

# Représentations des groupes réductifs réels

Yvann Gaudillot--Estrada

## Introduction

---

Etudier les représentations d'un groupe donné revient à déterminer les différentes façons dont il peut agir sur un espace vectoriel par automorphismes linéaires. En fonction des structures additionnelles présentes sur le groupe, on peut s'intéresser à des catégories plus spécifiques de représentations. L'objet de cet article est de donner au lecteur un aperçu de la théorie des représentations hilbertiennes (actions sur un espace de Hilbert via des opérateurs bornés) des groupes réductifs réels.

Les premiers pas de la théorie des représentations, datant de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, sont généralement attribués à Frobenius et ne concernent que les groupes finis. Néanmoins, au début du siècle suivant, l'éclosion de la mécanique quantique va motiver le développement d'une théorie des représentations unitaires pour une large classe de groupes incluant notamment les groupes de Lie. Cela se comprend sans peine si l'on sait que les symétries d'un système quantique sont implémentées au niveau mathématique par des opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert dont les rayons représentent les différents états possibles du système.

Parmi les grands noms du domaine, on peut citer Weyl et Mackey, dont les travaux ont eu une influence considérable. Le premier apporte d'importantes contributions à la théorie des représentations des groupes de Lie, surtout compacts, dans la deuxième partie des années 20. En particulier, il élabore une généralisation de la décomposition de Fourier aux fonctions

définies sur un groupe compact quelconque [22], fondant ainsi l'analyse harmonique abstraite moderne. Avec cette découverte vient également une théorie des caractères en tout point identique à celle déjà connue pour les groupes finis. Plus tard, dans les années 50, Mackey aura une approche très générale, développant des outils issus de l'analyse fonctionnelle pour appréhender les représentations unitaires de dimension infinie des groupes localement compacts. C'est à lui que l'on doit par exemple le concept de représentation induite dans son cadre le plus général. Grâce à ces outils, il parvient notamment à classifier les représentations unitaires irréductibles d'un produit semi-direct  $K \rtimes A$  avec  $K$  compact et  $A$  abélien. Par ailleurs, ses travaux sur les extensions de groupes [20] lui permettent d'esquisser une stratégie pour classifier les représentations d'un groupe de Lie quelconque à partir de celles de certains de ses sous-groupes réductifs (cela a été rendu rigoureux pour les groupes algébriques par Duflo [9]).

Les groupes de Lie réductifs ont donc une place centrale en théorie des représentations des groupes de Lie généraux. Mais il existe en réalité une autre raison historique, plus élémentaire que celle évoquée ci-dessus, pour laquelle il convient de s'y intéresser. Depuis la découverte des groupes de Lie, ceux d'entre eux qui sont semi-simples ont toujours fait l'objet d'une attention particulière, en partie parce que bon nombre de groupes de Lie classiques sont de ce type :  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $O(p, q)$ ,  $SO(p, q)$ ,  $Sp(2n, \mathbb{R})$ , etc. Il s'agit de la plus petite classe de groupes de Lie stable par extension et contenant tous les groupes de Lie simples (*i.e.* ceux qui sont connexes et sans sous-groupe normal connexe non trivial). En essayant de classifier leurs représentations unitaires irréductibles, on s'est rendu compte qu'une excellente stratégie pour en fabriquer consistait à induire à partir de représentations irréductibles de sous-groupes qui ne sont plus semi-simples mais seulement réductifs. Ainsi, même en se restreignant aux groupes de Lie semi-simples, on est forcé d'étudier la classe plus large des groupes de Lie réductifs.

