

# Introduction au domaine de recherche : Fonctions $G$ et équations différentielles géométriques

Thomas Serafini

Les fonctions  $G$  ont été introduites par Siegel en 1929. Ce sont des séries entières convergentes qui sont solution d'une équation différentielle à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}[x]$  et possèdent des bonnes propriétés arithmétiques, ce qui permet de les étudier sur  $\mathbb{C}$  comme sur  $\mathbb{C}_p$ .

La source principale de fonctions  $G$  est la géométrie algébrique : une famille de variétés algébriques sur de corps de nombres donne naturellement lieu à un opérateur différentiel dit « de Picard-Fuchs » qui exprime la façon dont les classes de cohomologie sur les variétés varient. Le but principal de ce mémoire est d'arriver à comprendre l'énoncé d'un théorème de Yves André qui affirme que les solutions des équations de Picard-Fuchs, appelées fonctions de périodes, sont des fonctions  $G$ . Il est en fait conjecturé que toutes les fonctions  $G$  sont de ce type.

**Conjecture** (Bombieri-Dwork). Toutes les fonctions  $G$  sont solutions d'équations différentielles géométriques.

On commencera par présenter la définition et quelques propriétés des fonctions  $G$  et des opérateurs différentiels associés. On introduira ensuite l'isomorphisme des périodes, qui fait le lien entre la topologie et la structure algébrique d'une variété projective, et on décrira finalement la façon dont les fonctions  $G$  apparaissent dans un contexte géométrique avec la construction de la connexion de Gauss-Manin d'une famille de variétés.

Je remercie chaleureusement Javier Fresán qui m'a proposé d'étudier les fonctions  $G$  et leurs liens avec la géométrie en stage et en thèse, et m'a guidé dans ma découverte de ce domaine passionnant à l'interface entre théorie des nombres et géométrie algébrique.

## Notations et conventions

On note  $\partial_x$  l'opérateur  $\frac{d}{dx}$ . Si  $K$  est un corps, on note  $D_K$  l'algèbre de Weyl sur  $K$ , c'est-à-dire l'anneau non commutatif des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux dans  $K$ . Un élément de  $D_K$  est donc de la forme

$$P(x, \partial_x) = \sum_{j=0}^n P_j(x) \partial_x^j$$

avec  $P_j(x) \in K[x]$ . On note  $\overline{\mathbb{Q}}$  le corps des nombres algébriques. On note  $\Sigma(\mathbb{Q})$  l'ensemble des nombres premiers auquel on ajoute l'infini, et on note  $\Sigma_f(\mathbb{Q})$  l'ensemble des nombres premiers.

Pour tout  $p \in \Sigma(\mathbb{Q})$ , on a une valeur absolue sur  $\mathbb{Q}$  donnée, si  $p \in \Sigma_f(\mathbb{Q})$ , par

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p := p^{v_p(b) - v_p(a)}$$

et par la valeur absolue usuelle  $|\cdot|_\infty$  si  $p = \infty$ .

Soient  $X$  et  $S$  des espaces topologiques et  $f : X \rightarrow S$  une fonction continue. Si  $Z \subseteq S$ , on note  $X_Z := f^{-1}(Z) \subseteq X$ .

On note  $(a)_n$  le symbole de Pochhammer montant, c'est-à-dire qu'on définit

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1).$$

## 1 Les fonctions $G$

Les fonctions  $G$  ont été introduites par Siegel en 1929 dans [Sie29] avec les fonctions  $E$  pour étudier des propriétés de transcendance de leurs valeurs. On donne une définition légèrement différente de celle de Siegel.

**Définition 1.1** (Fonctions  $G$ ). Soit  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[x]]$  une série entière. On dit que  $y$  est une fonction  $G$  si :

- (i) Il existe  $P \in D_{\overline{\mathbb{Q}}}$  tel que  $P y = 0$  ;
- (ii) Il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|\sigma(a_n)| \leq A^n$ ,
- (iii) Il existe  $B > 0$  et une suite d'entiers  $(d_n)_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  satisfaisant à  $d_n \leq B^n$  pour tout  $n \geq 1$ , telle que  $d_n a_i$  est un entier algébrique pour tous  $i, n$  entiers satisfaisant à  $i \leq n$ .

*Remarque.* Le fait que  $y$  soit solution d'une équation différentielle de la forme

$$\sum P_i(x) \partial_x^i y(x) = 0$$

implique que les  $a_n$  sont tous dans un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie de  $\mathbb{Q}$ . En effet, les  $P_i$  ont chacun un nombre fini de coefficients, et appartiennent donc à  $K[x]$ , où  $K$  est l'extension engendrée par tous leurs coefficients. L'équation différentielle  $P y = 0$  impose des relations de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en  $n$  sur les coefficients  $a_n$ . En considérant l'extension (finie)  $L/K$  engendrée par assez des premiers termes de  $y$ , on a donc  $y \in L[[x]]$ .

La condition de croissance  $|\sigma(a_n)| \leq A^n$  pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  se traduit alors par la condition que la série  $\tau \cdot y := \sum \tau(a_n) y^n$  ait un rayon de convergence non nul pour tout plongement  $\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ .

**Exemple.** Donnons quelques exemples de (classes de) fonctions  $G$  :

- Les séries entières algébriques sur  $\overline{\mathbb{Q}}(x)$  sont des fonctions  $G$  (c'est principalement une conséquence du théorème d'Eisenstein, on peut par exemple voir l'article [Sch90] de Schmidt à ce sujet).
- Par un théorème de Siegel (voir [Sie50], Chap. II, §9), les fonctions hypergéométriques, c'est-à-dire de la forme

$${}_p F_{p-1} \left[ \begin{matrix} a_1 & \dots & a_p \\ b_p & \dots & b_{p-1} \end{matrix} \middle| x \right] = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_{p-1})_n n!} x^n$$

sont des fonctions  $G$  dès que les paramètres  $a_i$  et  $b_j$  sont rationnels pour tous  $i, j$  (et les  $b_j$  ne sont pas des entiers négatifs).

La condition, pour un opérateur différentiel, d'admettre une base de solutions données par des fonctions  $G$  est très restrictive, et les opérateurs différentiels qui ont cette propriété sont très particuliers. Pour comprendre cette particularité, on va commencer traduire la condition de croissance géométrique des dénominateurs communs (les entiers  $d_n$ ) comme une condition sur la hauteur (logarithmique) des coefficients.

**Définition 1.2.** Soit  $a \in \mathbb{Q}$ . On écrit  $a$  sous la forme  $a = r/s$  avec  $r$  et  $s$  des entiers premiers entre eux. La hauteur de  $a$  est alors définie comme

$$h(a) = \max(\log |r|_\infty, \log |s|_\infty).$$

La hauteur d'un nombre rationnel quantifie sa « complexité » au-delà de sa valeur absolue, dans le sens où même si les nombres rationnels 1 et  $\frac{1147}{1076}$  sont très proches en valeur absolue, le deuxième est clairement plus compliqué.

