

Introduction au domaine de recherche : Aspects algorithmiques des surfaces plates

Oscar Fontaine

31 mai 2024

Les surfaces plates sont des cas particuliers de surfaces riemanniennes de courbure constante, la courbure étant égal à 0. Pour contourner les contraintes de genre induites par le théorème de Gauss-Bonnet, nous autorisons une telle surface à avoir des singularités coniques.

Dans ce texte, nous présentons brièvement divers éléments de l'étude combinatoire de ces surfaces que ce soit pour la question du plongement dans l'espace euclidien de dimension 3 ou pour le calcul de groupe d'invariant (appelé groupe de Veech). Nous introduisons aussi le lien entre ces surfaces et la géométrie algébrique et les espaces de modules.

Table des matières

1 Surfaces plates : définitions et propriétés	2
1.1 Définition intrinsèque : surfaces euclidiennes à singularités coniques	2
1.2 Définition constructive : surfaces polyédrales	3
1.3 Lien entre les deux définitions	4
2 Plongements isométriques affines par morceaux	4
2.1 Existence de plongements isométriques affines par morceaux	4
2.2 Nombre de triangles	6
3 Lien avec la géométrie complexe	6
4 Groupes de Veech et pavage du plan hyperbolique	8
4.1 Groupes de Veech	8
4.2 Triangulation de Delaunay	8
4.3 Région d'iso-Delaunay	9

1 Surfaces plates : définitions et propriétés

Il existe deux définitions équivalentes de surfaces plates. La première est une définition intrinsèque propice à une étude géométrique et la seconde suppose que la surface est découpée en un ensemble de polygones plans et est plus pratique pour des constructions explicites. Ces deux définitions correspondent à la même structure et nous désignons par surface plate une surface définie par l'une ou l'autre de ces définitions.

1.1 Définition intrinsèque : surfaces euclidiennes à singularités coniques

Pour introduire la première définition, nous introduisons la notion de cône euclidien.

Définition. 1.1: Cône euclidien

Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Le *cône euclidien épointé* d'angle θ V_θ est la surface topologique définie par $V_\theta := \{(r, \theta) | r > 0, t \in [0, \theta]\} / (r, 0) \sim (r, \theta)$ munie de la métrique $ds^2 = dr^2 + r^2 dt^2$.

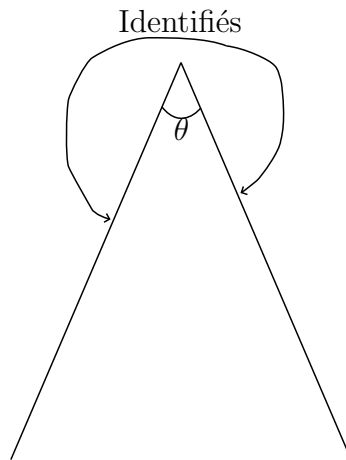


FIGURE 1 – Un exemple de cône euclidien

Remarque : Dans le cas où $\theta = 2\pi$, $V_{2\pi}$ correspond au plan euclidien muni de la métrique usuelle en coordonnées polaires.

La notion de localité pour les surfaces euclidiennes à singularités coniques correspond à la notion usuelle.

Définition. 1.2: Surface euclidienne à singularité conique

Soit S une surface topologique compacte, $x = (x_i)_{i \in I}$ des points de S et $\theta = (\theta_i)_{i \in I}$ des réels strictement positifs tels que $S \setminus \{x_i\}_{i \in I}$ est muni d'une métrique riemannienne.

S est une *surface euclidienne à singularités coniques* en x d'angles θ s'il existe $(U_i)_{i \in I}$ des ouverts de S tels que, pour tout $i \in I$, $x_i \in U_i$, $U_i \setminus x_i$ est isométrique à V_{θ_i} et cette isométrie envoie x_i sur l'apex du cône. De plus, $\bigcup_{i \in I} U_i$ recouvre S .

On appelle *singularités* les points dont l'angle du cône est différents de 2π . L'ensemble de ces points est discret et donc comme la surface est compacte, l'ensemble des singularités est fini.

