

# Introduction au domaine de recherche : Trisection des variétés de dimension 4

Maya Kayali

sous la direction de Renaud Detcherry et Gwénaél Massuyeau

## 1 Introduction

Ce texte porte sur l'étude des variétés lisses de petite dimension. La première partie présente un aspect géométrique général de cette étude via les décompositions en anses. Puis on s'attarde sur deux constructions spécifiques à la dimension 3 et 4.

En dimension 3, il est possible de représenter toutes les variétés fermées orientées comme l'union de deux corps en anses recollés le long de leur bord via une certaine application. Cette décomposition est appelée scindement de Heegaard et tient son nom des travaux de Poul Heegaard menés à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle.

Pour la dimension 4, David Gay et Robinson Kirby introduisent la notion de trisection en 2016 [2]. Il s'agit d'une décomposition analogue aux scindements de Heegaard mais faisant cette fois-ci intervenir trois morceaux, tous difféomorphes à une somme connexe de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^3$ . Ils prouvent dans leur article l'existence et l'unicité (modulo une opération de stabilisation) d'une telle décomposition pour les variétés lisses fermées connexes orientées.

L'objectif de ce texte est de présenter les scindements de Heegaard, les trisections ainsi que leurs diagrammes. Il est accompagné de plusieurs exemples et de dessins pour aider à la visualisation.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Décomposition en anses</b>	<b>1</b>
2.1	Attachement d'anses . . . . .	1
2.2	Théorie de Mose et existence de la décomposition en anses . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Scindement de Heegaard et trisections</b>	<b>4</b>
3.1	Scindement de Heegaard des variétés de dimension 3 . . . . .	4
3.2	Trisection des variétés de dimension 4 . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Conclusion et questions ouvertes</b>	<b>11</b>
4.1	Formes d'intersection . . . . .	11
4.2	Application de recollements et groupe de difféotopie des surfaces . . . . .	12

## 2 Décomposition en anses

### 2.1 Attachement d'anses

L'intérêt des anses est de donner une décomposition des variétés selon des "briques élémentaires" plus simples à étudier. Il s'agit ici de "pièces" toutes homéomorphes à des boules, distinguées selon la partie de leur bord qui se recolle sur une autre variété à bord.

**Définition 2.1.1** (Anse). *Une  $k$ -anse de dimension  $n$  est une copie de  $\mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$  qui peut être attachée au bord d'une variété de dimension  $n$  par un plongement  $\varphi : \partial\mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k} \rightarrow \partial X$ .*

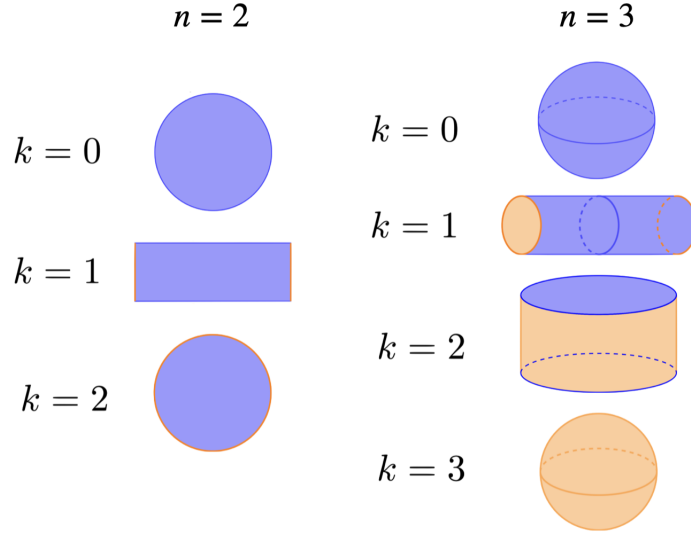


FIGURE 1 – Exemples d’anses en dimension 2 et 3. Les parties oranges indiquent celles qui sont recollées lors de l’attachement.

Dans la suite, on aura besoin de parler de somme connexe de variétés. Les principales définitions sont rappelées ci-dessous.

**Définition 2.1.2** (Somme connexe). *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés lisses orientées de dimension  $n$ . On note  $D_1$  (respectivement  $D_2$ ) un disque  $\mathbb{D}^n$  plongé dans  $X_1$  (respectivement dans  $X_2$ ). Soit un difféomorphisme  $\varphi : \partial D_1 \mapsto \partial D_2$  préservant l’orientation. La somme connexe  $X_1 \# X_2$  est la variété définie en retirant les intérieurs de  $D_1$  et  $D_2$  et en identifiant leurs bords via  $\varphi$ .*

$$X_1 \# X_2 = (X_1 \setminus \mathring{D}_1) \cup_{\varphi} (X_2 \setminus \mathring{D}_2)$$

Les disques  $D_1$ ,  $D_2$  et le difféomorphisme  $\varphi$  ne sont souvent pas précisés car la variété  $X_1 \# X_2$  est indépendante de ces choix (à difféomorphisme près). On utilisera également une variante de la somme connexe, à savoir la somme connexe le long du bord.