On peut voir que la hauteur de  $a$  est aussi donnée par la formule

$$h(a) = \sum_{p \in \Sigma(\mathbb{Q})} \log^+ |a|_p$$

où  $\log^+ t = \max(\log(t), 0)$ . En effet, le terme  $\log^+ |a|_p$  est non nul si et seulement si  $|a|_p > 1$ , ce qui revient à demander à ce que  $p$  divise  $s$ . Dans ce cas, on a  $|a|_p = |r/s|_p = 1/|s|_p$ , et donc

$$\sum_{p \in \Sigma_f(\mathbb{Q})} \log^+ |a|_p = - \sum_{p|s} \log |s|_p = \log |s|_\infty$$

car on a la formule du produit  $|s|_\infty \prod_{p|s} |s|_p = 1$  pour tout  $s \in \mathbb{Z}$ . On trouve donc

$$\sum_{p \in \Sigma(\mathbb{Q})} \log^+ |a|_p = \log^+ |a|_\infty + \log |s|_\infty$$

qui vaut  $\log |r|_\infty$  si  $|r|_\infty > |s|_\infty$ , et  $\log |s|_\infty$  sinon. On peut étendre la hauteur à des  $k$ -uplets de nombres rationnels, par la formule :

$$h(a_1, \dots, a_k) = \sum_{p \in \Sigma(\mathbb{Q})} \max_{1 \leq i \leq k} (\log^+ |a_i|_p).$$

Cette formule n'a pas d'équivalent facile en termes de numérateurs et dénominateurs, mais elle mesure la complexité « totale » du  $k$ -uplet.

On peut finalement définir la taille d'une série entière à coefficients dans  $\mathbb{Q}[[x]]$  comme

$$\sigma \left( \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(a_0, \dots, a_n).$$

La taille d'une série  $y$  mesure la vitesse de croissance des hauteurs de ses coefficients. Avec quelques manipulations, on peut montrer que  $\sigma(y) < \infty$  est équivalent à ce que  $y$  satisfasse les conditions (ii) et (iii) de la définition 1.1.

La définition des hauteurs sur un corps de nombres quelconque étant un peu plus compliquée, on se contentera de parler de fonctions  $G$  sur  $\mathbb{Q}$ . Cette restriction est finalement assez faible, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 1.3** ([DGS94], Chap. VIII, Prop. 1.4). *Soient  $K$  un corps de nombres, on choisit une  $\mathbb{Q}$ -base  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  de  $K$ . Soit  $y_1, \dots, y_d \in \mathbb{Q}[[x]]$ . Alors*

$$y = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_d y_d$$

*est une fonction  $G$  si et seulement si les  $y_i$  sont des fonctions  $G$ .*

Il est connu que les propriétés des solutions d'une équation différentielle permettent d'apprendre des choses sur l'équation elle-même : par exemple, si une équation différentielle  $Py = 0$  admet au voisinage de  $\alpha \in \mathbb{C}$  une base de solutions qui sont des séries entières convergentes, on sait que  $P$  a au pire une singularité régulière en 0, c'est-à-dire que si  $P = \sum_{i=0}^n P_i(x)\partial_x^i$ , la fonction méromorphe  $P_i(x)/P_n(x)$  a un pôle d'ordre au plus  $n - i$  en  $\alpha$ .

Cette philosophie nous pousse à étudier les propriétés d'une équation différentielle (minimale) satisfaite par une fonction  $G$ . Pour étudier les propriétés d'une équation différentielle en général, il s'avère souvent pratique de l'exprimer sous forme matricielle : étant donné

$$P = \sum_{i=0}^n P_i(x)\partial_x^i \in D_{\mathbb{Q}}$$

avec  $P_n(x) \neq 0$ , on considère la matrice

$$G_P(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{P_0}{P_n} & -\frac{P_1}{P_n} & \dots & -\frac{P_{n-1}}{P_n} \end{bmatrix}.$$

Si l'on pose  $y_i = \partial_x^i y$  pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , le vecteur  $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{n-1})$  vérifie le système matriciel

$$\partial_x \mathbf{y}(x) = G_P(x)\mathbf{y}(x)$$

si et seulement si  $y$  vérifie l'équation  $Py = 0$ .

Pour  $G(x) \in M_n(\mathbb{Q}(x))$ , résoudre  $\partial_x \mathbf{y} = G\mathbf{y}$  au voisinage d'un point non singulier  $\alpha \in \mathbb{Q}$  revient à trouver une solution fondamentale matricielle, c'est-à-dire un  $Y(x) \in \text{GL}_n(\mathbb{Q}[[x-\alpha]])$  telle que  $\partial_x Y = GY$  et  $Y(\alpha) = 1_n$  (toute solution s'écrit alors  $\mathbf{y}(x) = Y(x)\mathbf{y}(\alpha)$ ).

Pour exprimer la solution fondamentale, on définit une suite de matrices de  $M_n(\mathbb{Q}(x))$  par  $G_0(x) = 1_n$  et  $G_{i+1} = \partial_x G_i + G_i G$  : ces matrices satisfont à  $\partial_x^i Y = G_i Y$ . Le développement de Taylor au voisinage d'un  $\alpha \in \mathbb{Q}$  non singulier d'une solution est alors :

$$Y(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{G_i(\alpha)}{i!} (x - \alpha)^i.$$

On pourrait être tenté de définir la taille de  $G$  (ou de l'opérateur  $\partial_x - G$ ) localement en  $\alpha$  comme

$$\sigma(G, \alpha) := \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} h \left( \frac{G_0(\alpha)}{0!}, \dots, \frac{G_s(\alpha)}{s!} \right)$$

en considérant la matrice  $G_i(\alpha)$  comme liste de ses coefficients, mais cette hauteur est locale et ne peut pas vraiment prendre en compte les singularités de  $G$ . Pour définir une taille globale, on va utiliser la valeur absolue de Gauss.

**Définition 1.4** (Valeur absolue de Gauss). Soit  $p \in \Sigma_f(\mathbb{Q})$ . On définit sur  $\mathbb{Q}[x]$  la valeur absolue de Gauss comme

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i x^i \right|_{p, \text{gauss}} := \max_i |a_i|_p.$$

On l'étend à  $\mathbb{Q}(x)$  par la formule  $|f/g|_{p, \text{gauss}} := |f|_{p, \text{gauss}} / |g|_{p, \text{gauss}}$ .

La valeur absolue de Gauss est une valeur absolue non archimédienne, c'est-à-dire que pour tous  $f, g \in \mathbb{Q}(x)$ , on a  $|fg|_{p,\text{gauss}} = |f|_{p,\text{gauss}}|g|_{p,\text{gauss}}$  et  $|f+g|_{p,\text{gauss}} \leq \max(|f|_{p,\text{gauss}}, |g|_{p,\text{gauss}})$ . On peut interpréter  $|\cdot|_{p,\text{gauss}}$  fonctionnellement : pour une fraction rationnelle  $f(x)$  sans pôle dans  $\mathbb{Z}_p$ , on a

$$|f(x)|_{p,\text{gauss}} = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} |f(\alpha)|_p.$$

La quantité  $|f|_{p,\text{gauss}}$  mesure en ce sens la valeur absolue de  $f(t)$  en un point « générique »  $t$  de  $\mathbb{Z}_p$ .