Une surface euclidienne à singularités coniques peut être considérée comme une surface riemannienne de courbure constante égale à 0 où l'ensemble de la courbure est concentrée en des points singuliers. En particulier, on peut démontrer un équivalent du théorème de Gauss-Bonnet dans ce cas.

Théorème. 1.1: Formule de Gauss-Bonnet

Soit S une surface euclidienne compacte à singularités coniques en x_1, \dots, x_n d'angles $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Alors $\sum_{i=1}^n (2\pi - \theta_i) = 2\pi\chi(S)$ où $\chi(S)$ est la caractéristique d'Euler de la surface.

Un exemple particulier intéressant d'une telle structure est un tore plat : c'est-à-dire \mathbb{R}^2 quotienté par un réseau vu comme une surface géométrie. Un tel tore a courbure 0 et ne possède aucune singularité.

Un autre exemple plus simple est un polyèdre convexe de \mathbb{R}^3 . La surface de tout polyèdre convexe admet en effet une structure de surface euclidienne à singularités coniques.

1.2 Définition constructive : surfaces polyédrales

Définition. 1.3: Surface polyédrale

Une *surface polyédrale* S est une surface obtenue par le recollement d'un nombre fini de polygones euclidien le long d'arêtes de même longueur. Chaque arête est recollé à exactement une autre arête.

Cette définition offre une structure de donnée efficace pour représenter une telle surface. En effet, il suffit de stocker la forme de chaque polygone (par exemple en notant les coordonnées de chacun des sommets) et de stocker les recollements de deux arêtes. Une telle structure est implémentée en pratique dans le module `flatsurf` de `SageMath` [6].

On peut restreindre l'ensemble des fonctions de recollement autorisées pour créer ce type de surfaces. Un cas intéressant est le cas des surfaces de translation dont nous parlerons plus tard.

Définition. 1.4: Surface de translation

Une *surface de translation* est une surface polyédrale où chaque recollement se fait le long de côtés de même longueur et parallèles.

Les polygones définissant une surface de translation sont orientés induisant une orientation des arêtes. Deux arêtes ne peuvent être collées l'une à l'autre que si elles ont des orientations opposées.

Une surface de translation possède plusieurs propriétés intéressantes. Notamment, les angles de ces singularités sont des multiples entiers non nuls de 2π .

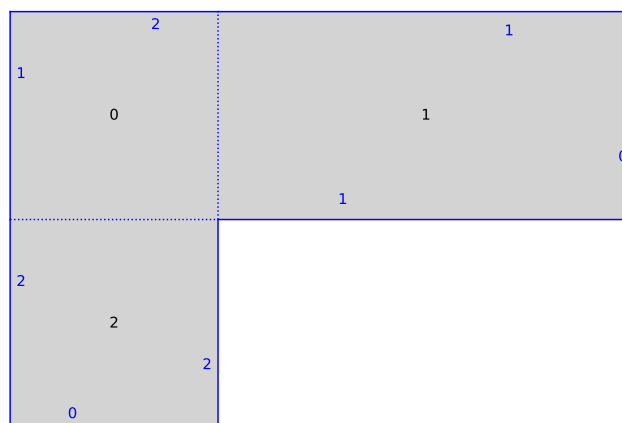


FIGURE 2 – Un exemple de surface de translation : les recollements se font le long des côtés parallèles. Les numéros des arêtes indiquent à quel polygone elles sont recollées.

Cette surface a une seule singularité d'angle 6π et a genre $g = 2$.

1.3 Lien entre les deux définitions

Théorème. 1.2: Équivalence des deux définitions

Toute surface euclidienne à singularités coniques peut être obtenue par le recollement de polygones décrit dans la définition d'une surface polyédrale.

De plus, pour toute surface polyédrale, on peut trouver des voisinages des sommets des polygones isométriques à un cône formant ainsi une structure de surface euclidienne à singularités coniques.

Preuve : Soit S une surface euclidienne à singularités coniques. Alors S peut être recouvert par un ensemble de fermés $(F_i)_{i \in I}$ à bords polygonaux tels que l'intérieur de F_i soit un voisinage conique de x_i et que l'intersection de deux de ces fermés soit une partie de leurs bords polygonaux. Par conséquent, chacun de ces fermés peut être triangulé autour de x_i . Alors l'ensemble de triangles donne une structure de surface polyédrale à S .