**Définition 2.1.3** (Somme connexe de bord). *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés à bord lisses orientées de dimension  $n$ . On note  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ) un disque  $\mathbb{D}^{n-1}$  plongé dans  $\partial X_1$  (respectivement dans  $\partial X_2$ ). Soit un difféomorphisme  $\varphi : \partial S_1 \mapsto \partial S_2$  préservant l’orientation. La somme connexe  $X_1 \#_{\partial} X_2$  est la variété définie en retirant les intérieurs de  $S_1$  et  $S_2$  et en identifiant leurs bords via  $\varphi$ .*

$$X_1 \#_{\partial} X_2 = (X_1 \setminus \mathring{S}_1) \cup_{\varphi} (X_2 \setminus \mathring{S}_2)$$

Ces deux somme connexes sont reliées par la propriété :

$$\partial(X_1 \#_{\partial} X_2) = \partial X_1 \# \partial X_2$$

On notera dans la suite

$$\begin{aligned} \#^m X &= X \# X \# \dots \# X \\ \#_{\partial}^m X &= X \#_{\partial} X \#_{\partial} \dots \#_{\partial} X \end{aligned}$$

**Définition 2.1.4** (Décomposition en anses). *Soit  $X$  une variété de dimension  $n$ , de bord  $\partial_- X \sqcup \partial_+ X$ . Une décomposition en anses de  $X$  est une suite*

$$X_0 = \partial_- X \sqcup H_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_{n-1} \subset X_n \simeq X$$

où  $H_0$  est une union disjointe de 0-anses et  $X_k$  est obtenu en attachant des  $k$ -anses sur  $X_{k-1}$ .

**Exemple 2.1.1** (Le tore  $\mathbb{T}^2$ ). *Le tore  $\mathbb{T}^2$  peut être vu comme l’union d’une 0-anse, deux 1-anses et une 2-anse (voir Figure 2)*

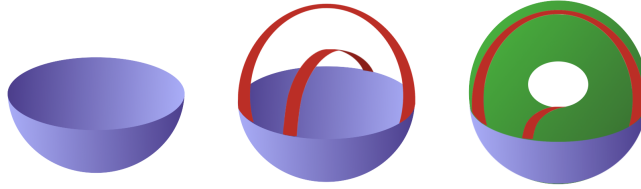


FIGURE 2 – Décomposition en anses de  $\mathbb{T}^2$

*Remarque 2.1.1* (Décomposition duale). Le sous-ensemble  $\mathbb{D}^k \times \{0\}$  d'une  $k$ -anse est appelé l'âme et le sous-ensemble  $\{0\} \times \mathbb{D}^{n-k}$  est appelé la co-âme. En inversant le rôle de l'âme et de la co-âme, une  $k$ -anse  $\mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$  recollée à  $X_k$  peut être vue comme une  $(n-k)$ -anse recollée à  $X \setminus X_k$ . Ce changement de point de vue peut se faire avec toutes les anses. On obtient ainsi la décomposition duale de  $X$ .

## 2.2 Théorie de Morse et existence de la décomposition en anses

Soit  $M$  une variété lisse. Ce paragraphe explique comment il est possible d'obtenir une décomposition en anses de  $M$  à partir d'une fonction de Morse.

**Définition 2.2.1** (Point critique). Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une application lisse. Un point critique de  $f$  est un point  $p \in M$  vérifiant  $d_p f = 0$ . Le point  $c = f(p)$  est appelé valeur critique de  $f$ . Le point  $p$  est dit non dégénéré si  $\det(\text{Hess}_f(p)) \neq 0$ .

**Définition 2.2.2** (Fonction de Morse). Une fonction de Morse est une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  pour laquelle les points critiques sont tous non dégénérés.

**Définition 2.2.3** (Indice d'un point critique). Soit  $p$  un point critique d'une fonction de Morse  $f$ . L'indice de  $p$  est le nombre de valeurs propres négatives de  $\text{Hess}_f(p)$ .

On peut montrer que pour toute variété  $M$ , l'ensemble des fonctions de Morse est dense dans  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Ce résultat assure l'existence des fonctions de Morse sur une variété quelconque (voir [5], chapitre 6, théorème 1.2).

Le résultat suivant est le principal outil de la théorie de Morse :

**Lemme 2.2.1** (lemme de Morse). Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse et  $p$  un point critique d'indice  $k$ . Il existe des coordonnées locales autour de  $p$  telles que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

On peut maintenant énoncer le théorème qui nous permet de construire une décomposition en anses à partir de l'étude des points critiques d'une fonction de Morse.

**Théorème 2.2.1** (Théorème principal de la théorie de Morse). Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse et  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Si  $[a, b]$  ne contient aucune valeur critique, alors

$$f^{-1}([a, b]) \cong f^{-1}(a) \times [a, b]$$

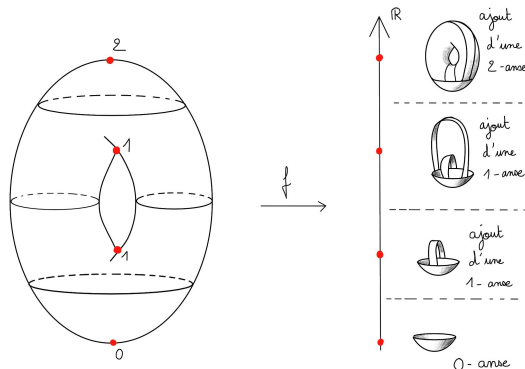
S'il existe un unique point critique d'indice  $k$  dans  $f^{-1}([a, b])$ , alors

$$f^{-1}([a, b]) \cong (f^{-1}(a) \times [a, a + \epsilon]) \cup h^k$$

où  $\epsilon > 0$  et  $h^k$  est une  $k$ -anse recollée sur  $f^{-1}(a) \times [a + \epsilon]$ .

Les points critiques d'une fonction de Morse nous apportent donc des informations sur les changements topologiques de la variété : il faut ajouter une anse à chaque passage d'un point critique. L'indice de l'anse à ajouter correspond à l'indice du point critique rencontré.

**Exemple 2.2.1.** On peut appliquer le théorème à la fonction hauteur sur le tore pour retrouver la décomposition en anses présentée plus haut :



L'existence des décompositions en anses découle alors de celle des fonctions de Morse. On peut également déduire du fait que les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés qu'une variété compacte admet une décomposition avec un nombre fini d'anses.

