Analyse microlocale sur les groupoïdes

Lucas Lemoine

Table des matières

1 Introduction

Dans la théorie des équations aux dérivées partielles, il a été nécessaire de généraliser la notion d'opérateurs différentiels, avec l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels qui peuvent avoir un ordre qui n'est pas entier. Cette algèbre s'est avérée très utile à de multiples reprises, en particulier les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques sur une variété différentielle compacte peuvent être étendus en opérateurs de Fredholm, et on peut donc leur associer un indice (différence des dimensions du noyau et du conoyau). Atiyah et Singer ont montré dans leur célèbre article [AS63] que cet indice de prime abord de nature analytique peut-être calculé uniquement à l'aide d'invariants topologiques.

Dans [Con90] Connes a donné une nouvelle preuve de ce théorème, avec l'utilisation des groupoïdes, que l'on peut considérer comme une généralisation des groupes avec plusieurs éléments neutres, et notamment du groupoïde tangent associé à une variété. Plus tard, Nistor, Weinstein et Xu ont construit dans [NWX99] une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels sur les groupoïdes de Lie. Avant eux, Monthubert et Pierrot ont généralisé dans [MP97] la méthode de Connes pour construire un indice analytique sans opérateurs pseudo-différentiels. Un des avantages de construire un calcul pseudo-différentiel sur des groupoïdes est de généraliser de nombreuses constructions sur des variétés singulières comme ce qui avait été fait par exemple par Nistor [Nis96] et Connes [Con90] qui ont généralisé le théorème de l'indice à des variétés feuilletées, mais nous ne rentrerons pas plus en détail concernant les feuilletages. Similairement, Melrose dans [Mel81] a décrit une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés à bord, que l'on peut retrouver comme l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur le bon groupoïde [vEY19].

En effet, les groupoïdes permettent de désingulariser certaines variétés, dans le sens où différentes variétés singulières peuvent être décrites comme des groupoïdes de Lie. Par exemple, pour une variété fermée (compacte sans bord) on associe le groupoïde des paires, et les variétés à bord ou à coin sont des déformations de ces groupoïdes des paires.

Une fois les opérateurs pseudo-différentiels définis, les équations d'évolution nécessitent l'introduction d'une classe encore plus large d'opérateurs, les opérateurs intégraux de Fourier, comme définis par Hörmander et Duistermaat sur les variétés dans [Hör71], [Dui11] et [Hör09]. Plus récemment Lescure, Vassout et Manchon ont développé sur les groupoïdes de Lie un calcul Fourier intégral dans une série de trois articles [LMV17], [LV17] et [LV20]. Dans le premier, ils introduisent entre autres un produit de convolution entre distributions respectant certaines conditions sur les fronts d'ondes. C'est dans le deuxième article que les opérateurs intégraux de Fourier sont introduits, à l'aide de sous-variétés lagrangiennes respectant des conditions supplémentaires permettant d'avoir des opérateurs équivariant par rapport au produit du groupoïde, ce sont les G-relations.

Nous commencerons dans la partie 2 par définir les groupoïdes de Lie, en donnant de nombreux exemples qui seront aussi utilisés dans la suite. Dans la partie 3, on décrira l'algèbre des fonctions sur le groupoïde qui nous intéresse, qui sera une C^*-algèbre, avant de discuter d'un ensemble d'opérateurs qui se comporte convenablement avec la loi de multiplication du groupoïde. On aura ainsi tous les outils pour définir les opérateurs pseudo-différentiels dans la partie 4 et discuter de leur généralisation sur un groupoïde. Enfin dans la partie 5 nous décrirons les propriétés du groupoïde cotangent afin d'utiliser ses propriétés symplectiques nécessaires à la construction des opérateurs intégraux de Fourier. On terminera avec une petite perspective des problématiques actuelles autour du calcul intégral de Fourier sur les groupoïdes.

2 Groupoïdes de Lie

On commence donc par définir les groupoïdes en général, et on donne quelques exemples.