On définit la taille d'une matrice  $G \in M_n(\mathbb{Q}(x))$  comme :

$$\sigma(G) := \limsup_{s \rightarrow \infty} \sum_{p \in \Sigma_f(\mathbb{Q})} \max_{1 \leq i \leq s} \log^+ \left| \frac{G_i(x)}{i!} \right|_{p,\text{gauss}}.$$

On pourrait s'inquiéter de l'absence de la valeur absolue réelle dans cette définition mais heureusement, la condition  $\sigma(G) < \infty$  implique que l'opérateur  $\partial_x - G$  est régulier singulier, ce qui implique la positivité du rayon de convergence pour  $|\cdot|_\infty$  des solutions à l'équation associée données par des séries entières.

**Théorème 1.5.** *Soit  $P \in D_{\mathbb{Q}}$  un opérateur différentiel. Sont équivalents :*

- (i)  $\sigma(G_P) < \infty$  ;
- (ii) *Il existe au voisinage d'un certain point non singulier rationnel de  $P$  une base de solutions de  $P_y = 0$  formée de fonctions  $G$  ;*
- (iii) *Il existe au voisinage de tout point de  $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$  une base de solutions de  $P_y = 0$  formée de fonctions de la forme  $x^\alpha \log(x)y(x)$  où  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et  $y$  est une fonction  $G$ .*

*Dans ce cas, on dit que  $P$  est un opérateur de type  $G$ .*

L'implication (ii)  $\implies$  (i) est le théorème de Chudnovsky, que l'on trouve par exemple dans [DGS94], Chap. VIII, Th. 1.5, l'implication (iii)  $\implies$  (ii) est immédiate, et l'implication (i)  $\implies$  (iii) est donnée par [And89], Chap. VI, page 109.

## 2 Notions de base de géométrie algébrique complexe

### 2.1 Variétés affines et projectives

Pour plus de détails et une introduction plus formelle à la notion de variété algébrique, on pourra consulter le premier chapitre de [Har77].

**Définition 2.1.** Une variété affine complexe est un sous-ensemble  $X \subseteq \mathbb{C}^n$  défini par l'annulation de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  tels que

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n : f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}.$$

**Définition 2.2.** Une variété projective complexe est un sous-ensemble  $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  défini par l'annulation de polynômes homogènes, c'est-à-dire qu'il existe  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  homogènes tels que

$$X = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : f_1(x_0, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

On munit une variété  $X$  de la topologie de Zariski, dont les fermés sont les sous-variétés affines (respectivement projectives), c'est-à-dire les variétés affines (respectivement projectives) incluses dans  $X$ . L'espace affine  $\mathbb{C}^n$  s'identifie à l'ouvert de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  donné par  $x_0 \neq 0$ , et les variétés affines s'identifient donc à des ouverts de variétés projectives.

On munit également toute variété algébrique  $X$  d'un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$ . Si  $X$  est affine, on définit  $\mathcal{O}_X(U)$  comme l'anneau des fonctions de  $U$  dans  $\mathbb{C}$  qui sont données par des fonctions rationnelles. Si  $X$  est projective, on définit  $\mathcal{O}_X(U)$  comme l'ensemble des fonctions de  $U$  dans  $\mathbb{C}$  données par des fonctions rationnelles homogènes de degré zéro. On peut vérifier que si  $U$  est une variété affine ouverte dans une variété projective  $X$ , on a  $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$  pour tout ouvert  $V \subseteq U$ .

Cette construction est à mettre en parallèle avec d'autres exemples d'espaces munis de faisceaux en anneaux, comme les variétés  $C^r$  avec le faisceau  $\mathcal{C}_X^r$  de fonctions de classe  $C^r$  sur  $X$ , ou les variétés complexes avec le faisceau  $\mathcal{O}_X$  de fonctions holomorphes sur  $X$ . On peut penser à un faisceau en anneaux sur un espace topologique comme un choix des fonctions considérées comme régulières sur  $X$ ; dans notre cas, ce sont les fonctions données par la structure algébrique.

Si les polynômes qui définissent  $X$  peuvent être choisis à coefficients dans un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{C}$ , on dit que  $X$  est définie sur  $K$ . On a dans ce cas la notion de  $X$  en tant que variété algébrique sur  $K$ .

On parlera de variété quasi-projective lorsqu'on considère un ouvert (de Zariski) d'une variété projective : ce terme englobe à la fois les variétés projectives, les variétés affines et des objets un peu entre-deux. On parlera alors simplement de variété algébrique, en omettant le terme « quasi-projective ». On peut aussi définir la notion de morphisme entre deux variétés projectives : un morphisme  $X \rightarrow Y$  est une fonction de  $X$  vers  $Y$  donnée localement (en coordonnées) par des fonctions régulières sur  $X$ .

Soit  $X$  la variété projective définie par des polynômes homogènes  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . On dit que  $X$  est lisse en  $x = [x_0 : \dots : x_n]$  si la matrice de taille  $r \times (n+1)$

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0, \dots, x_n) \right)_{i,j}$$

est de rang au moins  $n-r$  (cette condition ne dépend pas des coordonnées homogènes choisies). On dit qu'une variété quasi-projective  $Y$  est lisse si  $Y$  est un ouvert d'une variété projective  $X$  qui est lisse en tout  $y \in Y$ .

Si  $X$  est une variété algébrique, on note  $X^{\text{an}}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  égal à  $X$  ensemblistement, sur lequel on considère la topologie induite par la topologie analytique usuelle sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Si  $X$  est lisse, le sous-ensemble  $X^{\text{an}}$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  est naturellement muni d'une structure de variété analytique complexe, et on l'appelle l'analytifiée de  $X$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de variétés algébriques, on a un morphisme analytifié  $f^{\text{an}} : X^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$  donné ensemblistement par la même fonction.

## 2.2 Fibrés vectoriels à connexion

On donne ici les différentes notions équivalentes de fibrés à connexion sur des variétés analytiques, et on introduit rapidement les fibrés à connexion sur les variétés algébriques.

**Définition 2.3** (Fibré vectoriel, point de vue géométrique). Soit  $X$  une variété analytique complexe. Un fibré vectoriel (géométrique) sur  $X$  est la donnée d'une variété analytique complexe  $E$  munie d'une application holomorphe  $p : E \rightarrow X$  vers  $X$ , et pour tout  $x \in X$ , d'une structure de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie sur  $p^{-1}(x)$ . Pour tout  $x \in X$ , on demande à ce qu'il existe un voisinage  $x \in U \subseteq X$ , un entier  $n$  et un isomorphisme  $\phi_U : p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{C}^n$  qui est compatible à la projection sur  $U$  et linéaire sur les fibres, c'est-à-dire que

$$p(\phi_U(e)) = p(e)$$

et que l'application linéaire

$$v \mapsto \phi_U^{-1}(x, v)$$

est un isomorphisme entre  $\mathbb{C}^n$  et  $p^{-1}(x)$ .