### 3 Scindement de Heegaard et trisections

#### 3.1 Scindement de Heegaard des variétés de dimension 3

On s'intéresse dans cette partie aux variétés de dimension 3. L'objectif est de décrire une façon de représenter leurs décompositions en anses. Dans la suite, la variété  $H_g := \#_{\partial}^g(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$  sera appelée un *corps en anses de genre  $g$* . Les  $g$  courbes simples, isotopiquement indépendantes dans le bord du corps en anses, bordant des disques de la forme  $\{p\} \times \mathbb{D}^2$  seront appelés ses *méridiens*.

**Définition 3.1.1** (Scindement de Heegaard). *Un scindement de Heegaard d'une variété  $M$  fermée orientée de dimension 3 est une décomposition  $M = M_1 \cup M_2$  telle que  $M_1$  et  $M_2$  sont difféomorphes à un corps en anses de genre  $g$  et  $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2$ .*

Un scindement de Heegaard peut donc être vu comme le recollement de deux corps en anses de genre  $g$  selon un difféomorphisme le long de leur bord. Les informations de ce recollement sont rassemblées sous la forme d'un diagramme.

**Définition 3.1.2** (Diagramme de Heegaard). *Un diagramme de Heegaard est un triplet de la forme  $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$  où  $\Sigma_g$  est une surface de genre  $g$  et  $\alpha, \beta$  sont des ensembles de  $g$  courbes simples fermées de  $\Sigma_g$  telles que les paires  $(\Sigma_g, \alpha)$  et  $(\Sigma_g, \beta)$  sont difféomorphes à la paire standard de la Figure 3.*



FIGURE 3 –  $(\Sigma_g, \beta)$  en position standard.

À partir du scindement de Heegaard d'une variété  $M$ , il est possible de retrouver une décomposition en anses. En effet, le premier corps en anse  $M_1$  peut être vu comme l'attachement de  $g$  1-anses sur une 0-anse, et le deuxième corps en anses  $M_2$  peut être interprété comme le recollement de  $g$  2-anses sur une 3-anse via la décomposition duale.

Cependant, la décomposition en anses d'une variété n'est pas unique. En particulier, il est possible d'annuler deux anses sous certaines conditions. Par exemple en dimension 3, une 2-anse peut venir annuler une 1-anse si sa sphère d'attachement (c'est-à-dire  $\partial \mathbb{D}^2 \times \{0\}$ ) coupe de façon transverse la ceinture de la 1-anse ( $\{0\} \times \partial \mathbb{D}^2$ ) en un unique point, comme montré sur la Figure 4.

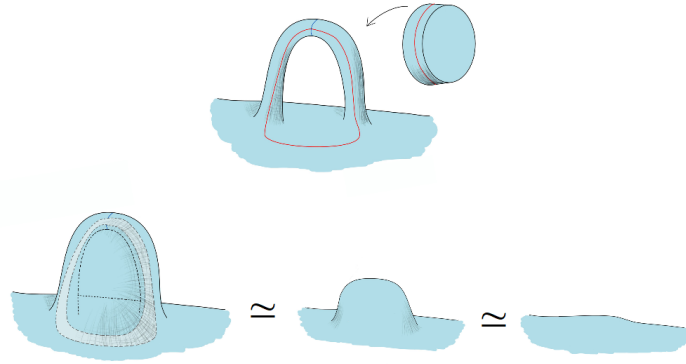


FIGURE 4 – Annulation d'une 1-anse par recollement d'une 2-anse en dimension 3.

Cette opération est appelée *stabilisation*. Le genre d'un scindement de Heegaard n'est donc pas défini de façon unique. La Figure 5 illustre la façon dont la stabilisation modifie le genre des corps en anses du scindement de Heegaard d'une variété  $M = M_1 \cup M_2$ . L'opération revient à ajouter une paire de 1-anse et 2-anse s'annulant mutuellement. On commence par choisir un arc  $a$  plongé dans  $M_2$ , avec  $\partial a \subset M_2$ , tel que  $a$  soit parallèle au bord, c'est-à-dire qu'il existe une isotopie fixant  $\partial a$  et envoyant  $a$  dans  $\partial M_2$ . On note  $\nu$  un voisinage tubulaire de  $a$ . On a alors  $\nu \cap M_1 = \mathbb{D}^2 \times \partial a$ . On définit enfin  $M'_1 = M_1 \cup \nu$  et  $M'_2 = M_2 \setminus \dot{\nu}$ . Topologiquement, la stabilisation revient à considérer la somme connexe de  $M$  avec  $\mathbb{S}^3$ .

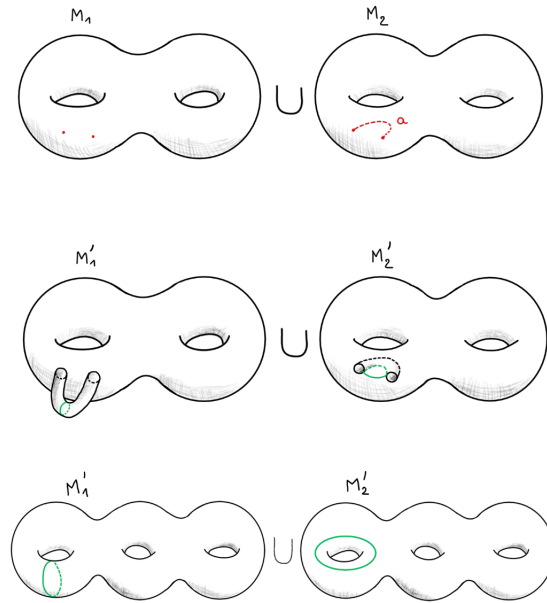


FIGURE 5 – Opération de stabilisation sur un scindement de Heegaard.