Définition 2.1. Un **groupoïde** G est la donnée d'un couple $(G^{(0)}, G^{(1)})$ où $G^{(0)}$ est l'ensemble des objets et $G^{(1)}$ l'ensemble des flèches, noté $G \rightrightarrows G^{(0)}$ et muni des applications :

— **source**, $s : G^{(1)} \to G^{(0)}$,
— **but**, $r : G^{(1)} \to G^{(0)}$,
— **multiplication**, $m : G^{(2)} := G^{(1)} \underset{s\ r}{\times} G^{(1)} \to G^{(1)}$, notée multiplicativement,
— **unité**, $u : G^{(0)} \to G^{(1)}$, section de r et de s,
— **inverse**, $i : G^{(1)} \to G^{(1)}$,

qui vérifient les conditions suivantes :

— $s \circ m = s \circ \mathrm{pr}_1$, $r \circ m = r \circ \mathrm{pr}_2$,
— m est associative,
— $\forall g \in G^{(1)}$, $u(r(g)).g = g = g.u(s(g))$,
— $s \circ i = r$, $r \circ i = s$,
— $\forall g \in G^{(1)},\ i(g).g = u(s(g)),\ g.i(g) = u(r(g))$.

On dira qu'un groupoïde G est un **groupoïde de Lie** si $G^{(0)}$ et $G^{(1)}$ ont des structures de variétés lisses, les applications s, r, m, u, i sont lisses et r, s sont des submersions. Dans ce cas, $G^{(2)}$ est une variété, i est un difféomorphisme et u est un plongement qui permet de voir $G^{(0)}$ comme une sous-variété de G.

Donnons maintenant quelques exemples de groupoïdes de Lie.

- Soit M une variété, $M \overset{id}{\underset{id}{\rightrightarrows}} M$ est un groupoïde de Lie, appelé le groupoïde trivial.
- Soit G un groupe de Lie agissant sur M une variété. Alors on définit le groupoïde de Lie $M \rtimes G \rightrightarrows M$ muni des applications de structure suivantes. Soient $g, g', x \in G \times G \times M$,
$$u(x) = (x, e), \quad s(x, g) = x, \quad r(x, g) = x.g, \quad (x.g, g') \cdot (x, g) = (x, gg'),$$
où e est le neutre de G.
- Un groupe de Lie G est un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows \{\cdot\}$. Plus généralement, un fibré de groupes de Lie $\pi : G \to M$ est un groupoïde de Lie $G \overset{\pi}{\underset{\pi}{\rightrightarrows}} M$.

Nous allons maintenant donner des exemples plus géométriques, c'est-à-dire des groupoïdes basés sur une variété.

- Soit M une variété. Le **groupoïde des paires** associé à M est $M \times M \rightrightarrows M$ muni des applications de structure suivantes. Soient $x, y, z \in M$,
$$u(x) = (x, x), \quad s(x, y) = y, \quad r(x, y) = x, \quad (x, y) \cdot (y, z) = (x, z).$$
- Soit M une variété à bord. On définit le **b-groupoïde** de Melrose comme
$$G_b := (\mathring{M} \times \mathring{M}) \sqcup (\partial M \times \partial M \times \mathbb{R}_+^*) \rightrightarrows M,$$
qu'on munit de la topologie suivante. Chaque terme de l'union est muni de sa propre topologie, et on dit que $(x_n, x_n') \in \mathring{M} \times \mathring{M}$ converge vers $(y, y', \lambda) \in \partial M \times \partial M \times \mathbb{R}_+^*$, si $x_n, x_n' \to 0$, $y_n, y_n' \to y, y'$ et $\frac{f(x_n)}{f(x_n')} \to \lambda$, où f est une fonction définissante du bord. Sa structure de groupoïde est celle de l'union.
- Soit M une variété, le **groupoïde tangent** de M est
$$\mathbb{T}M := (M \times M \times \mathbb{R}^*) \sqcup (TM \times \{0\}) \rightrightarrows M \times \mathbb{R},$$
avec $(x_n, y_n, t_n) \to (x, v, 0)$ si $x_n \to x$, $y_n \to x$ et $\frac{y_n - x_n}{t_n} \to v$ permet de lui donner une structure de groupoïde de Lie. On peut définir l'**action de zoom** α_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ telle que $\alpha_\lambda(x, y, t) = (x, y, t/\lambda)$ et $\alpha_\lambda(x, v, 0) = (x, \lambda v, 0)$. C'est un difféomorphisme de groupoïdes de Lie qui nous sera utile pour définir les opérateurs pseudo-différentiels.

