$  est de le définir comme  $\mathbb{Z}[[T]]/(T-p)$ .

Dans ce cas, on va voir pourquoi la nullité du produit tensoriel complété se ramène à la propriété correspondante sur les séries formelles.

On suppose qu'on a un produit tensoriel  $\otimes^\blacksquare$  tel que  $\mathbb{Z}[[T]] \otimes^\blacksquare \mathbb{Z}[[U]] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[[T, U]]$ .

Alors, sous cette hypothèse,  $\mathbb{Z}_p \otimes^\blacksquare \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[[T, U]]/(T-p, U-l) = \mathbb{Z}_p[[U]]/(U-l) = 0$  puisque  $U-l$  est désormais inversible dans  $\mathbb{Z}_p[[U]]$ .

— En tant que groupe abélien topologique,  $\mathbb{Z}[[T]] \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ .

Ainsi,  $\mathbb{Z}[[T]] \otimes^\blacksquare \mathbb{Z}[[U]] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[[T, U]]$  se traduit par  $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \otimes^\blacksquare \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ , à savoir la commutation du produit tensoriel à certaines limites.

C'est en fait la propriété qu'il manquait dans l'approche la plus directe et naïve amenant à supposer la nullité de  $\mathbb{Z}_p \otimes^\blacksquare \mathbb{Z}_l$  :

$$\lim_n \mathbb{Z}/p^n \otimes^\blacksquare \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\sim} \lim_n \mathbb{Z}_l/p^n = 0$$

• Critiques du bon comportement des solides :

Autour de  $(\mathbb{F}_p[t], t\text{-adique})$

La solidification a un comportement proche de la complétion naïve pour des objets qui étaient presque complets et de bonnes propriétés algébriques, mais un plus grand gap se crée sur des objets peu complets à la base et conserve davantage d'information.

En définissant  $\mathbb{N} \cup \infty$  comme ayant la topologie engendrée par les  $[n, +\infty[ \cup \{\infty\}$  pour  $n \geq 0$ ,  $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \infty]$  est le  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel condensé représentant les suites convergentes.

**Lemma 4.5.** *Il existe un isomorphisme de  $\mathbb{F}_p$ -algèbres condensées  $(\mathbb{F}_p[\mathbb{N} \cup \infty]/\mathbb{F}_p[\infty])_\blacksquare \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[[T]]$ .*

*Démonstration.*

— Justifions dans un premier temps qu'il représente les suites convergeant vers 0.

Pour un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel topologique  $A$ ,

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p[\mathbb{N} \cup \infty]/\mathbb{F}_p[\infty], A) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{N} \cup \infty, A) \mid \lim_n f = 0\}$$

— Par construction, la solidification d'un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel condensé est le conoyau de la solidification d'une présentation par des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels condensés libres :

$$\text{Ainsi, } (\mathbb{F}_p[\mathbb{N} \cup \infty]/\mathbb{F}_p[\infty])_\blacksquare \xrightarrow{\sim} \text{coker}(\mathbb{F}_p[\infty]_\blacksquare \rightarrow \mathbb{F}_p[\mathbb{N} \cup \infty]_\blacksquare).$$

Par ailleurs, en vertu de la description topologique  $\mathbb{N} \cup \infty \xrightarrow{\sim} \lim_n ([0, n] \cup \infty)$ , il s'ensuit que :

$$\mathbb{F}_p[\mathbb{N} \cup \infty] \xrightarrow{\sim} \lim_n \mathbb{F}_p[t]/(t^n) \oplus \mathbb{F}_p[\infty] \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[[t]] \oplus \mathbb{F}_p[\infty]$$

□

On dispose ainsi désormais des outils pour étudier un exemple de solidification un peu pathologique qui échappe pour le moment.

**Lemma 4.6.** [3] *La solidification de  $(\mathbb{F}_p[t], t\text{-adique})$  est un facteur direct de  $\mathbb{F}_p[[t]]$ .*

*Démonstration.* On part de la suite courte de groupes abéliens condensés suivante :

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_p[\mathbb{N} \cup \infty]/\mathbb{F}_p[\infty] \rightarrow (\mathbb{F}_p[t], t\text{-adique}) \rightarrow \mathbb{F}_p[[t]]$$

Après solidification, elle induit :

$$\mathbb{F}_p[[t]] \rightarrow (\mathbb{F}_p[t], t\text{-adique})_\blacksquare \rightarrow \mathbb{F}_p[[t]]$$

dont la composition vaut l'identité sur  $\mathbb{F}_p[[t]]$ .

Le noyau de la seconde flèche induit donc un facteur direct de  $\mathbb{F}_p[[t]]$  dans  $(\mathbb{F}_p[t], t\text{-adique})_\blacksquare$ .

□

Il est inconnu à ce jour à priori si le facteur direct est strict ou non, aussi bien topologiquement que pour le groupe abélien sous-jacent.

## 5 Homologie singulière et complétion

Pour finir en illustrant par un exemple les méthodes utilisées dans les preuves en mathématiques condensées, on va montrer l'identification suivante en justifiant avec autant de détails que possible.