À présent, soit S une surface polyédrale alors en regroupant les triangles autour de chacun des sommets des polygones, on peut définir un voisinage conique de chacun des sommets. Par conséquent, S est aussi muni d'une structure de surface à singularités coniques. ■

La correspondance entre ces deux structures nous permet de désigner abusivement par surface plate une surface euclidienne à singularités coniques ou une surface polyédrale suivant le contexte.

2 Plongements isométriques affines par morceaux

Une première problématique est la question du plongement dans \mathbb{R}^3 . En effet, considérons une surface polyédrale S orientable, celle-ci admet un plongement continue dans \mathbb{R}^3 puisqu'il s'agit d'une surface compacte orientable. De plus, ce plongement peut être lisse sauf au niveau des singularités. Le théorème de plongement C^1 de Nash-Kuiper garantit l'existence d'un plongement isométrique de S dans \mathbb{R}^3 .

Théorème. 2.1: Nash-Kuiper

Soit S une surface polyédrale et $\varepsilon > 0$. Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un plongement contractant (c'est-à-dire réduisant les distance) lisse sauf aux singularités, alors il existe un plongement isométrique $f_\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, C^1 et ε -proche de f .

Le problème du plongement donné par le théorème de Nash-Kuiper est qu'il est lisse et en particulier qu'il ne respecte pas la combinatoire de la surface polyédrale. Il est par exemple assez compliqué de représenter un tel plongement informatiquement. Pour cette raison, nous introduisons la notion de plongement affines par morceaux.

Définition. 2.1: Plongements affines par morceaux

Soit S une surface polyédrale. Une application $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite *affine par morceaux* si S possède une triangulation telle que la restriction de f à chaque triangle est affine.

f est dite *affine par morceaux isométrique* si S possède une triangulation telle que la restriction de f à chaque triangle est isométrique. En particulier, f doit être affine par morceaux.

Dans cette section, nous détaillons deux aspects de la question du plongement isométrique de surfaces : la question de l'existence et celle du nombre de triangles dans un tel plongement.

2.1 Existence de plongements isométriques affines par morceaux

La question de l'existence de tels plongements est résolue puisqu'il existe un équivalent du théorème de Nash-Kuiper dans le cas affine par morceaux.

Théorème. 2.2: Burago et Zalgaller [5]

Soit S une surface polyédrale compacte à bord orientable.

Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un plongement lisse contractant.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $f_\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction affine par morceaux isométrique f_ε est ε -proche de f .

La preuve de ce théorème repose sur le théorème de Nash-Kuiper puis sur plusieurs constructions techniques pour traiter les singularités. Elle requiert entre autres l'existence de triangulation de S dont tous les angles sont aigus.

Toute surface polyédrale S possède une triangulation dont tous les triangles sont aigus. Plus précisément, toute triangulation d'une surface polyédrale peut être raffinée en une triangulation aigue. Il existe plusieurs preuves de ce résultat notamment par Maehara [8] et Saraf [9]. Burago et Zalgaller ont démontré une version possédant une hypothèse supplémentaire : les côtés de la triangulation originelle sont subdivisés en parts égales.

Théorème. 2.3: Burago et Zalgaller [4]

Soit S une surface polyédrale et \mathcal{T}_0 une triangulation de S . Alors il existe un raffinement \mathcal{T}'_0 de \mathcal{T}_0 en triangles aigus tel que les côtés de \mathcal{T}_0 soient subdivisés en parts égales dans \mathcal{T}'_0 et tel que deux côtés de \mathcal{T}_0 de même longueur soient subdivisés en un même nombre de parts dans \mathcal{T}'_0 .

Lors de mon stage l'an passé avec Lazarus, je me suis concentré sur une réécriture et une simplification de ce dernier théorème.

De tels plongements peuvent être réalisés et implémentés en pratique comme sur la figure ci-dessous réalisé par Lazarus et Tallierie [7].