Voici quelques exemples de diagrammes de Heegaard :

**Exemple 3.1.1** (Diagramme de Heegaard de  $\mathbb{S}^3$ ). La 3-sphère  $\mathbb{S}^3$  peut être vue comme le recollement d'une 3-anse sur une 0-anse via l'application identité. Elle admet donc un scindement de Heegaard de genre 0, et son diagramme de Heegaard est le diagramme vide. Cependant, on peut effectuer une opération de stabilisation pour obtenir un scindement de genre 1 (voir Figure 6)

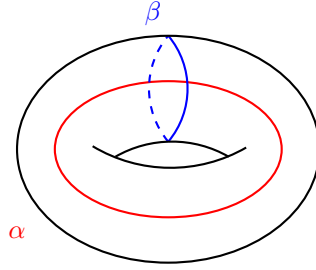


FIGURE 6 – Diagramme de Heegaard de  $\mathbb{S}^3$  de genre 1.

*Remarque 3.1.1.* Effectuer une opération de stabilisation revient à effectuer la somme connexe d'un diagramme de Heegaard avec le digramme de la Figure 6. Au niveau des variétés, cela est équivalent à effectuer la somme connexe de  $M$  avec la 3-sphère. Comme  $M \# \mathbb{S}^3 \simeq M$ , cette opération ne modifie pas la variété.

**Exemple 3.1.2** (Diagramme de Heegaard de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ ). On peut visualiser  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  comme la variété  $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^2$  où l'on identifie les deux composantes de bord. En coupant au niveau de l'équateur, on obtient deux cylindres pleins, puis à l'aide de la première identification, on forme deux tores solides. Ces deux composantes sont identifiées au niveau de leur bord suivant l'identité (cf Figure 7).

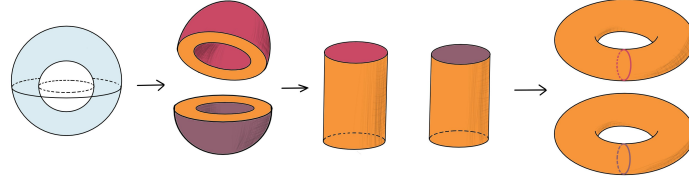


FIGURE 7 – Obtention d'un scindement de Heegaard de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ .

**Exemple 3.1.3** (Espaces lenticulaires  $L(p, q)$ ). Soient  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux. L'espace lenticulaire  $L(p, q)$  est construit de la façon suivante. Partant de la boule  $\mathbb{D}^3$ , on dispose sur l'équateur  $p$  points  $a_0, \dots, a_{p-1}$  régulièrement espacés. Puis on trace des géodésiques reliant ces points au pôle nord et au pôle sud, délimitant ainsi  $2p$  triangles. On identifie ces triangles en identifiant le pôle nord avec le pôle sud et les points  $a_i$  avec les points  $a_{i+q}$  (les indices sont pris modulo  $p$ ).

Pour obtenir un scindement de  $L(p, q)$ , on commence par découper un cylindre  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^1$  de telle sorte que  $\{0\} \times \mathbb{D}^1$  corresponde à l'axe pôle nord - pôle sud de  $\mathbb{D}^3$ . Les composantes de bord  $\mathbb{D}^2 \times \{0\}$  et  $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$  du cylindre sont identifiées via un twist d'angle  $\frac{2\pi q}{p}$ . On obtient un premier tore. On découpe la partie restante de  $L(p, q)$  en  $p$  morceaux, que l'on recolle selon les identifications données dans la définition. On se retrouve avec un cylindre, dont on recolle les bords pour obtenir un deuxième tore. En suivant ces opérations, le méridien du deuxième tore se retrouve identifié avec la courbe  $p\eta + q\mu$  du premier tore ( $\eta$  désigne ici un parallèle et  $\mu$  un méridien). On obtient ainsi un scindement de Heegaard.

La Figure 8 illustre cette construction pour  $p = 2$  et  $q = 1$ .

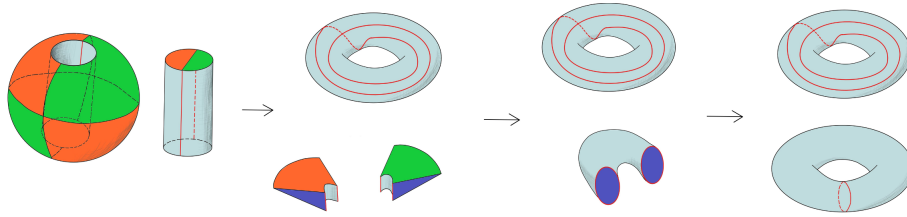


FIGURE 8 – Obtention d'un scindement de Heegaard de  $L(2, 1)$ .

**Théoreme 3.1.1** (Existence des scindements de Heegaard). Toute variété fermée connexe orientable de dimension 3 admet un scindement de Heegaard.

La preuve de l'existence des scindements de Heegaard repose l'existence d'une décomposition en anses et de deux lemmes :

**Lemme 3.1.1** (Ordre d'attachement des anses). *Il est toujours possible d'attacher successivement les anses dans l'ordre croissant de leurs indices, quitte à appliquer des isotopies sur les applications de recollement. Pour les anses de même indice, le recollement peut se faire dans n'importe quel ordre.*

**Lemme 3.1.2.** *Pour une variété  $M$  fermée connexe orientée de dimension 3, il est toujours possible de trouver un entier  $g$  et une décomposition en anses comportant exactement une unique 0-anse,  $g$  1-anses,  $g$  2-anses et une unique 3-anse.*

Le premier corps en anse d'un scindement de Heegaard de  $M$  s'obtient alors en recollant les  $g$  1-anses sur la 0-anse. Le deuxième s'obtient via la décomposition duale en recollant les  $g$  2-anses sur la 3-anse.