**Définition 10.** *Un complexe  $M \in \mathcal{D}(\text{Solid})$  est pseudocohérent s'il est quasi-isomorphe à un complexe borné à droite dont les termes sont de la forme  $\bigoplus_{i \in I} P_i$  où  $I$  est un ensemble fini et  $(P_i)_I$  sont des objets compacts projectifs de  $\text{Solid}$ .*

**Theorem 5.1.** *Soit  $S$  un CW-complexe, il y un isomorphisme :*

$$\mathbb{Z}[S]^{L^\blacksquare} \xrightarrow{\sim} H_\bullet(S)$$

*Démonstration.*

- La formation des deux côtés commute aux colimites filtrantes :
  - $(-)^{L^\blacksquare}$  est l'adjoint à gauche de l'inclusion de  $\mathcal{D}(\text{Solid})$  dans  $\mathcal{D}(\text{CondAb})$ , il commute donc aux colimites.
  - Le foncteur  $S \in \text{CHaus} \rightarrow \mathbb{Z}[S] \in \text{CondAb}$  commute aux colimites filtrantes : la formation du groupe libre sur un faisceau l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli des faisceaux abéliens vers les faisceaux, il commute donc aux colimites et il reste à montrer que la formation  $S \rightarrow \underline{S}$  commute aux colimites filtrantes.

Pour ce faire, on se donne un système  $(S_i)_{i \in I}$ , et  $T \in \text{CHaus}$ , on veut montrer que :

$$\mathcal{C}(T, \text{colim}_i S_i) \xrightarrow{\sim} \text{colim}_i \mathcal{C}(T, S_i)$$

On se donne  $f : T \rightarrow \text{colim}_i S_i$ , son image est un compact de  $\text{colim}_i S_i$  qui vit donc dans un des  $S_i$  pour  $i$  assez grand.

- Par exactitude des colimites filtrantes dans  $\mathcal{D}(\text{Ab})$ , le foncteur  $S \rightarrow H_\bullet(S)$  commute aux colimites filtrantes.
- On peut donc se restreindre au cas où  $S$  est un CW-complexe fini pour déduire l'isomorphisme.

Désormais, l'étape suivante est de montrer que sous cette hypothèse les deux membres de l'équation sont des objets pseudocohérents de  $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$  :

- Comme  $S$  est compact Hausdorff, on va pouvoir construire un début de résolution finie de longueur arbitraire de  $\mathbb{Z}[S]^{L^\blacksquare}$  de la façon suivante.

Il existe un extrêmement discontinu  $T_0 \rightarrow S$ , puis un  $T_1 \rightarrow T_0 \times_S T_0, \dots$  qui fournissent un quasi-isomorphisme :

$$(\dots \rightarrow \mathbb{Z}[T_n] \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}[T_0]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[S]$$

Alors, par définition,

$$\mathbb{Z}[S]^{L^\blacksquare} \xrightarrow{\sim} (\dots \rightarrow \mathbb{Z}[T_n]^\blacksquare \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}[T_0]^\blacksquare)$$

$\mathbb{Z}[S]^{L^\blacksquare}[S]$  est donc isomorphe à un complexe borné à droite dont les termes sont compacts projectifs

C'est donc dire qu'il s'agit d'un complexe pseudocohérent, ie :  $\text{Ext}^i(\mathbb{Z}[S]^{L^\blacksquare}, -)$  commute aux colimites filtrantes.

- $H_\bullet(S)$  est un complexe pseudocohérent.
- La dernière étape est de montrer que  $\text{RHom}(-, \mathbb{Z})$  est pleinement fidèle sur  $\text{PCoh}$  et que leur image par ce foncteur est identique :
  - Soit  $S$  compact Hausdorff, on verra que  $\text{RHom}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(S, \mathbb{Z})$  où le terme de droite correspond à la cohomologie des faisceaux sur  $S$  pour le coefficient constant  $\mathbb{Z}$ .
  - D'autre part, comme  $\mathbb{Z}$  est solide, on a :

$$\text{RHom}(\mathbb{Z}[S]^{L^\blacksquare}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{RHom}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z})$$

Ainsi, comme pour les CW-complexes finis, la cohomologie singulière est égale à la cohomologie du faisceau constant égal à  $\mathbb{Z}$ , on en déduit l'identification  $\mathbb{Z}[S]^{L^\blacksquare} \xrightarrow{\sim} H_\bullet(S)$  sous réserve de la pleine fidélité de  $\text{RHom}(-, \mathbb{Z})$  sur  $\text{PCoh}(\text{Solid})$ .

- Comment justifier la pleine fidélité ?

Les objets de  $\text{PCoh}(\text{Solid})$  sont quasi-isomorphes à des complexes bornés à droite  $\dots \rightarrow \bigoplus_{k_n} \prod_{I_n} \mathbb{Z} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{k_0} \prod_{I_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$  et chaque  $\prod_I \mathbb{Z}$  est envoyé sur  $\bigoplus_I \mathbb{Z}$ .

- Comment justifier l'identification de la cohomologie condensée et de la cohomologie des faisceaux ?

On ne détaillera pas la preuve, mais cela découle du fait que le morphisme naturel  $\mathcal{D}^+(Sh(X, Ab)) \xrightarrow{\lambda^*} \mathcal{D}^+(\text{CondAb}_{\underline{X}})$  est pleinement fidèle.

La preuve de sa pleine fidélité résulte du fait que la cohomologie commute aux colimites filtrantes dans les topos cohérents pour se ramener au cas géométrique où  $X = \{*\}$ .

□

## Références

- [1] Colas Bardavid Profinite completion and double-dual : isomorphisms and counter-examples.  
[arXiv preprint arXiv :0801.2955](#), 2008.
- [2] Peter Scholze, Dustin Clausen, Lectures on Analytic Geometry  
<https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf>, 2019.
- [3] Nataniel Marquis, Notes pour les mathématiques condensées
- [4] Mattias Ferreira, Notes du CIRM