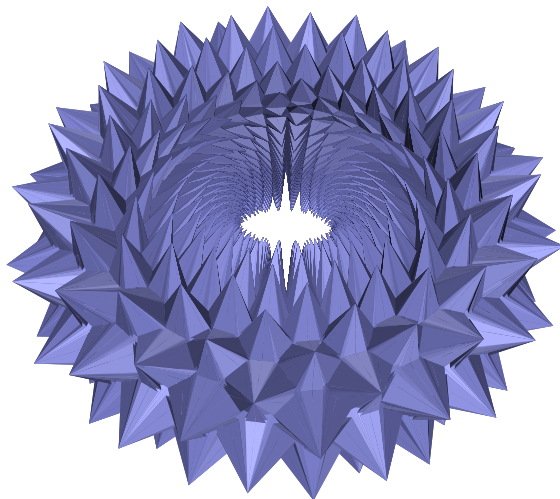


FIGURE 3 – Plongement isométrique du tore carré plat réalisé à l'aide de la méthode de Burago et Zalgaller

La question du plongement isométrique affine par morceaux n'est néanmoins pas complètement résolue. En effet, à l'instar du théorème de Nash-Kuiper, on pourrait demander que le bord soit déjà plongé isométriquement dans \mathbb{R}^3 et étudier les prolongements possibles affines par morceaux de S . La conjecture suivante détaille cette idée.

Conjecture 2.1:

Soit S une surface polyédrale compacte à bord orientable.

Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un plongement vérifiant :

1. f restreinte au bord de S est affine par morceaux.
2. f est lisse hors des singularités.
3. f est contractante partout sauf sur ∂S où elle est isométrique.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $f_\varepsilon : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction affine par morceaux isométrique telle que f_ε est ε -proche de f .

2.2 Nombre de triangles

Le défaut de la méthode de Burago et Zalgaller dans la question du plongement de surface polyédrale dans \mathbb{R}^3 est qu'elle introduit une grande quantité de triangles. Comme on peut le voir sur la figure 3, un simple tore plat est triangulé avec une centaine de triangles. On peut alors considérer le nombre minimal de triangles nécessaires pour obtenir un plongement isométrique d'une surface donnée dans \mathbb{R}^3 .

Dans le cas des polyèdres convexes, la question est résolue par le théorème d'Alexandrov [2].

Théorème. 2.4: Alexandrov

Si S est la surface d'un polyèdre convexe, alors il existe un unique plongement affine par morceaux isométrique de S dans \mathbb{R}^3 tel que les seuls sommets de la triangulation considérée soient les singularités S .

Le cas du tore a également été très étudié. En raison de la caractéristique d'Euler, tout plongement affine par morceau du tore dans \mathbb{R}^3 requiert au moins 7 sommets. Un plongement à 7 sommets a été réalisé par Ákos Császár dans les années 1940. On sait de plus que toute triangulation du tore peut être réalisée dans un plongement affine par morceaux [1]. Néanmoins aucun des plongements réalisés à ce jour à $n < 10$ sommets ne sont des plongements isométriques de tore plat.

En 2007, Tsuboi a démontré qu'il était possible de plonger isométriquement tout tore plat dans \mathbb{R}^3 avec 10 sommets [11]. La question pour $7 \leq n \leq 10$ est toujours ouverte.

Conjecture 2.2:

Il existe un plongement isométrique affine par morceaux du tore carré plat dans \mathbb{R}^3 avec 7 sommets.

Cette conjecture est toujours ouverte même si on peut démontrer que la question est équivalente à l'existence de solutions réelles d'un système polynomial. L'ensemble des problèmes de ce type est appelé la théorie existentielle des réels. Ce dernier problème est décidable mais il est trop long de le calculer effectivement dans l'état actuel des connaissances.

3 Lien avec la géométrie complexe

La structure de surface plate a un lien étroit avec la géométrie complexe. Cette section étudie le lien entre ces deux notions. Plus précisément, un cône euclidien d'angle θ est isométrique à \mathbb{C} muni de la métrique $ds^2 = |z|^{2\beta} |dz|^2$ où $\beta = \left(\frac{\theta}{2\pi}\right) - 1$. 0 est alors envoyé sur l'apex du cône. Par conséquent, il est possible de considérer les singularités d'une surface plate comme des zéros de fonctions abéliennes sur cette surface.