Comme vu plus haut, il n'y a pas de résultat d'unicité concernant les scindements de Heegaard. On peut en effet augmenter le genre du scindement à l'aide de plusieurs opérations de stabilisation sans modifier la classe de difféomorphisme de la variété. Cependant, étant donné deux diagrammes d'une même variété, il est possible de passer de l'un à l'autre en utilisant des stabilisations et une autre opération, appelée *glissement de anses*. Cette dernière opération ne sera pas spécifiée ici, mais elle revient intuitivement à faire glisser une anse par dessus une autre, comme schématisé sur la Figure 9.

**Théoreme 3.1.2.** (Reidemeister, Singer [9]) *Soient  $X$  et  $X'$  deux diagrammes de Heegaard de la même variété en dimension 3. Il est possible de passer de  $X$  à  $X'$  en utilisant uniquement des stabilisations, un nombre fini de glissements de anses et une isotopie ambiante.*



FIGURE 9 – Glissement de anse.

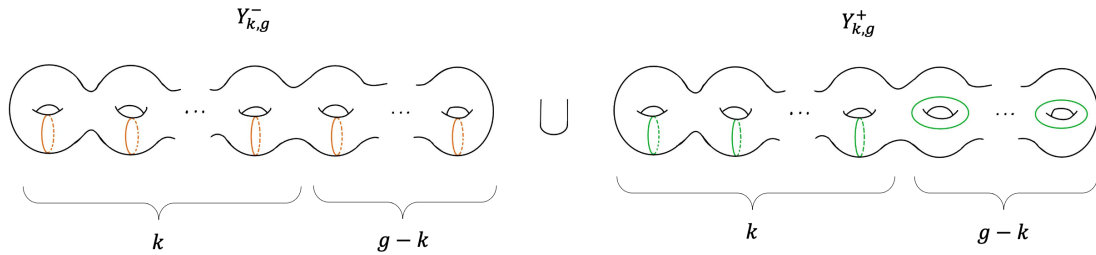
### 3.2 Trisection des variétés de dimension 4

Les trisections sont une manière de décomposer les variétés de dimension 4. Elles sont analogues à ce que sont les scindements de Heegaard en dimension 3.

Notons  $Z_k = \#_{\partial}^k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^3)$  l'union d'une 0-anse et de  $k$  1-anses de dimension 4. Il s'agit de l'analogie en dimension 4 d'un corps en anse de genre  $k$ . Son bord est noté

$$Y_k = \partial Z_k = \#^k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$$

On considère le scindement de Heegaard standard  $Y_k = Y_k^+ \cup Y_k^-$ , dont le diagramme est obtenu en effectuant  $k$  sommes connexes de celui de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  de l'exemple 3.1.2. Soit  $g \geq k$ . On stabilise le scindement de Heegaard  $g - k$  fois pour obtenir un scindement de genre  $g$ , noté  $Y_{k,g}^+ \cup Y_{k,g}^-$ .



**Définition 3.2.1** (Trisection). *Une  $(g, k)$ -trisection d'une variété  $X$  fermée connexe orientée de dimension 4 est une décomposition  $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$  qui vérifie les trois conditions suivantes :*

1. Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $X_i$  est difféomorphe à  $Z_k$  via un difféomorphisme  $\Phi_i$
2. En prenant les indices modulo 3,  $H_{i,i+1} := X_i \cap X_{i+1}$  est difféomorphe à  $H_g$ , corps en anses de genre  $g$
3.  $X_1 \cap X_2 \cap X_3$  est difféomorphe à  $\Sigma_g$ , surface de genre  $g$

Le bord de  $X_i$  est naturellement décomposé en un scindement de Heegaard de genre  $g$

$$\partial X_i = H_{i,i+1} \cup H_{i,i-1}$$

Celui-ci doit vérifier

$$\Phi_i(H_{i,i+1}) = Y_{k,g}^- \text{ et } \Phi_i(H_{i,i-1}) = Y_{k,g}^+$$

La Figure 10 représente schématiquement une trisection, mais on utilise plus souvent le dessin de la Figure 11 pour schématiser la façon dont les trois morceaux  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  se recollent pour former la variété  $X$ .

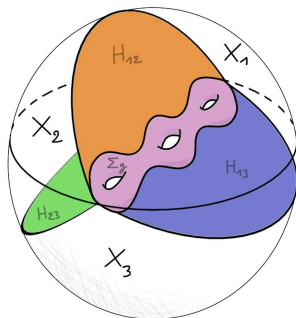


FIGURE 10 – Représentation schématique d'une trisection.

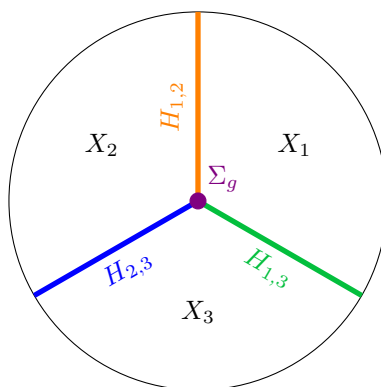


FIGURE 11 – Représentation schématique d'une trisection

De la même façon que pour les scindements de Heegaard, on utilise des diagrammes pour représenter les trisections.