On a utilisé dans ces exemples que l'on peut construire des réunions ou des produits de groupoïdes de Lie, mais on peut aussi en construire à l'aide de déformations. Nous ne rentrerons pas dans trop de détails en mentionnant seulement que le groupoïde tangent est un cas particulier de la déformation au cône normal de $M \times M$ par rapport à la diagonale.

3 Convolution et G-opérateurs

Commençons par définir les C^*-algèbres, qui sont des algèbres que l'on pourra associer à des groupoïdes pour généraliser l'algèbre (commutatives) des fonctions continues sur une variété compacte.

Définition 3.1. Soit A une algèbre de Banach munie d'une involution (application involutive, antilinéaire, antimultiplicative et isométrique). A est une C^*-algèbre si $\forall x \in A$, $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Comme dit précédemment, un exemple de C^*-algèbre commutative est l'algèbre des fonctions continues sur un espace topologique compact séparé muni de la norme sup, où l'involution est donnée par la conjugaison. Toutes les C^*-algèbres commutatives unifères sont en fait de cette forme, grâce à la transformation de Gel'fand. Un exemple non-commutatif est l'algèbre des opérateurs sur un espace hilbertien $\mathcal{L}(H)$ où l'involution est donnée par l'adjoint.

Soit maintenant G un groupoïde de Lie. Nous allons lui associer une C^*-algèbre. Pour f et $g \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on pose

$$f * g(\gamma) := \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f(\gamma_1)g(\gamma_2),$$

et

$$f^*(\gamma) := \overline{f(i(\gamma)}.$$

Remarque 3.2. Pour que l'intégrale soit bien définie, plutôt que des fonctions dans $\mathcal{C}_c^\infty(G)$, on prend les sections à support compact du fibré de demi-densités $\Omega^{\frac{1}{2}} := \Omega^{\frac{1}{2}}(\ker ds) \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}(\ker dr)$. Pour simplifie, on gardera dans la suite la notation $\mathcal{C}_c^\infty(G)$.

Il reste à définir une norme. On note $L^2(G)$ la complétion de $C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ par rapport à $\langle f_1, f_2\rangle = f_1^* * f_2$.
On définit maintenant $\pi : C_c^\infty(G, \Omega^{\frac{1}{2}}) \to \mathcal{L}(L^2(G))$ par

$$\pi(f_1)(f_2) = f_1 * f_2.$$

Définition 3.3. La C^*-algèbre réduite de G $C^*_{red}(G)$ est la complétion de $C_c^\infty(G)$ pour la norme $\|f\|_{min} := \|\pi(f)\|$.

On veut définir des opérateurs qui se comportent bien vis-à-vis de la convolution. La bonne notion est celle de G-opérateurs, qui agissent uniquement dans les fibres de s.

Définition 3.4. Un opérateur $P : C_c^\infty(G) \to C^\infty(G)$ continu linéaire est un **G-opérateur** si il existe des opérateurs $P_x : C_c^\infty(G_x) \to C^\infty(G_x)$ pour $x \in G^{(0)}$ tels que $\forall x \in G^{(0)}$, $\forall f \in C_c^\infty(G)$, et $\forall g \in G$,

$$P(f)|_{G_x} = P_x(f|_{G_x}), \qquad P_{s(g)} \circ R_g = R_g \circ P_{r(g)}.$$

On note Op_G l'ensemble des G-opérateurs.

On utilisera aussi une description équivalente de ces opérateurs qui clarifie leur bon comportement avec la convolution.

Proposition 3.5. *Soit $P : C_c^\infty(G) \to C^\infty(G)$ un opérateur continu linéaire. Alors c'est un G-opérateur si et seulement si $\forall f, g \in C_c^\infty(G)$,*

$$P(f * g) = P(f) * g.$$

En regardant le noyau des G-opérateurs, on remarque qu'ils s'identifient à des distributions dont le front d'onde n'intersecte pas $(\ker dr)^\perp \subset T^*G$. On appelle ces distributions les distributions **r-transverses**, et on les note $\mathcal{D}'_r(G)$.