Souvent, on demande à ce que l'entier  $n_x = \dim_{\mathbb{C}}(p^{-1}(x))$  soit constant, et on parle alors de fibré de rang  $n$ . La définition implique que  $n_x$  est localement constant, et si  $X$  est connexe, l'entier  $n_x$  est nécessairement le même partout.

**Exemples.** Donnons des exemples classiques de fibrés vectoriels sur une variété complexe  $X$  :

- Le fibré trivial de rang  $n$ , égal à  $X \times \mathbb{C}^n$  ;
- Les fibrés tangent et cotangent  $TX$  et  $T^*X$ .

Un objet très important lors de l'étude d'un fibré vectoriel  $p : E \rightarrow X$  est son faisceau de sections holomorphes, donné par

$$U \subseteq X \mapsto \mathcal{E}(U) := \{s : U \rightarrow p^{-1}(U) \text{ holomorphe, telle que } p \circ s = \text{id}_U\}$$

Ce faisceau possède de nombreuses propriétés intéressantes : c'est un faisceau en  $\mathcal{O}_X$ -modules, c'est-à-dire que  $\mathcal{E}(U)$  est un  $\mathcal{O}_X(U)$ -module. En effet, on peut toujours multiplier une section  $s : U \rightarrow p^{-1}(U)$  fibre à fibre par une fonction puisque  $s(x) \in p^{-1}(x)$  qui est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. En fait,  $\mathcal{E}$  est même localement libre dans le sens où tout  $x \in X$  possède un voisinage  $U$  sur lequel  $\mathcal{E}|_U$  est isomorphe (en tant que faisceau de  $\mathcal{O}_U$ -modules) à  $\mathcal{O}_U^n$  pour un certain  $n$  : l'ouvert  $U$  peut simplement être pris comme un ouvert qui trivialisent  $p$ . On a en effet  $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{C}^n$ , et une section holomorphe de la projection  $U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$  est simplement un vecteur de fonctions holomorphes.

Une question se pose alors : peut-on récupérer un fibré vectoriel simplement depuis le faisceau de ses sections ? Etant donné un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libre de rang fini, existe-t-il un fibré vectoriel dont c'est le faisceau de sections holomorphes ? La réponse est oui, et motive cette définition.

**Définition 2.4** (Fibré vectoriel, point de vue faisceautique). Soit  $X$  une variété analytique complexe. Un fibré vectoriel (faisceautique) sur  $X$  est un faisceau en  $\mathcal{O}_X$ -modules qui est localement libre de rang fini.

On a une équivalence de catégories entre les fibrés géométriques et les fibrés faisceautiques, donnée dans un sens par le foncteur qui à un fibré géométrique  $E \rightarrow X$  associe le faisceau de ses sections. Pour prouver que c'est une équivalence de catégories, on passe par la notion de cocycles : on peut consulter par exemple [Voi02], Lemme 4.8.

**Exemples.** Revoyons certains des exemples précédents du point de vue faisceautique.

- Le faisceau des sections du fibré trivial de rang  $n$  est le faisceau  $\mathcal{O}_X^n$  ;
- Le faisceau des sections holomorphes de  $TX$  est le faisceau  $\Theta_X$  des dérivations holomorphes de  $\mathcal{O}_X$ , c'est-à-dire que  $\Theta_X(U)$  est l'ensemble des  $\delta : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$  qui sont  $\mathbb{C}$ -linéaires et satisfont à la règle de Leibniz  $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$  ;

- Le faisceau des sections holomorphes de  $T^*X$  est le faisceau des formes différentielles sur  $X$ , noté  $\Omega_X^1$ .

Il est classique qu'on peut définir la notion de somme directe, de produit tensoriel et de duals de fibrés vectoriels : ces notions sont plus pratiques à manipuler du point de vue des faisceaux. A partir de maintenant, le terme « fibré vectoriel » désignera un fibré faisceautique, et on parlera de l'espace total d'un fibré pour le fibré géométrique correspondant au fibré faisceautique.

Intéressons-nous brièvement au produit tensoriel de faisceaux : si  $\mathcal{A}$  est un faisceau en anneaux sur un espace topologique  $X$  et  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont des faisceaux de  $\mathcal{A}$ -modules, on peut définir le préfaisceau

$$U \mapsto \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{F}(U).$$

Ce n'est pas un faisceau : il est possible que des sections locales qui sont a priori recollables (c'est-à-dire égales sur l'intersection de leurs domaines de définition) ne se recollent pas. Pour régler ce problème, on prend le faisceautisé de ce préfaisceau, essentiellement en recollant les sections locales compatibles entre elles. Si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont des fibrés vectoriels, on peut montrer que leur produit tensoriel est également un fibré vectoriel.

Mis à part cette complication, le produit tensoriel de faisceaux se comporte de manière très similaire au produit tensoriel de modules ou d'espaces vectoriels. On a notamment la compatibilité avec le dual, c'est-à-dire que si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont des fibrés vectoriels sur  $X$ , alors

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} = \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}$$

où  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  est le faisceau

$$U \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U).$$

**Définition 2.5** (Fibré vectoriel à connexion). Soit  $X$  une variété analytique complexe. Un fibré à connexion sur  $X$  est la donnée d'un fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  sur  $X$ , muni d'une application  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

satisfaisant à la règle de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

pour  $f$  section locale de  $\mathcal{O}_X$  et  $s$  section locale de  $\mathcal{E}$ .

Comme  $\Omega_X^1$  est le dual du faisceau des dérivations de  $\mathcal{O}_X$ , on peut interpréter  $\nabla$  comme une règle de dérivation des sections de  $\mathcal{E}$  en définissant, pour  $\theta$  section locale de  $\Theta_X$ , l'application  $\nabla_\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  par

$$\nabla_\theta(s) := \nabla(s)(\theta).$$

La « dérivation »  $\nabla_\theta$  vérifie alors  $\nabla_\theta(fs) = \theta(f)s + f\nabla_\theta(s)$ .

Donnons encore une fois des exemples usuels : le premier exemple est celui du fibré trivial  $\mathcal{O}_X$ , qui est naturellement muni de la connexion donnée par la dérivée extérieure  $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1$ .

Une équation différentielle  $y'(z) = A(z)y(z)$ , sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  avec sa coordonnée naturelle  $z$ , où  $A(z)$  est une matrice à coefficients holomorphes dans  $U$ , donne une connexion sur le fibré trivial  $(\mathcal{O}_U)^n$  par la formule

$$\nabla \left( \begin{bmatrix} y_1(z) \\ \vdots \\ y_n(z) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y_1'(z) \\ \vdots \\ y_n'(z) \end{bmatrix} dz - A \cdot \begin{bmatrix} y_1(z) \\ \vdots \\ y_n(z) \end{bmatrix} dz.$$

Les solutions de l'équation sur un ouvert  $U$  correspondent aux sections plates de la connexion, c'est-à-dire les  $s \in \mathcal{E}(U)$  satisfaisant à  $\nabla(s) = 0$ . Ici, on a une coordonnée naturelle sur  $U$ , la coordonnée  $z$ , qui donne une dérivée naturelle  $\partial_z$  et une forme différentielle naturelle  $dz$ . Sur une variété complexe quelconque, cette coordonnée privilégiée n'existe plus, et la notion de fibré à connexion vient généraliser la notion (locale) d'équation différentielle matricielle.