Formellement, soit X une surface de Riemann et TX son fibré tangent. Une *surface de Riemann* est une surface topologique munie d'un atlas de cartes sur \mathbb{C} dont les applications de changement de cartes sont des biholomorphismes.

Définition. 3.1: Différentielle abéliennes

Une différentielle abélienne ω sur X est une 1-forme holomorphe $\omega : TX \rightarrow \mathbb{C}$. Autrement dit, localement, $\omega = \mu(z)dz$ où μ est une fonction holomorphe.

L'espace des différentielles abéliennes sur X est noté $\Omega(X)$. $\Omega(X)$ n'est jamais réduit à 0 si le genre de X est strictement positif.

Étant donné une différentielle abélienne $\omega \neq 0$ sur S , ω induit une structure plate sur X . En effet, la métrique induite est simplement $ds^2 = |\omega|^2$. Cette définition induit bien une structure de surface euclidienne à singularités coniques sur S . En effet, si p est un point de X , alors deux cas peuvent se produire : $\omega_p \neq 0$ ou $\omega_p = 0$. Dans le premier, il existe un voisinage U de p où ω ne s'annule pas. Dans ce cas, U est isométrique à un ouvert du plan euclidien. Dans le second cas, on peut trouver un système de coordonnées au voisinage de p où ω est de la forme $z^m dz$ et s'annulant en p pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Un tel voisinage est isométrique à un voisinage de l'apex du cône V_θ pour $\theta = 2\pi(m+1)$. Cette étude donne le théorème suivant :

Théorème. 3.1: Troyanov [10]

Soit S une surface de Riemann compacte, connexe et sans bord et soit ω une différentielle abélienne non nulle sur X . Alors ω définit une structure euclidienne à singularités coniques sur X par $ds^2 = |\omega|^2$.

De plus, les zéros x_1, \dots, x_n de multiplicité m_1, \dots, m_n de ω sont les singularités coniques de la surface plate d'angles respectifs $2\pi(m_1+1), \dots, 2\pi(m_n+1)$

La surface d'arrivée est une surface un peu particulière. Toutes les singularités ont pour angle un multiple de 2π et les applications de recollement (dans le modèle polyédrale) sont des translations ($z \mapsto z + c$). Par conséquent, les surfaces ainsi obtenus sont des surfaces de translation.

On peut se demander si à toute surface de translation S est associée une surface de Riemann munie d'une différentielle abélienne. La réponse est oui et on peut même démontrer un résultat plus puissant.

Pour cela, remarquons que si M est une surface riemannienne, alors on peut oublier la structure riemannienne de M et ne conserver que la mesure des angles sur M . Les applications de changements de cartes deviennent alors des applications conformes. On obtient donc une surface de Riemann X . L'ensemble des surfaces de Riemann associées à X par cette méthode est appelée *la classe conforme de X* .

Si M munie de la métrique ds^2 est dans la classe conforme de X , alors cette dernière peut s'écrire comme l'ensemble des métriques sur M de la forme $f(x,y)ds^2$ où $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction lisse. La *classe conforme singulière de X* est l'ensemble des métriques sur M de la forme $f(x,y)ds^2$ où $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction lisse ne s'annulant qu'en un ensemble fini de points. La structure conforme de X peut être retrouvée aux points où f s'annule par prolongement.

Théorème. 3.2: Troyanov [10]

Soit X une surface de Riemann. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ des points de X . Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in 2\pi\mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n (2\pi - \theta_i) = 2\pi(2 - 2g)$.

Alors il existe une unique surface euclidienne à singularités coniques dans la classe conforme de X ayant x pour singularité d'angle θ .

4 Groupes de Veech et pavage du plan hyperbolique

Cette section se concentre sur l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur les surfaces de translation et les conséquences d'une telle action.

4.1 Groupes de Veech

Si S est une surface de translation, alors, comme les applications de recollement sont des translations, l'action de $GL_2(\mathbb{R})$ sur S est bien définie. Dans le modèle polyédrale, cela consiste à faire agir une matrice sur chacun des polygones. Comme deux côtés recollés sont parallèles, ils restent de même longueur après l'action d'une même matrice.