Théorème 3.6. *Soit $P \in \mathrm{Op}_G$, on définit $k_P(g) := p_{r(g)}(r(g), g^{-1})$. Alors $k_P \in \mathcal{D}'_r(G)$ et induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Op}_G \simeq \mathcal{D}'_r(G).$$

Remarque 3.7. Si on était parti d'opérateurs qui agissent uniquement dans les fibres de r plutôt que celles de s, on aurait obtenu le résultat avec $\mathcal{D}'_r(G)$ remplacé par $\mathcal{D}'_s(G)$. Dans la suite, on demandera aux G-opérateurs de vérifier ces deux conditions, et on dira qu'ils sont **admissibles**.

On a vu qu'on peut convoler des fonctions, l'étape d'après est donc de convoler des distributions. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, c'est possible si on ajoute des conditions sur les fronts d'ondes. On note $\mathcal{E}'_a$ l'ensemble des distributions **admissibles**, les distributions à support compact r-transverses et s-transverses.

Théorème 3.8 (Convolution des distributions admissibles)**.** *Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{E}'_a(G)$. Alors, on peut définir $u_1 * u_2 \in \mathcal{E}'_a(G)$, et on a*

$$WF(u_1 * u_2) \subset WF(u_1) * WF(u_2),$$

où $WF(u_1) * WF(u_2) := m_\Gamma(WF(u_1) \times WF(u_2) \cap \Gamma^{(2)})$.

Ainsi la composition d'opérateurs admissibles donne un opérateur admissible et on ne considérera plus que des opérateurs de ce type.

4 Opérateurs pseudo-différentiels

Plaçons-nous un instant dans $\mathbb{R}^n$, et considérons un opérateur différentiel

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha,$$

où $m \in \mathbb{N}$ et les a_α sont des fonctions lisses. $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et on note $|\alpha| = \sum \alpha_i$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$. Notons alors

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \xi &\mapsto \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha, \end{aligned}$$

avec la même convention pour ξ^α.
Soit maintenant $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors à l'aide de la transformée de Fourier (puisque $\mathcal{F}(Pu) = p\mathcal{F}(u)$), on a l'égalité suivante :

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{e}^{i(x-y).\xi} p(\xi) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi.$$

À l'aide des intégrales oscillantes, on peut définir une classe plus large d'opérateurs de cette forme, les opérateurs pseudo-différentiels. Pour cela, commençons par définir les symboles dans un ouvert X de $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.1. On dit que $a \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$ est un symbole d'ordre $m \in \mathbb{R}$ et on note $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$ si pour tout compact K de X, pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x, \xi) \in X \times \mathbb{R}^n, \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqslant C \langle \xi \rangle^{m - |\alpha|},$$

où $\langle \xi \rangle \coloneqq \sqrt{1 + \xi^2}$.

Soit $a \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$, on note

$$I(a) \coloneqq \int \mathrm{e}^{i(x-y).\xi} \, a(x, y, \xi) \mathrm{d}\xi.$$

Alors la méthode de régularisation des intégrales oscillantes nous donne qu'on peut étendre I à une application continue $S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

On a maintenant tout le matériel nécessaire pour définir les opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.2. Soit $a \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$. On y associe un opérateur $\mathrm{Op}(a)$: $\mathcal{C}_c^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)$ dont le noyau est

$$K(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{e}^{i(x-y).\xi} \, a(x, y, \xi) \mathrm{d}\xi$$

et on notera $\Psi^m(X)$ l'ensemble des opérateurs de cette forme, les **opérateurs pseudo-différentiels** d'ordre m.

Une autre façon de définir les opérateurs pseudo-différentiels est d'utiliser le groupoïde tangent de Connes. Il l'a introduit dans [Con90] afin de faire une nouvelle démonstration du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [AS63]. Plus récemment, van Erp et Yuncken ont démontré dans [vEY19] qu'il est possible de définir les opérateurs pseudo-différentiels à partir du groupoïde tangent, en utilisant en particulier l'action de zoom α. On rappelle que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\alpha_\lambda(x, y, t) = (x, y, t/\lambda)$ et $\alpha_\lambda(x, v, 0) = (x, \lambda v, 0)$, et que $\mathcal{E}'_r(\mathbb{T}\, M)$ est l'ensemble des distributions à support compact dont le front d'onde n'intersecte pas $\ker(dr)^\perp$.