En fait, toute connexion est localement de cette forme. Sur une base de sections locales  $e_1, \dots, e_n$  de  $\mathcal{E}$ , une connexion agit par

$$\nabla \left( \sum_i f^i e_i \right) = \sum_i df^i \otimes e_i + \sum_{i,j} f^i A_i^j(z) e_j$$

ou, autrement dit, on a localement  $\nabla = d + A$  où  $A = (A_i^j(z))_{i,j}$  est une matrice de forme différentielles. Si l'on choisit des coordonnées  $z_1, \dots, z_d$  sur  $X$ , on a :

$$\nabla_{\partial_{z_k}} \left( \sum_i f^i e_i \right) = \sum_i \partial_{z_k}(f^i) e_i + \sum_{i,j} f^i A_{i,k}^j e_j$$

où  $A_k$  est la projection de  $A$  sur la forme linéaire  $dz_k$ .

Une connexion  $\nabla$  s'étend en des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires  $\Omega_X^p \otimes \mathcal{E} \rightarrow \Omega_X^{p+1} \otimes \mathcal{E}$ , que l'on note souvent encore  $\nabla$ . L'extension se fait sur les sections par la formule

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^p \omega \wedge \nabla(s)$$

similaire à la formule de la dérivée extérieure  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ .

**Définition 2.6** (Fibré plat). Soient  $X$  variété complexe et  $(\mathcal{E}, \nabla)$  un fibré vectoriel sur  $X$ . On dit que le fibré  $\mathcal{E}$  est plat, ou que  $\nabla$  est intégrable, si  $\nabla \circ \nabla$  est l'application nulle de  $\mathcal{E}$  dans  $\Omega_X^2 \otimes \mathcal{E}$ .

On peut calculer que pour tout entier  $p$ , pour  $\omega$  section locale de  $\Omega_X^p$  et  $s$  section locale de  $\mathcal{E}$ , on a

$$(\nabla \circ \nabla)(\omega \otimes s) = (-1)^p \omega \wedge \nabla^2(s)$$

donc  $\nabla \circ \nabla$  est nulle sur tout  $\Omega^p \otimes \mathcal{E}$  si et seulement si elle est nulle sur  $\mathcal{E}$ .

Un calcul en coordonnées nous enseigne que si  $\theta$  et  $\xi$  sont des sections locales de  $\Theta_X$  et  $s$  est une section locale de  $\mathcal{E}$ , on a

$$(\nabla \circ \nabla)(s)(\theta \wedge \xi) = [\nabla_\theta, \nabla_\xi](s) - \nabla_{[\theta, \xi]}(s).$$

Ainsi, dire que  $\nabla$  est intégrable revient à dire qu'elle induit une représentation de l'algèbre de Lie  $\Theta_X$  sur  $\mathcal{E}$  compatible avec la règle de Leibniz.

Terminons ces bases sur les fibrés vectoriels en donnant rapidement la définition d'un fibré vectoriel algébrique, ainsi que quelques exemples.

**Définition 2.7** (Fibré vectoriel algébrique). Soit  $X$  une variété algébrique. Un fibré vectoriel algébrique sur  $X$  est un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules qui est localement libre (dans la topologie de Zariski).

Le premier exemple est, comme d'habitude, le fibré trivial : si  $X$  est une variété algébrique, le fibré  $\mathcal{O}_X^n$  est un fibré vectoriel algébrique de rang  $n$ .

Si  $X$  est algébrique lisse, les fibrés  $\Theta_X$  et  $\Omega_X^1$  peuvent être définis de manière similaire au cas analytique :  $\Theta_X$  est le faisceau des dérivations  $\mathbb{C}$ -linéaires de l'algèbre  $\mathcal{O}_X$  et  $\Omega_X^1$  est son dual.

**Définition 2.8** (Fibré à connexion algébrique). Soit  $X$  une variété algébrique. Un fibré à connexion sur  $X$  est la donnée d'un fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  sur  $X$  muni d'une application  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

vérifiant la règle de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s).$$

On peut, comme dans le cas des fibrés analytiques, étendre  $\nabla$  aux différentielles supérieures, et on dit que  $\nabla$  est intégrable si  $\nabla \circ \nabla = 0$ .

Comme les variétés, les fibrés vectoriels et les connexions peuvent être analytifiés. La définition précise ne sera pas donnée ici ; on peut par exemple penser à  $\mathcal{E}^{\text{an}}$  comme le fibré vectoriel correspondant aux sections de l'espace total de  $\mathcal{E}$ , et l'analytifié d'une connexion correspond simplement à prendre la connexion donnée localement par les mêmes matrices en considérant les fonctions algébriques comme des fonctions holomorphes.

L'analytification se comporte comme attendu avec les fibrés pouvant être définis algébriquement et analytiquement, notamment  $\mathcal{O}_X^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ , mais aussi  $(\Omega_X^p)^{\text{an}} = \Omega_{X^{\text{an}}}^p$ , et  $(\Theta_X)^{\text{an}} = \Theta_{X^{\text{an}}}$ .

### 3 Connexions de Gauss-Manin et fonctions des périodes

Dans toute cette section, on fixe un corps de nombres  $K$  et un plongement de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . On va d'abord approcher l'isomorphisme des périodes pour les variétés projectives sur  $K$ , puis on verra comment cet isomorphisme se comporte avec la déformation des variétés.

#### 3.1 L'isomorphisme des périodes

Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $K$ . L'intégration des formes algébriques  $C^\infty$  complexes sur  $X^{\text{an}}$  contre les cycles donne un accouplement parfait

$$H_p^{\text{Sing}}(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} H_{\text{dR}}^p(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$[\sigma] \otimes [\omega] \mapsto \int_{\sigma} \omega$$

qui fournit un isomorphisme dit « des périodes » entre la cohomologie de de Rham  $H_{\text{dR}}^p(X, \mathbb{C})$  et la cohomologie singulière  $H_{\text{Sing}}^p(X, \mathbb{C})$ .

Sur une variété algébrique, on peut aussi définir la cohomologie de de Rham en utilisant les fibrés vectoriels  $\Omega_X^p$ .