Nous normalisons l'aire des surfaces considérées si bien que nous ne nous intéressons qu'à l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur S . Enfin, les rotations ne créant pas de nouvelles structures de surfaces plates, nous pouvons définir l'action de $SO_2(\mathbb{R}) \backslash SL_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}$ sur S . Ici, \mathbb{H} désigne le demi-plan hyperbolique, c'est-à-dire $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$ muni de la métrique hyperbolique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Définition. 4.1: Groupe de Veech

Soit S une surface de translation. Le *groupe de Veech* de S noté $\Gamma(S)$ est le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ stabilisant S , c'est-à-dire $\{A \in SL_2(\mathbb{R}) | A \cdot S \text{ est isomorphe à } S\}$.

Deux surfaces de translations sont isomorphes si on peut les translater l'une sur l'autre.

L'un des objectifs de la recherche sur les surfaces plates est de proposer un algorithme permettant de calculer efficacement le groupe de Veech ou des générateurs de celui-ci.

4.2 Triangulation de Delaunay

Une méthode pour calculer le groupe de Veech consiste à engendrer un pavage du plan hyperbolique à l'aide de triangulations de Delaunay [3, 12]. Dans un premier temps, nous présentons la notion de triangulation de Delaunay.

Une triangulation est dite singulière si tous ses sommets sont des singularités.

Définition. 4.2: Triangulation de Delaunay

Une triangulation singulière T d'une surface plate S est dite *de Delaunay* si, pour tout arête e , la somme des angles opposés à e dans T est plus petite que π . Une telle triangulation est dégénérée si le cas d'égalité apparaît au moins une fois.

Une définition pratique alternative consiste à considérer le cercle circonscrit à chaque triangle de T . L'intérieur du disque bordé par ce cercle ne doit contenir aucune singularité. Cette définition étend la notion de triangulation de Delaunay du plan. On peut montrer l'existence et l'unicité d'une telle triangulation comme pour le plan en utilisant le diagramme de Voronoi.

Théorème. 4.1: Unicité et existence des triangulations de Delaunay

Toute surface plate admet une triangulation de Delaunay et si elle n'est pas dégénérée, alors elle est unique.

Le diagramme de Voronoi consiste à considérer pour chaque point p de S l'ensemble V_p des singularités à distance minimale de p en se plaçant dans le revêtement universel pour bien considérer toutes les trajectoires minimisant cette distance. Pour la plupart des points p de S , V_p est de cardinal 1. Pour certains, sur une courbe de dimension 1, V_p est de cardinal 2 et pour un ensemble de points isolés V_p est de cardinal au moins 3. Pour chacun des points dont le cardinal de V_p est au moins 3, on peut tracer le

cercle circonscrit aux singularités de V_p de centre p . Les polygones formés par les sommets de V_p dans ce cercle est un élément de la triangulation de Delaunay de S . Cette construction permet de montrer à la fois l'existence et l'unicité d'une triangulation de Delaunay de S .

4.3 Région d'iso-Delaunay

À présent, on se replace dans le cadre d'une surface de translation S sous l'action de $SO_2(\mathbb{R}) \backslash SL_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}$. À chaque point $u + iv$ de \mathbb{H} est associé la surface $\frac{1}{\sqrt{v}} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & v \end{pmatrix} \cdot S$. La surface S correspond donc au point i . On souhaite alors distinguer si deux surfaces sous l'action de \mathbb{H} ont même triangulation de Delaunay ou non.

Définition. 4.3: Région d'iso-Delaunay

On appelle *région d'iso-Delaunay* une partie connexe $I \subset \mathbb{H}$ telle que $u + iv \in I$, la triangulation de Delaunay associée à $u + iv$ est non dégénérée et si $u' + iv' \in I$ alors la triangulation de $u' + iv'$ et celle de $u + iv$ correspondent.

Théorème. 4.2: Bowman [3]

En respectant la métrique hyperbolique sur \mathbb{H} , chaque région d'iso-Delaunay est convexe et son bord est géodésique par morceaux. Plus précisément, chaque région d'iso-Delaunay est l'intersection d'un nombre fini (borné par la surface) de demi-plans hyperboliques.