Théorème 4.3. *$P = Op(p)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}$ sur la variété M s'il existe $\mathrm{q} \in \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}\, M)$ tel que $\alpha_{\lambda *}\, \mathrm{q} - \lambda^m\, \mathrm{q} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}\, M)$ et $p = \mathrm{q}\,|_{t=1}$.*

Cette caractérisation permet aussi d'étendre la notion d'opérateurs pseudo-différentiels au cadre des groupoïdes, en utilisant non pas le groupoïde tangent mais le **groupoïde adiabatique** : $\mathbb{A}G \coloneqq (G \times \mathbb{R}^*) \sqcup (AG \times \{0\}) \rightrightarrows G \times \mathbb{R}$, où AG est l'algébroïde de Lie associée à G. L'algébroïde associée à un groupe de Lie est son algèbre de Lie, celle du groupoïde des paires est l'espace tangent. Elle est définie par $AG \coloneqq \bigsqcup_{x \in G^{(0)}} T_x(s^{-1}(x))$. Le sujet des algébroïdes de Lie est un sujet riche, par exemple, contrairement aux algèbres de Lie elle ne s'intégrent pas toutes en groupoïdes de Lie, mais nous ne rentreront pas dans les détails.

De la même façon que pour le groupoïde tangent, on peut associer au groupoïde adiabatique une structure de groupoïde de Lie ainsi qu'une action de zoom.

Pour définir les pseudo-différentiels sur G il suffit alors de répéter la proposition 4.3 en remplaçant $\mathbb{T}M$ par $\mathbb{A}G$. Grâce à la condition sur le front d'onde, on obtiendra bien de cette façon des G-opérateurs.

Par exemple, si on applique cette construction au b-groupoïde G_b, on retrouve les opérateurs pseudo-différentiels de Melrose [Mel81] pour une variété au bord, qui doivent respecter la condition d'être tangents au bord.

Il existe d'autres façons de définir les opérateurs pseudo-différentiels, nous citerons seulement Monthubert et Pierrot [MP97] et Nistor, Weinstein et Xu [NWX99] qui ont indépendamment utilisé les distributions conormales à la base. On peut se référer à [DS19] pour plus de détails.

On va voir dans la partie suivante 5 comment construire une notion d'intégrales de Fourier sur un groupoïde, qui contient les opérateurs pseudo-différentiels mais qui est une façon plus locale de construire ceux-ci.

5 Opérateurs intégraux de Fourier

Soit $G \rightrightarrows G^{(0)}$ un groupoïde. En différentiant toutes les applications de structure, on a une structure de groupoïde $TG \rightrightarrows TG^{(0)}$. Notre objectif est de décrire des lagrangiennes sur G, donc on voudrait définir le cotangent de ce groupoïde, mais la multiplication ne serait pas bien définie.

Pour cela, on doit prendre comme ensemble des objets le conormal à la base $N^*G^{(0)}$ tel que pour $x \in G^{(0)}$, $N_x^*G^{(0)} \coloneqq \{\xi \in T^*G \mid \forall X \in T_xG^{(0)},\ \langle \xi, X\rangle = 0\}$.

De plus, notons les isomorphismes de multiplication à gauche et à droite par $g \in G$ par

$$L_g : \begin{array}{ccc} G^{s(g)} & \to & G^{r(g)}, \\ h & \mapsto & gh \end{array} \qquad R_g : \begin{array}{ccc} G_{r(g)} & \to & G_{s(g)}, \\ h & \mapsto & hg \end{array}$$

où $G^y \coloneqq \{g \in G \mid r(g) = y\}$, et $G_x \coloneqq \{g \in G \mid s(g) = x\}$.

Définition 5.1. On définit le **groupoïde cotangent** $\Gamma = T^*G \rightrightarrows N^*G^{(0)}$ par les morphismes de structure suivants. Soient $(g_1,\xi_1),(g_2,\xi_2) \in T^*G$, $(x,\zeta) \in N^*G^{(0)}$. On pose $x = s(g_1)$ et on définit :

— L'unité $u_\Gamma(x,\zeta) = (u(x),\zeta) \in T^*G$ est l'inclusion,
— Pour $t + u \in T_xG^x \oplus T_xG^{(0)} = T_xG$, $s_\Gamma(\xi_1)(t+u) = {}^t d_x L_{g_1}(\xi_1)(t)$,
— Pour $t + u \in T_xG_x \oplus T_xG^{(0)} = T_xG$, $r_\Gamma(\xi_2)(t+u) = {}^t d_x R_{g_2}(\xi_2)(t)$,
— Quand $s_\Gamma(g_1,\xi_1) = r_\Gamma(g_2,\xi_2)$:
$m_\Gamma((g_1,\xi_1),(g_2,\xi_2)) = (g_1g_2, {}^t(d_{(g_1,g_2)}m)^{-1}(\xi_1,\xi_2))$,
— L'inverse $i_\Gamma(g_1,\xi_1) = (g_1^{-1}, -{}^t(d_{g_1}i)^{-1}\xi_1)$.