**Théorème 3.1** ([Har77], Chap. III, Th. 1.1). *Soit  $X$  un espace topologique. Il existe une famille de foncteurs notés  $H^p(X, -)$  de la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur  $X$  vers la catégorie des groupes abéliens tels que  $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$  et si*

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

*est une suite exacte de faisceaux, alors on a une suite exacte longue en cohomologie*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{E}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^{p-1}(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{E}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Un cas important de cohomologie des faisceaux est le suivant : si  $X$  est une variété topologique, la cohomologie du faisceau  $A_X$  des fonctions localement constantes à valeurs dans un anneau  $A$  est isomorphe à la cohomologie singulière de  $X$  à coefficients dans  $A$ . On peut trouver une preuve de ce fait, par exemple, dans le livre [Spa66], section 8, corollaire 8 et section 9, corollaire 7.

On peut définir sur une variété algébrique projective  $X$  la cohomologie de de Rham algébrique

$$H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^q(X, \Omega_X^p).^1$$

Si  $X$  est définie sur  $K$ , on a une notion de formes différentielles algébriques définies sur  $K$  (essentiellement les différentielles des fonctions données par des fonctions rationnelles à coefficients dans  $K$ ) et on obtient une notion de cohomologie de de Rham sur  $X$  à coefficients dans  $K$ . On a même un isomorphisme naturel :

$$H_{\text{dR}}^k(X, K) \otimes_K \mathbb{C} \simeq H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{C}).$$

Si  $X$  est une variété projective lisse, on a la décomposition de Hodge sur  $X^{\text{an}}$  (voir [Voi02], Chap. 6 pour la décomposition sur les variétés Kähler compactes, et section 3.2.2 pour le fait que les variétés projectives sont Kähler)

$$H_{\text{dR}}^k(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^q(X^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}}^p)$$

Les cohomologies  $H^q(X^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}}^p)$  et  $H^q(X, \Omega_X^p)$  n'ont a priori pas grand-chose à voir, si ce n'est qu'on a un morphisme

$$H^q(X, \Omega_X^p) \rightarrow H^q(X^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}}^p)$$

donné par le foncteur d'analytification. Un principe fondamental en géométrie algébrique complexe est alors le principe GAGA, qui relie les cohomologies analytique et algébrique d'une variété projective : la première instance est due à Serre en 1956 dans [Ser56].

**Théorème 3.2** ([Ser56], Th. 1). *Soient  $X$  une variété algébrique projective et  $\mathcal{F}$  un faisceau  $\mathcal{O}_X$ -cohérent (par exemple un fibré vectoriel) sur  $X$ . L'analytification induit un isomorphisme entre les cohomologies*

$$H^p(X, \mathcal{F}) \simeq H^p(X^{\text{an}}, \mathcal{F}^{\text{an}}).$$

En appliquant ce théorème aux fibrés  $\Omega_X^p$ , on a un isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^p(X, \mathbb{C}) \simeq H_{\text{dR}}^p(X^{\text{an}}, \mathbb{C}).$$

On peut alors restreindre l'isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^p(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{dR}}^p(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{dR}}^p(X^{\text{an}}, \mathbb{C})$$

à  $H_{\text{dR}}^p(X, K) \subseteq H_{\text{dR}}^p(X, \mathbb{C})$ , ce qui donne naturellement une notion de classe de de Rham à coefficients dans  $K$  sur  $X^{\text{an}}$ .

---

1. L'égalité présentée ici n'est pas vraiment une définition de la cohomologie de de Rham algébrique mais un théorème, qui est mis en défaut si  $X$  n'est pas projective. La définition générale de la cohomologie de de Rham algébrique fait intervenir l'hypercohomologie ou les catégories dérivées, on pourra par exemple consulter [Voi02], Chap. 8 à ce sujet.

On s'intéresse alors à l'accouplement entre cycles et formes différentielles restreint à  $H_p^{\text{Sing}}(X^{\text{an}}, \mathbb{Q})$  d'une part et à  $H_{\text{dR}}^p(X, K)$  d'autre part. Il est non dégénéré car

$$H_p^{\text{Sing}}(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) = H_p^{\text{Sing}}(X^{\text{an}}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

par le théorème des coefficients universels et

$$H_{\text{dR}}^p(X, \mathbb{C}) = H_{\text{dR}}^p(X, K) \otimes_K \mathbb{C}$$

mais il n'en reste pas moins à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On a donc un accouplement non dégénéré

$$H_p^{\text{Sing}}(X^{\text{an}}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_{\text{dR}}^p(X, K) \rightarrow \mathbb{C}.$$

On appelle anneau des périodes de  $X$  l'anneau engendré par l'image de l'accouplement dans  $\mathbb{C}$  ou, de manière équivalente, l'anneau engendré par les coefficients d'une matrice représentant l'isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^p(X, K) \otimes_K \mathbb{C} \simeq H_{\text{Sing}}^p(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

dans une  $K$ -base de  $H_{\text{dR}}^p(X, K)$  et une  $\mathbb{Q}$ -base de  $H_{\text{Sing}}^p(X, \mathbb{Q})$ .

### 3.2 Les fonctions de périodes

Dans cette section finale, on décrit la construction analytique de la connexion de Gauss-Manin pour une famille de variétés, et son rôle dans l'étude des périodes. Pour d'autres références, on pourra consulter le début de [CMP17] qui décrit la construction de la connexion de Gauss-Manin dans le cas de la famille de Legendre, ou le livre [Voi02], plus difficile, qui détaille notamment la construction de la connexion de Gauss-Manin dans la section 9.2.

La donnée que l'on considère est une famille de variétés algébriques  $(X_s)_{s \in S}$  paramétrée par une variété algébrique  $S$ . Plus précisément, une famille de variétés algébriques est un morphisme  $f : X \rightarrow S$  entre variétés algébriques lisses, qui est propre, lisse et surjectif. Ces conditions reviennent essentiellement à demander à ce que  $f^{\text{an}}$  soit une submersion propre et surjective. Si l'on oublie la structure analytique complexe sur  $X^{\text{an}}$ , le théorème d'Ehresmann dit que  $f^{\text{an}}$  est alors une fibration localement triviale : en particulier, les  $X_s^{\text{an}}$  sont diffeomorphe entre elles.

L'exemple-type de tels morphismes est l'exemple des morphismes projectifs lisses. On dit que  $f : X \rightarrow S$  est projectif s'il se factorise comme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times S \\ & \searrow f & \downarrow \text{pr}_2 \\ & & S \end{array}$$

où  $i$  est une immersion fermée et  $\text{pr}_2$  est la projection sur la deuxième coordonnée. Dans ce cas, la variété  $X_s$  est projective pour tout  $s \in S$ .

**Exemple.** On définit la famille de courbes elliptiques

$$E = \{([x : y : z], s) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} : y^2 z = x(x - z)(x - sz)\}.$$

La famille  $E \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  donnée par la projection sur la deuxième coordonnée est appelée famille de Legendre, et elle a été extensivement étudiée (on peut par exemple consulter l'introduction de [CMP17]).

On va définir des fibrés à connexion sur  $S$  dont les fibres s'identifient à la cohomologie de de Rham des fibres : la connexion donne une unique manière d'étendre les classes de cohomologie de de Rham d'une fibre  $X_s^{\text{an}}$  aux classes avoisinantes.