**Définition 3.2.2** (Diagramme de trisection). *Un diagramme d'une  $(g, k)$ -trisection est un quadruplet  $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$  où  $\Sigma_g$  est une surface de genre  $g$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des familles de  $g$  courbes simples sur  $\Sigma_g$  telles que  $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$ ,  $(\Sigma_g, \beta, \gamma)$  et  $(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$  sont des diagrammes de Heegaard de  $\#^k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$ .*

**Exemple 3.2.1** (Trisection de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ). *On utilise l'application*

$$\mu : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$([z_1 : z_2 : z_3]) \longmapsto \left( \frac{3|z_1|}{|z_1|+|z_2|+|z_3|}, \frac{3|z_2|}{|z_1|+|z_2|+|z_3|} \right)$$

*L'image de  $\mu$  est le triangle délimité par les points  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$  et  $(0, 3)$ . On découpe ce triangle en trois parties avec la subdivision barycentrique (cf Figure 12).*

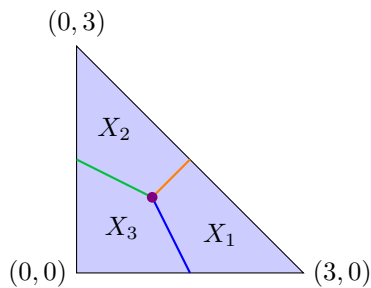


FIGURE 12 – Découpe de l'image de  $\mu$ .

On pose :

$$X_1 = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid |z_2|, |z_3| \leq |z_1|\} = \{[1 : z_2 : z_3] \mid |z_2|, |z_3| \leq 1\} \cong \mathbb{D}^4$$

$$X_2 = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid |z_1|, |z_3| \leq |z_2|\} = \{[z_1 : 1 : z_3] \mid |z_1|, |z_3| \leq 1\} \cong \mathbb{D}^4$$

$$X_3 = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid |z_1|, |z_2| \leq |z_3|\} = \{[z_1 : z_2 : 1] \mid |z_3|, |z_2| \leq 1\} \cong \mathbb{D}^4$$

et :

$$H_{1,2} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid |z_3| \leq |z_1| = |z_2|\} = \{[1 : z_2 : z_3] \mid |z_3| \leq 1 \text{ et } |z_2| = 1\} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$$

$$H_{2,3} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid |z_1| \leq |z_2| = |z_3|\} = \{[z_1 : 1 : z_3] \mid |z_1| \leq 1 \text{ et } |z_3| = 1\} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$$

$$H_{3,1} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid |z_2| \leq |z_3| = |z_1|\} = \{[z_1 : z_2 : 1] \mid |z_2| \leq 1 \text{ et } |z_1| = 1\} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$$

Enfin

$$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \mu^{-1}(1, 1) \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

Cette division nous donne donc une  $(1, 0)$ -trisection de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

Pour construire le diagramme de trisection, il faut repérer où sont envoyés les méridiens de  $H_{2,3}$  et  $H_{3,1}$ , tous deux identifiés à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ , lorsque l'on effectue le changement de carte pour se ramener dans le système de coordonnées  $[1 : z_2 : z_3]$ , c'est-à-dire celui dans lequel  $H_{1,2}$  est identifié à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ .

Le méridien de  $H_{1,3}$ , noté  $\alpha$ , est envoyé sur le parallèle de  $H_{1,2}$ . Celui de  $H_{2,3}$ , noté  $\gamma$ , est envoyé sur  $-\eta - \mu$  ( $\eta$  est le parallèle et  $\mu$  le méridien). Enfin, le méridien de  $H_{1,2}$  est noté  $\beta$ . Le diagramme est représenté sur la Figure 13.

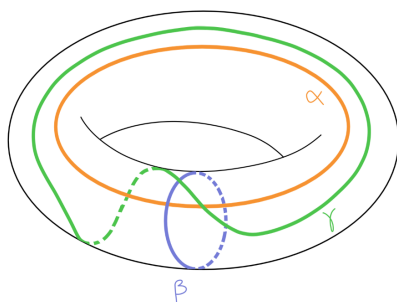


FIGURE 13 – Trisection de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

L'opération de stabilisation pour les trisections fonctionne de manière analogue que pour les scindements de Heegaard. Étant donnée une variété  $X$  avec une  $(g, k)$ -trisection  $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ , on procède de la manière suivante (cf Figure 14) :

Pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , on choisit des arcs  $a_{i,j}$  plongés dans  $H_{i,j}$ , parallèles au bord, avec  $\partial a_{i,j} \subset \Sigma_g$ . Le choix est fait de façon à ce que les extrémités des arcs forment 6 points distincts dans  $\Sigma_g$ . Pour chaque paire  $(i, j)$ ,

on prend  $N_{i,j}$  un voisinage tubulaire de dimension 4 de  $a_{i,j}$ , suffisamment petit pour avoir  $N_{i,j} \cap N_{l,m} = \emptyset$  pour  $(i,j) \neq (l,m)$ . On définit :

$$\begin{aligned} X'_1 &= (X_1 \cup N_{2,3}) \setminus (\mathring{N}_{3,1} \cup \mathring{N}_{1,2}) \\ X'_2 &= (X_2 \cup N_{3,1}) \setminus (\mathring{N}_{1,2} \cup \mathring{N}_{2,3}) \\ X'_3 &= (X_3 \cup N_{1,2}) \setminus (\mathring{N}_{2,3} \cup \mathring{N}_{3,1}) \end{aligned}$$

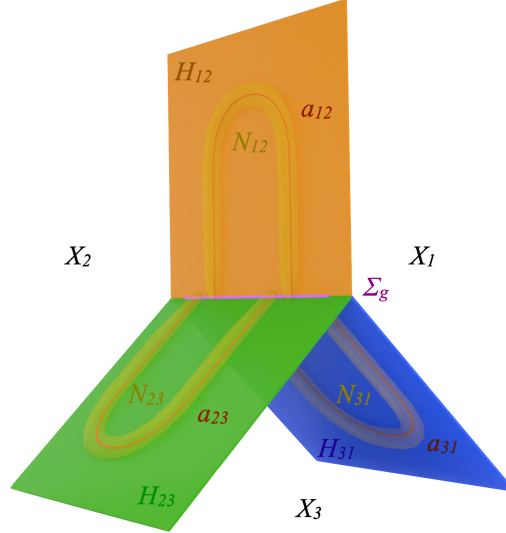


FIGURE 14 – Schéma de la stabilisation d'une trisection.