Une propriété importante du groupoïde cotangent est qu'il est muni d'une 2−forme symplectique ω telle que le graphe de la multiplication $\mathrm{Gr}(m_\Gamma) = \{(g,h,gh),\ (g,h) \in \Gamma^{(2)}\}$ est une sous-variété lagrangienne de $(\Gamma,\omega) \times (\Gamma,\omega) \times (\Gamma,-\omega)$. C'est le cas puisque par définition de m_Γ, $\mathrm{Gr}(m_\Gamma) = N^*\,\mathrm{Gr}(m)$.

On va maintenant définir les G-relations qui seront nécessaires à la définition des intégrales de Fourier.

Définition 5.2. Une sous-variété lagrangienne (locale) $\Lambda \subset T^*G \setminus \{0\}$ est appelée une **G-relation** (locale) si Λ est admissible (ses intersections avec $\ker(dr)^\perp$ et $\ker(ds)^\perp$ sont vides).
Une G-relation (locale) Λ est appelée une **G-relation en famille** (locale) si

$$m^*\Lambda := \left\{(g_1, g_2, \xi_1, \xi_2) \in T^*(G^{(2)}) \middle| \; \exists \xi \in \Gamma, \; {}^t d_{g_1,g_2} m(\xi) = (\xi_1, \xi_2), \; (g_1 g_2, \xi) \in \Lambda\right\}$$

est **transverse** à $\pi : G^{(2)} \to G^{(0)}$, c'est-à-dire que $\pi \circ p|_{m^*\Lambda}$ est une submersion, où p est la projection $T^*(G^{(2)}) \to G^{(2)}$.

D'après Hörmander [Hör71], si Λ est une sous-variété lagrangienne de $T^*G \setminus \{0\}$, pour tout $(x_0, \xi_0) \in \Lambda$ il existe $V \subset G \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ cône ouvert, et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(V)$ une fonction de phase non-dégénérée telle qu'au voisinage de (x_0, ξ_0), Λ soit paramétrée par φ. On rappelle rapidement ce qu'est une fonction de phase non-dégénérée ainsi que la lagragienne qu'elle paramètre.

Définition 5.3. Soit V un cône de $G \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(V)$.
On dit que φ est une **fonction de phase** si elle est 1-homogène sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, et $\forall (x,\theta) \in V, \; d_{(x,\theta)}\varphi \neq 0$.
On dit que φ est **non-dégénérée** sur V si $\forall (x, \theta) \in V, \; d_\theta \varphi(x, \theta) = 0 \Rightarrow$ $\left(d_{(x,\theta)} \partial_{\theta_j} \varphi(x, \theta)\right)_{j=1,\ldots,N}$ est libre. Dans ce cas, $C_\varphi := \{(x, \theta) \in V \mid d_\theta \varphi(x, \theta) = 0\}$ est une sous-variété conique de V.

Pour chaque fonction de phase non-dégénérée, on peut associer une sous-variété lagrangienne conique.

Proposition 5.4. *Soit φ une fonction de phase non-dégénérée sur V un cône de $G \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.*
On définit

$$\begin{aligned} T^{(\varphi)} : C_\varphi &\to T^*G \setminus \{0\} \\ (x, \theta) &\mapsto (x, d_x \varphi(x, \theta)). \end{aligned}$$

C'est une immersion, et son image est une sous-variété conique de dimension $\dim G$, *qu'on note Λ_φ.*

Pour une fonction de phase non-dégénérée $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(G \times \mathbb{R}^N)$ et un symbole $a \in S^m(G \times \mathbb{R}^N)$, on définit l'intégrale oscillante

$$I_\varphi(a) := \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{i\varphi(x,\theta)} \, a(x, \theta) d\theta.$$