Pour ce faire, on va utiliser la correspondance entre systèmes locaux et fibrés à connexion intégrable.

**Définition 3.3** (Systèmes locaux). Soit  $L$  un faisceau sur un espace topologique  $X$ . On dit que  $L$  est un système local (de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels) si pour tout  $x \in X$ , il existe un ouvert  $U$ , voisinage de  $x$ , tel que  $L|_U$  est isomorphe au faisceau  $\mathbb{C}_U^n$  des fonctions localement constantes sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ .

Comme dans le cas des fibrés vectoriels, l'entier  $n$  dépend seulement de la composante connexe de  $x$ , et on peut demander à ce qu'il ne dépende pas du tout de  $x$ .

L'exemple le plus basique de système local est, pour  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, le faisceau localement constant  $V_X$  des fonctions localement constantes sur  $X$  à valeurs dans  $V$ . Un autre exemple habituel de système local est l'exemple des solutions locales d'une équation différentielle, ou des sections plates d'une connexion.

**Théorème 3.4** (Cauchy-Kowalewski, voir [Voi02], Lemme 9.12). Soient  $X$  une variété analytique complexe et  $(\mathcal{E}, \nabla)$  un fibré à connexion intégrable sur  $X$ . Soit également  $E \rightarrow X$  l'espace total du fibré. On note  $\mathcal{E}^\nabla$  le faisceau des sections plates de  $\nabla$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{E}^\nabla(U) := \{s \in \mathcal{E}(U) : \nabla(s) = 0\}.$$

Ce faisceau est un système local, et un isomorphisme local est donné par le morphisme condition initiale  $s \in \mathcal{E}^\nabla(U) \mapsto s(x) \in E_x$  sur tout voisinage  $U$  de  $x$  assez petit.

Dans le cas où  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $\nabla = d - A(z)dz$ , avec  $A \in M_n(\mathcal{O}(X))$ , le théorème affirme simplement que l'espace vectoriel des solutions au voisinage d'un point de  $U$  est de dimension  $n$ , et qu'une solution locale est entièrement déterminée par sa valeur en un point.

Un fibré à connexion intégrable donnant un système local par le foncteur  $(\mathcal{E}, \nabla) \mapsto \mathcal{E}^\nabla$ , on peut légitimement se poser la question réciproque : peut-on récupérer une connexion intégrable à partir du faisceau de ses sections plates ?

A priori, le foncteur pertinent est le foncteur  $L \mapsto \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} L$ , avec la connexion  $\nabla(f \otimes s) := df \otimes s$ . Comme  $L$  est localement isomorphe à  $\mathbb{C}_X^n$ , le  $\mathcal{O}_X$ -module  $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$  est localement isomorphe à  $\mathcal{O}_X^n$ , et  $f \otimes s \mapsto df \otimes s$  est une connexion (car  $d(fg) = f dg + g df$ ) intégrable (car  $d \circ d = 0$ ).

De plus, si  $L = \mathcal{E}^\nabla$ , le fibré  $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$  s'identifie naturellement au sous-fibré de  $\mathcal{E}$  engendré localement par ses sections plates. C'est là que l'intégrabilité de  $\nabla$  intervient : un fibré vectoriel à connexion intégrable admet toujours localement une base de sections plates ([Voi02], Lemme 9.12), et on a donc le théorème suivant

**Théorème 3.5.** Soit  $X$  une variété analytique complexe. Les foncteurs

$$(\mathcal{E}, \nabla) \mapsto \mathcal{E}^\nabla$$

et

$$L \mapsto (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} L, f \otimes s \mapsto df \otimes s)$$

réalisent une équivalence de catégories entre la catégorie des systèmes locaux de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels sur  $X$  et la catégorie des fibrés à connexion intégrable sur  $X$ .

Ce théorème est l'un des nombreux avatars de la correspondance de Riemann-Hilbert, qui met en correspondance des objets de nature topologique (systèmes locaux ou faisceaux constructibles, représentations du groupe fondamental...) et des objets de nature analytique, voire algébrique (fibrés à connexion, fibrés à connexion méromorphe,  $\mathcal{D}$ -modules holonomes réguliers...).

On va sans plus tarder appliquer ce théorème à notre cas : on voudrait étendre des classes de cohomologie d'une fibre à des fibres avoisinantes. On définit le système local  $H_{\mathbb{C}}^p$ , qui est le faisceau sur  $S^{\text{an}}$  associé au préfaisceau :

$$U \mapsto H_{\text{Sing}}^p(X_U^{\text{an}}, \mathbb{C}).$$

Si  $U$  est contractile et trivialisé  $f^{\text{an}}$ , la cohomologie singulière  $H_p^{\text{Sing}}(X_U^{\text{an}}, \mathbb{C})$  de  $X_U$  s'identifie à  $H_p^{\text{Sing}}(X_s^{\text{an}}, \mathbb{C})$  pour tout  $s \in U$ , car  $X_U^{\text{an}} \simeq X_s^{\text{an}} \times U$  se rétracte par déformation forte sur  $X_s^{\text{an}}$ . Cette construction fonctionne aussi avec un corps différent de  $\mathbb{C}$ , et on peut par exemple définir le système local  $H_{\mathbb{Q}}^p$  de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels.

Au système local  $H_{\mathbb{C}}^p$ , on associe le fibré de Hodge  $\mathcal{H}_{X^{\text{an}}/S^{\text{an}}}^p = H_{\mathbb{C}}^p \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S^{\text{an}}}$ , et la connexion correspondante sera appelée la connexion de Gauss-Manin. Pour comprendre la connexion de Gauss-Manin, rappelons-nous de l'isomorphisme des périodes  $H_{\text{Sing}}^p(X_s^{\text{an}}, \mathbb{C}) \simeq H_{\text{dR}}^p(X_s^{\text{an}}, \mathbb{C})$  donné par l'accouplement

$$H_p^{\text{Sing}}(X_s^{\text{an}}, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} H_{\text{dR}}^p(X_s^{\text{an}}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

La connexion de Gauss-Manin permet d'étendre cet isomorphisme aux fibres au voisinage de  $s$  d'une manière compatible à la famille considérée : si l'on choisit une classe de de Rham  $[\omega] \in H_{\text{dR}}^p(X_s^{\text{an}}, \mathbb{C})$ , la connexion de Gauss-Manin permet de l'étendre en une famille holomorphe de classes  $[\omega_t]_{t \in U}$ , qui est solution de l'équation différentielle associée à  $\nabla$ .

Le processus décrit jusqu'ici n'avait pas nécessairement besoin de provenir d'un morphisme de variétés algébriques : la connexion de Gauss-Manin existe pour n'importe quelle surjection propre et submersive entre variétés analytiques complexes.