On peut alors montrer le résultat suivant :

**Proposition 3.2.1.** *Si  $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$  est une  $(g, k)$ -trisection de  $X$ , de diagramme  $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ , alors avec les notations du dessus,  $X = X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3$  est une  $(g + 3, k + 1)$ -trisection de  $X$ . Son diagramme  $(\Sigma_{g+3}, \alpha', \beta', \gamma')$  est obtenu en effectuant la somme connexe de  $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$  avec le diagramme de  $\mathbb{S}^4$  de genre 3 représenté sur la Figure 15.*

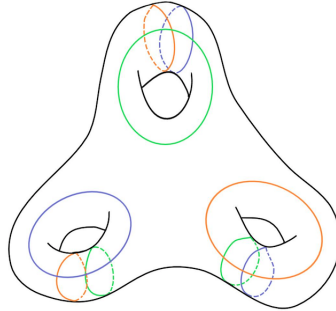


FIGURE 15 – Trisection de  $\mathbb{S}^4$  de genre 3.

Tout comme les diagrammes de Heegaard, les diagrammes de trisections peuvent être liés aux décompositions en anses des variétés.

Soit  $X$  une variété de dimension 4 munie d'un diagramme de trisection. La variété  $X$  peut être reconstruite à partir de son diagramme (cf Figure 16). On part pour cela de la surface  $\Sigma_g$  que l'on épaissit par un disque pour obtenir  $\Sigma_g \times \mathbb{D}^2$ . On délimite trois intervalles disjoints sur le bord du disque, notés  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On considère ensuite trois copies du corps en anses de genre  $g$ , notées  $H_g$ , munies de familles de  $g$  courbes simples parcourant les méridiens. On prend un voisinage de chacune de ces courbes, délimitant ainsi des cylindres pleins  $(C_i)_{1 \leq i \leq g}$  dans les copies de  $H_g$ . On décompose alors chaque corps en anse  $H_g = \mathbb{D}^3 \cup_{i=1}^g C_i$ . Chacune des trois familles de  $g$  cylindres est épaissie en prenant respectivement le produit cartésien par les intervalles  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

On s'intéresse dans un premier temps à ceux épaissis par l'intervalle  $A$ . Les courbes tracées à la surface des  $C_i$  indiquent la façon dont ceux-ci doivent se recoller sur les courbes  $\alpha$  de  $\Sigma_g$  pour former la variété  $X$ .

La sphère de recollement s'identifie à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1 \times A \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ . Il s'agit donc de l'attachement de 2-anses de dimension 4. Le recollement de ces 2-anses est suivi de celui de la 3-anse  $\mathbb{D}^3 \times A$  pour former  $H_{1,2} \times A$ . La même opération est réalisée sur les courbes  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  en attachant les cylindres  $C_i \times B$  et  $C_i \times C$  respectivement. Il reste enfin à attacher 3 copies de  $Z_k$  pour retrouver les 3 parties  $X_1, X_2$  et  $X_3$ . Cela se fait en recollant des 3 et 4-anses. Il existe une unique façon d'effectuer cet attachement pour obtenir une variété  $X$  sans bord. Ce résultat est une conséquence du théorème A démontré dans la note de F. Laudenbach et V. Poénaru [3].

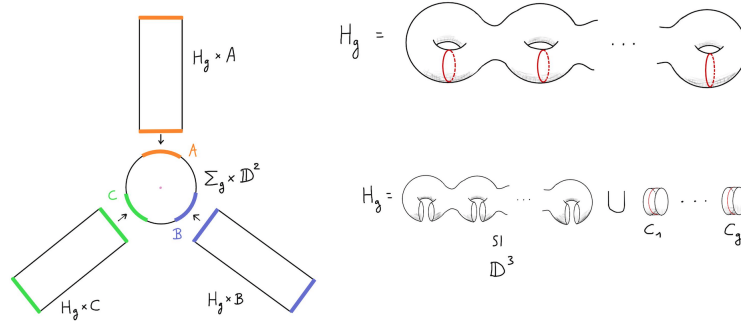


FIGURE 16 – Construction de la variété  $X$ , à partir d'un diagramme de trisection.

Le résultat principal de l'article de D. Gay et R. Kirby [2] porte sur l'existence des trisections.

**Théorème 3.2.1** (Existence des trisections). *Toute variété de dimension 4 fermée connexe orientée admet une trisection.*

On ne donnera pas de preuve de ce résultat ici. Il peut être obtenu à l'aide de la théorie de Morse, en utilisant cette fois-ci des 2-fonctions de Morse. Mais il est également possible d'en donner une preuve topologique en se basant sur le lien avec les décompositions en anses présenté plus haut.

## 4 Conclusion et questions ouvertes

On donne ici un aperçu de l'utilisation des trisections dans d'autres domaines de la topologie de petite dimension. On cite notamment quelques problèmes ouverts sur les variétés de dimension 4 pour lesquels on espère que la théorie développée par D. Gay et R. Kirby aidera à apporter des éléments de réponse.

### 4.1 Formes d'intersection

**Définition 4.1.1** (Forme d'intersection [1]). *Soit  $X$  une variété lisse de dimension 4. Les éléments de  $H_2(X)$  peuvent être représentés par des surfaces plongées à l'intérieur de  $X$ . La forme d'intersection  $Q$  est une forme bilinéaire symétrique définie par*

$$Q_X : H_2(X) \times H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z} \\ (S_1, S_2) \mapsto \langle S_1, S_2 \rangle$$

où  $\langle S_1, S_2 \rangle$  désigne le nombre algébrique d'intersections entre les deux surfaces.