L'idée de la preuve de ce théorème est de considérer une surface dans une région d'iso-Delaunay. Alors cette surface possède une unique triangulation de Delaunay. Pour modifier la surface afin de changer la triangulation de Delaunay associée, il faut la modifier suffisamment pour que l'une des arêtes ne vérifient plus la condition de Delaunay (la somme des mesures des angles opposés doit être moins que π). Dans ce cas, l'arête "flip" et est remplacée par l'autre diagonale du quadrilatère. Cette condition est une condition locale pour chaque arête et nous donne une inégalité pour chaque arête. Ainsi, chaque arête de la triangulation donne une condition qui prend la forme d'un demi-plan hyperbolique.

Les régions d'iso-Delaunay permettent de calculer des éléments du groupe de Veech en regardant l'action de ce dernier sur ces régions. Dans le cadre de mon stage de cette année avec Delecroix, nous utilisons les triangulations de Delaunay pour énumérer les connexions de selles. Une connexions de selles est une trajectoire géodésique reliant deux singularités.

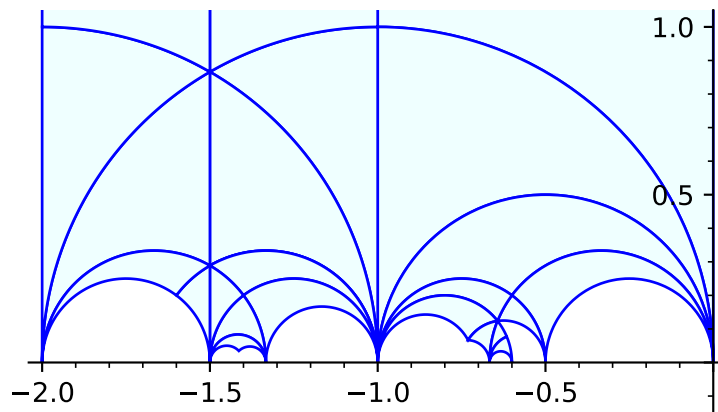


FIGURE 4 – Quelques régions d'iso-Delaunay de la surface présentée à la figure 2

Références

- [1] Dan Archdeacon, C. Paul Bonnington, and Joanna A. Ellis-Monaghan. How to exhibit toroidal maps in space. *Discrete & Computational Geometry*, 38(3), 2007.
- [2] Alexander I. Bobenko and Ivan Izmestiev. Alexandrov’s theorem, weighted delaunay triangulations, and mixed volumes, 2006.
- [3] Joshua P. Bowman. Ullr geodesics, delaunay triangulations, and veech groups. 2008.
- [4] Yuriy Dmitrievich Burago and Viktor Abramovich Zalgaller. *Polyhedral Realizations of Developments*. 1960.
- [5] Yuriy Dmitrievich Burago and Viktor Abramovich Zalgaller. Isometric piecewise-linear imbeddings of two-dimensional manifolds with a poly-hedral metric into \mathbb{R}^3 . 1995.
- [6] Vincent Delecroix, W. Patrick Hooper, and Julian R uth. sage-flatsurf, July 2023.
- [7] Francis Lazarus and Florent Talerie. A Universal Triangulation for Flat Tori. In Xavier Goaoc and Michael Kerber, editors, *38th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2022)*, volume 224 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 53 :1–53 :18, Dagstuhl, Germany, 2022. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f ur Informatik.
- [8] H. Maehara. On a proper acute triangulation of a polyhedral surface. *Discrete Mathematics*, 311(17) :1903–1909, 2011.
- [9] Shubhangi Saraf. Acute and nonobtuse triangulations of polyhedral surfaces. *Eur. J. Comb.*, 30 :833–840, 2009.
- [10] Marc Troyanov. Surfaces euclidiennes   singularit es coniques. *L’Enseignement Math ematique*, 32(2) :79–94, 1986.
- [11] Takashi Tsuboi. On origami embeddings of flat tori. 07 2020.
- [12] William A. Veech. Bicuspid F-structures and Hecke groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 103(4) :710–745, 04 2011.