En revanche, l'origine algébrique du morphisme conduit à un coup de théâtre : la connexion de Gauss-Manin est elle aussi d'origine algébrique (C'est une conséquence de [Voi02], Prop. 17.5 : la différentielle dans la suite spectrale est définie au niveau des complexes algébriques) ! Si  $X$  et  $S$  sont des variétés sur un corps de nombres  $K$ , et  $f$  est un morphisme défini sur  $K$ , alors le fibré à connexion  $(\mathcal{H}_{X^{\text{an}}/S^{\text{an}}}^p, \nabla)$  est l'analytifié d'un fibré à connexion algébrique que l'on notera  $\mathcal{H}_{X/S}^p$ , défini sur  $K$ , dont la fibre en  $s$  est  $H_{\text{dR}}^p(X_s, K)$ .

L'isomorphisme des périodes possède donc une version relative, qui donne un isomorphisme

$$\left(\mathcal{H}_{X/S}^p\right)^{\text{an}} = \mathcal{H}_{X/S}^p \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^{\text{an}}} \simeq H_{\mathbb{Q}}^p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{S^{\text{an}}}.$$

Comme le fibré  $\mathcal{H}_{X/S}^p$  est défini sur  $K$ , on peut trouver localement une base de sections définies sur  $K$ , et on peut sur un ouvert contractile faire un choix de base de  $H_{\mathbb{Q}}^p$  en étendant les classes de cohomologie comme décrit plus haut.

Cette version relative des périodes donne naturellement, en se restreignant aux fibres, une variation en  $s$  de la matrice des périodes correspondant à l'isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^p(X, K) \otimes_K \mathbb{C} \simeq H_{\text{Sing}}^p(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

dans les bases données par les bases de sections des fibrés, et dont les coefficients sont des fonctions holomorphes en  $s$ , appelées *fonctions des périodes*.

Dans le cas où  $S$  est une courbe (par exemple un ouvert de Zariski de  $\mathbb{C}$ ), on a une coordonnée  $z$  sur  $S$ . Comme  $\mathcal{H}_{X/S}^p$  est localement libre de rang  $n$  sur  $\mathcal{O}_S$ , si l'on choisit une section locale  $[\omega_z]$  de  $\mathcal{H}_{X/S}^p$ , la famille

$$[\omega_z], \nabla_{\partial_z}[\omega_z], \dots, (\nabla_{\partial_z})^n [\omega_z]$$

satisfait une relation de la forme

$$\sum_{i=0}^n f_i(z) (\nabla_{\partial_z})^i [\omega_z] = 0$$

où les  $f_i$  sont des sections locales de  $\mathcal{O}_S$ . Si l'on considère les coefficients  $y_j(z) = \int_{\sigma_j} \omega_z$  de  $\omega_z$  dans une base de sections plates de la connexion de Gauss-Manin, ces fonctions satisfont pour tout  $j$  l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^n f_i(z) \partial_z^i y_j(z) = 0.$$

Les équations différentielles obtenues de cette façon sont appelées « équations de Picard-Fuchs », et les fonctions de périodes satisfont toujours de telles équations.

L'étude de ces fonctions des périodes est un sujet important, car elles donnent beaucoup d'information sur la famille de variétés. Dans le cas d'une famille définie sur un corps de nombres, Yves André a prouvé que les fonctions de périodes sont des fonctions  $G$ . En fait, on a même mieux : On appelle équation différentielle géométrique toute équation de type  $Py = 0$  avec  $P \in D_{\overline{\mathbb{Q}}}$  produit de facteurs irréductibles d'opérateurs différentiels de Picard-Fuchs.

**Théorème 3.6** ([And89], Chap. V, p. 110). *Les opérateurs différentiels géométriques sont des opérateurs de type  $G$ .*

Une éventuelle réciproque à ce théorème est l'objet de la conjecture de Bombieri-Dwork, mentionnée en introduction, qui est encore aujourd'hui ouverte.

D'autres conjectures portent sur les fonctions  $G$  : il a été conjecturé pendant longtemps que les fonctions  $G$  sont toutes obtenues par substitution algébrique à partir des fonctions hypergéométriques (c'est-à-dire qu'elles sont toutes dans la  $\overline{\mathbb{Q}(x)}$ -algèbre engendrée par les  $F(y(x))$ , où  $y(x)$  est une fonction algébrique vérifiant  $y(0) = 0$  et  $F$  est hypergéométrique), mais on s'attend à ce que ce soit faux, notamment au vu d'un résultat négatif similaire sur les fonctions  $E$  prouvé par Fresán et Jossen dans [FJ21].

On peut cependant s'attendre à ce que les fonctions  $G$ , ou au moins les fonctions de périodes, soient réalisables comme spécialisations à une variable de fonctions hypergéométriques à plusieurs variables. En particulier, Gel'fand, Kapranov et Zelevinskii ont introduit en 1989 dans [GZK89] une très large classe de systèmes d'équations différentielles en plusieurs variables qui englobent toutes les autres notions de fonctions hypergéométriques en plusieurs variables. Sturmfels a prouvé dans [Stu00] que les fonctions algébriques sont des spécialisations de fonctions GKZ-hypergéométriques, mais la question des fonctions des périodes, ou des fonctions  $G$  en général reste encore ouverte aujourd'hui.

## Références

- [And89] Yves ANDRÉ. *G-Functions and Geometry*. Wiesbaden, Germany : Vieweg+Teubner Verlag, 1989.
- [CMP17] James CARLSON, Stefan MÜLLER-STACH et Chris PETERS. *Period Mappings and Period Domains*. Cambridge University Press, 2017.
- [DGS94] Bernard DWORK, Giovanni GEROTTO et Francis J. SULLIVAN. *An Introduction to G-Functions. (AM-133)*. Princeton, NJ, USA : Princeton University Press, 1994.
- [FJ21] Javier FRESÁN et Peter JOSSEN. “A non-hypergeometric  $E$ -function”. In : *Ann. Math.* 194.3 (2021), p. 903-942.
- [GZK89] Israel M. GEL’FAND, Andrei ZELEVINSKII et Mikahil KAPRANOV. “Hypergeometric functions and toral manifolds”. In : *Funct. Anal. Appl.* 23.2 (1989), p. 94-106.
- [Har77] Robin HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. New York, NY, USA : Springer, 1977.
- [Sch90] Wolfgang SCHMIDT. “Eisenstein’s theorem on power series expansions of algebraic functions”. In : *Acta Arithmetica* 56.2 (1990), p. 161-179.
- [Ser56] Jean-Pierre SERRE. “Géométrie algébrique et géométrie analytique”. In : *Annales de l’Institut Fourier* 6 (1956), p. 1-42.
- [Sie50] Carl Ludwig SIEGEL. *Transcendental Numbers. (AM-16) (Annals of Mathematics Studies)*. Princeton, NJ, USA : Princeton University Press, 1950.
- [Sie29] Carl Ludwig SIEGEL. “Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen (On some applications of Diophantine approximations)”. In : *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1929).
- [Spa66] Edwin H. SPANIER. *Algebraic Topology*. New York, NY, USA : Springer, 1966.
- [Stu00] Bernd STURMFELS. “Solving algebraic equations in terms of A-hypergeometric series”. In : *Discrete Math.* 210 (2000), p. 171-181.
- [Voi02] Claire VOISIN. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Société Mathématique de France, 2002.