Définition 5.5 (Intégrale de Fourier)**.** Soit Λ une variété conique lagrangienne immergée dans $T^*G \setminus \{0\}$.
Une **intégrale de Fourier** d'ordre m sur Λ est une distribution $A \in \mathcal{D}'(G)$ telle que $A = \sum A_j$ où $A_j \in \mathcal{D}'(G)$, avec $A_j = I_{\varphi_j}(a_j)$ et
- $(\operatorname{supp} A_j)_j$ localement fini,
- φ_j phase non-dégénérée sur Γ_j cône de $G \times \mathbb{R}^{N_j}$,
- $\operatorname{Im} T^{(\varphi_j)} \subset \Lambda$,
- $a_j \in S^{m + \frac{\dim G - 2N_j}{4}}(G \times \mathbb{R}^{N_j})$, $\operatorname{supp} a_j \subset \Gamma_j$.

On note $I^m(G,\Lambda)$ l'ensemble des intégrales de Fourier d'ordre m sur Λ.

Si deux fonctions de phase définissant la même lagrangienne, on peut trouver un symbole donnant la même intégrale oscillante (en conservant l'ordre du symbole), donc $I^m(G,\Lambda)$ est bien défini.

Pour le moment ce ne sont pas des G-opérateurs car leur front d'onde n'est pas adapté, c'est pour cela qu'on a besoin des G-relations.

Définition 5.6. Soit Λ une G-relation locale (en famille). Les distributions dans $I(G,\Lambda)$ sont appelées des **G-opérateurs intégraux de Fourier (en famille)**.

Puisque que le front d'onde des intégrales de Fourier est dans la sous-variété lagrangienne, on a $I(G,\Lambda) \subset \mathcal{D}'_a(G)$.

On énonce maintenant deux théorèmes qui permettent de montrer que ces G-opérateurs intégraux de Fourier ont des propriétés similaires à ceux plus familiers sur les variétés. On commence par la composition, où de la même façon que sur les variétés on demande que les lagrangiennes associées aux deux opérateurs aient un bon comportement l'une par rapport à l'autre.

Théorème 5.7 (Composition [LV17])**.** *Soient Λ_1, Λ_2 deux G-relations locales fermées, $A_1 \in I_c^{m_1}(G,\Lambda_1)$, $A_2 \in I_c^{m_2}(G,\Lambda_2)$.*
On suppose que $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ intersecte proprement $\Gamma^{(2)}$, avec excès e. Alors on peut définir le G-FIO

$$A_1.A_2 \in I^{m_1+m_2+\frac{e}{2}+\frac{2n^{(0)}-n}{4}}(G,\Lambda_1 * \Lambda_2),$$

où $\Lambda_1 * \Lambda_2 := m_\Gamma(\Lambda_1 \times \Lambda_2 \cap \Gamma^{(2)})$ est une G-relation.

Théorème 5.8 (Théorème d'Egorov)**.** *Soient $\Lambda, \Lambda' \subset T^*G \setminus \{0\}$ deux G-relations fermées convolables telles que $\Lambda * \Lambda', \Lambda' * \Lambda \subset A^*G \setminus \{0\}$.*
Alors,

$$I(G,\Lambda) * \Psi(G) * I(G,\Lambda') \subset \Psi(G).$$

En particulier, si A est un opérateur intégral de Fourier inversible, les lagrangiennes de A et A^{-1} vérifient la condition du théorème est l'ordre de l'opérateur pseudo-différentiel est conservé. La conjugaison donne ainsi un automorphisme de l'algèbre filtrée $\Psi^{\mathbb{Z}}(G) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Psi^m(G)$. Duistermaat et Singer ont prouvé dans [DS76] la réciproque, c'est-à-dire que tout automorphisme de $\Psi^{\mathbb{Z}}(M)$ (où M variété quelconque) en tant qu'algèbre filtrée est la conjugaison par un opérateur intégral de Fourier. Ce résultat est un exemple qui ne peut pas se généraliser à tous les groupoïdes puisque pour si G est un groupe, les G-opérateurs commutent donc la conjugaison est toujours triviale, alors qu'il existe des automorphismes non triviaux (voir [Jør78] pour le cas de $(\mathbb{R},+)$).

Une autre question concerne la définition des opérateurs intégraux de Fourier, celle présentée ici étant une restriction de celle d'Hörmander [Hör71]. On peut se demander si à l'image de [vEY19] il existe une déformation de groupoïde permettant de donner une autre caractérisation des opérateurs intégraux de Fourier.