La forme d'intersection d'une variété fermée est de déterminant  $\pm 1$  (on dit qu'elle est *unimodulaire*). Une question naturelle est de se demander si toutes les formes quadratiques unimodulaires peuvent être réalisées en tant que forme d'intersection de variété de dimension 4. La réponse est positive pour les variétés topologiques [4] mais négative dans le cas des variétés lisses. En particulier, il existe une obstruction donnée par le théorème de Rohlin :

**Théorème 4.1.1** (Rohlin, [8]). *Soit  $X$  une 4-variété simplement connexe, lisse, fermée, orientée. Si  $Q_X$  est paire alors sa signature est divisible par 16.*

Savoir quelles sont les formes quadratiques unimodulaires réalisées en tant que forme d'intersection de variétés lisses est un problème ouvert. L'étude des trisections pourrait éventuellement permettre d'obtenir de nouvelles obstructions et d'avancer sur cette question. Cette idée provient d'un article de P. Lambert-Cole ([6], 2020) dans lequel il utilise une certaine construction des trisections pour donner une nouvelle preuve du théorème de Rohlin, en se basant sur les travaux de D. Johnson et S. Morita sur la dimension 3. On pourrait alors imaginer utiliser des idées similaires pour étudier de nouvelles obstructions.

## 4.2 Application de recollements et groupe de difféotopie des surfaces

On a vu que les applications de recollement jouaient un rôle important dans la définition des scindements de Heegaard et des trisections. Elles sont reliées à l'étude plus générale de ce qu'on appelle le *groupe de difféotopie des surfaces*, noté  $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ . Il s'agit du groupe formé des classes d'isotopie des difféomorphismes de  $\Sigma_g$ . Celui-ci est engendré par ce que l'on appelle les *twists de Dehn*. Ce sont des difféomorphismes obtenus en découpant la surface le long d'une courbe simple fermée, en "twistant" un des côtés d'un angle  $2\pi$ , puis en recollant le tout (voir Figure 17).

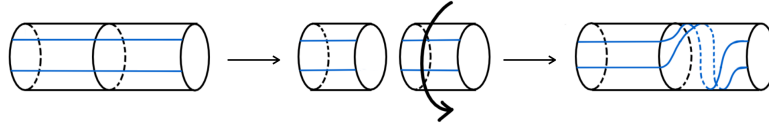


FIGURE 17 – Twist de Dehn

**Exemple 4.2.1** ( $\mathcal{M}(\Sigma_1)$ ). Le groupe de difféotopie du tore  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  est engendré par deux twists de Dehn : le long du parallèle et le long du méridien. On identifie  $\mathcal{M}(\Sigma_1)$  à  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Plusieurs sous-groupes de  $\mathcal{M}(\Sigma_g)$  sont intéressants à étudier. Parmi eux, on trouve le groupe de Torelli  $\mathcal{I}_g$ , engendré par les twists de Dehn le long des paires bordantes et des courbes séparantes, ou le noyau de Johnson  $\mathcal{K}_g$ , sous-groupe de  $\mathcal{I}_g$  engendré par les twists de Dehn le long des courbes séparantes (Figure 18).

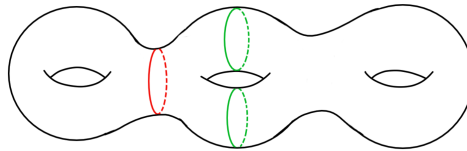


FIGURE 18 – En rouge : exemple de courbe séparante. Couper le long de cette courbe donne deux composantes connexes. En vert : exemple de paire bordante. Couper le long des deux courbes donne deux composantes connexes, mais aucune des courbes à elle seule n'est séparante.

En dimension 3, S. Morita a montré que les sphères d'homologie pouvaient être obtenues à partir des scindements de Heegaard de  $\mathbb{S}^3$  en recollant les deux corps en anses le long de leurs bords suivant un élément du noyau de Johnson [7]. Un résultat analogue en dimension 4 a été démontré par P. Lambert Cole : pour  $X$  et  $Y$  deux variétés de dimension 4 lisses fermées simplement connexes et admettant la même forme d'intersection, une trisection de  $Y$  s'obtient à partir d'une trisection de  $X$  en modifiant les applications de recollement par des éléments du noyau de Johnson [6]. Il est alors naturel de se demander s'il est possible de raffiner ces résultats en utilisant d'autres sous-groupes de  $\mathcal{K}_g$ . La réponse est positive en dimension 3, mais la question reste ouverte en dimension 4.

## Références

- [1] Robert E. Gompf et Andras I. Stipsicz. 4-manifolds and Kirby Calculus. *American Mathematical Society*, 1999.
- [2] David T. Gay et Robinson Kirby. Trisecting 4-manifolds. *Geometry & Topology*, 20 :3097 – 3132, 2016.
- [3] François Laudenbach et Vincent Poénaru. A note on 4-dimensional handlebodies. *Bulletin de la S.M.F.*, 1972.
- [4] Michael H. Freedman Frank Quinn. *Topology of 4-manifolds*, volume 49. Princeton University Press, 1990.
- [5] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer New York, 1976.
- [6] Peter Lambert-Cole. Trisections, intersection forms and the Torelli group. *Algebraic & Geometric Topology*, 20(2) :1015 – 1040, 2020.
- [7] Shigeyuki Morita. Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles I. *Topology*, 28(3) :305 – 323, 1989.

- [8] Vladimir A. Rohlin. A new result in the theory of 4-dimensional manifolds. *Doklady Akad*, 84 :221 – 224, 1952.
- [9] James W. Singer. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. *American Mathematical Society*, 35 :88–111, 1933.