Un sujet plus actif concerne les calculs sur des variétés singulières, dans l'idée du b-calcul de Melrose [Mel81]. En effet, dans la méthode de [vEY19] on peut modifier le groupoïde tangent pour qu'il s'adapte à d'autres situations. C'est ce qui a été fait par Cren et Ewert dans [Cre23] et [Ewe23] dans le cas des variétés filtrés. Il existe aussi des variantes du calcul intégral de Fourier, par exemple le SG calcul intégral de Fourier tel qu'introduit par Coriasco [Cor99] ou les opérateurs pseudo-différentiels de Shubin [Shu01]. Les objectifs sont multiples, par exemple il s'agit de trouver un groupoïde sur lequel la définition donnée ici des intégrales de Fourier et des opérateurs pseudo-différentiels donnent directement l'un de ces calculs, ou de trouver une déformation des bons groupoïdes et l'utilisation d'une bonne action de zoom (en parallèle avec le groupoïde tangent de Connes).

Références

[AS63] Michael F. Atiyah and Isadore M. Singer. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Am. Math. Soc.*, 69 :422–433, 1963.

[Con90] Alain Connes. *Géométrie non commutative.* Paris : InterEditions, 1990.

[Cor99] S. Coriasco. Fourier integral operators in SG classes. I : Composition theorems and action on SG Sobolev spaces. *Rend. Semin. Mat., Torino*, 57(4) :249–302, 1999.

[Cre23] Clément Cren. Filtered calculus and crossed products by r-actions, 2023.

[DS76] J. J. Duistermaat and I. M. Singer. Order-preserving isomorphisms between algebras of pseudodifferential operators. *Commun. Pure Appl. Math.*, 29 :39–47, 1976.

[DS19] Claire Debord and Georges Skandalis. Lie groupoids, pseudodifferential calculus, and index theory. In *Advances in noncommutative geometry*, pages 245–289. Cham : Springer, 2019.

[Dui11] J. J. Duistermaat. *Fourier integral operators.* Mod. Birkhäuser Classics. Basel : Birkhäuser, reprint of the 1996 ed. edition, 2011.

[Ewe23] Eske Ewert. Pseudodifferential operators on filtered manifolds as generalized fixed points. *J. Noncommut. Geom.*, 17(1) :333–383, 2023.

[Hör71] L. Hörmander. Fourier integral operators. I. *Acta Math.*, 127 :79–183, 1971.

[Hör09] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. IV : Fourier integral operators.* Class. Math. Berlin : Springer, reprint of the 1985 original, corr. 2nd printing edition, 2009.

[Jør78] Palle E. T. Jørgensen. The automorphisms of convolution algebras of C^∞ functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 64 :25–47, 1978.

[LMV17] Jean-Marie Lescure, Dominique Manchon, and Stéphane Vassout. About the convolution of distributions on groupoids. *J. Noncommut. Geom.*, 11(2) :757–789, 2017.

[LV17] Jean-Marie Lescure and Stéphane Vassout. Fourier integral operators on Lie groupoids. *Adv. Math.*, 320 :391–450, 2017.

[LV20] Jean-Marie Lescure and Stéphane Vassout. On evolution equations for lie groupoids. *arXiv preprint arXiv :2010.00227*, 2020.

[Mel81] Richard B. Melrose. Transformation of boundary problems. *Acta Math.*, 147 :149–236, 1981.

[MP97] Bertrand Monthubert and François Pierrot. Analytic index and Lie groupoids. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, 325(2) :193–198, 1997.

[Nis96] Victor Nistor. The index of operators on foliated bundles. *J. Funct. Anal.*, 141(2) :421–434, 1996.

[NWX99] Victor Nistor, Alan Weinstein, and Ping Xu. Pseudodifferential operators on differential groupoids. *Pac. J. Math.*, 189(1) :117–152, 1999.

[Shu01] M. A. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory. Transl. from the Russian by Stig I. Andersson.* Berlin : Springer, 2nd ed. edition, 2001.

[vEY19] Erik van Erp and Robert Yuncken. A groupoid approach to pseudodifferential calculi. *J. Reine Angew. Math.*, 756 :151–182, 2019.