La théorie des représentations des groupes de Lie réductifs est essentiellement fondée sur l'oeuvre d'un seul mathématicien, Harish-Chandra. Parmi ses innombrables découvertes, il constate que les représentations unitaires ne forment pas la catégorie de représentations la plus naturelle pour ces groupes, qu'il convient en effet de se restreindre à celle des représentations tempérées ou bien de se placer dans le cadre plus large des représentations admissibles. Au début des années 70, Langlands montre que la classification des représentations irréductibles admissibles se ramène à celle des représentations irréductibles tempérées [18]. Moins de quinze ans

plus tard, Knapp et Zuckerman achèvent de classier ces dernières [14,15]. Cependant, entre ces deux bornes, le problème de la classification des représentations irréductibles unitaires demeure encore ouvert, bien que des avancées récentes aient été faites vers une solution algorithmique [5].

Dans ce qui suit, nous nous efforcerons de retracer quelques éléments clés de la théorie des représentations des groupes réductifs réels. Nous introduirons d'abord toutes les notions essentielles, celles touchant à la théorie de Lie et aux groupes réductifs puis celles de théorie des représentations. Dans une dernière partie, nous exposerons la classification de Langlands ainsi qu'une classification des représentations irréductibles tempérées en suivant les idées d'un récent article [2]. Dans ce dernier, l'auteur montre l'existence d'une bijection naturelle entre le dual tempéré d'un groupe de Lie réductif et le dual unitaire de son groupe de déplacements qui fut conjecturée un demi-siècle plus tôt par Mackey.

## 1 Théorie de Lie élémentaire

Avant d'aborder les aspects structurels des groupes de Lie réductifs, nous allons introduire quelques notions de base de théorie de Lie.

### 1.1 – Groupes de Lie

Un groupe de Lie est un groupe muni d'une structure de variété différentielle de sorte que la loi de composition et l'inversion soient lisses. Les morphismes entre de tels objets sont les morphismes de groupes lisses. Rappelons que l'on peut associer à tout groupe de Lie une algèbre de Lie réelle de même dimension, et ce de façon fonctorielle : pour  $G$  et  $H$  deux groupes de Lie d'algèbres de Lie respectives  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$ , si  $\varphi : G \rightarrow H$  est un morphisme de groupes de Lie alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie  $\varphi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \exp_G \uparrow & & \uparrow \exp_H \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathfrak{h} \end{array}$$

commute.

Grâce à cette fonctorialité, on peut construire la **représentation adjointe** de  $G$ . Pour  $g \in G$ , notons  $c_g$  l'action de  $g$  sur  $G$  par conjugaison. L'automorphisme  $c_g$  de  $G$  induit pour tout  $g \in G$  un automorphisme de  $\mathfrak{g}$  noté  $\text{Ad}(g)$ . On obtient ainsi un morphisme de groupes de Lie

$$\begin{aligned} \text{Ad} &: G \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \text{Ad}(g) = c_{g*} \end{aligned}$$

que l'on appelle représentation adjointe de  $G$ . En différentiant à nouveau, on retombe sur la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$ , pour laquelle  $\mathfrak{g}$  agit sur elle-même par crochet :

$$\begin{aligned} \text{ad} &: \mathfrak{g} \longrightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto \text{ad}(X) = [X, \cdot] \end{aligned}$$

Une autre notion essentielle est celle de **sous-groupe de Lie**. Fixons  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Nous appellerons sous-groupe de Lie de  $G$  la donnée d'un sous-ensemble  $H$  de  $G$  et d'une structure de groupe de Lie sur  $H$  de sorte que l'inclusion  $H \hookrightarrow G$  soit un morphisme de groupes de Lie. À ce stade, quelques remarques méritent d'être formulées. Tout d'abord, l'ensemble sous-jacent d'un sous-groupe de Lie de  $G$  est nécessairement un sous-groupe de  $G$  et son algèbre de Lie s'identifie à une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . D'autre part, pour  $H$  un sous-groupe de  $G$ , il peut a priori exister plusieurs sous-groupes de Lie de  $G$  d'ensemble sous-jacent  $H$ . Néanmoins, on peut montrer que si on se donne un sous-groupe  $H$  de  $G$  et une sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ , alors il existe au plus un sous-groupe de Lie de  $G$  d'ensemble sous-jacent  $H$  et d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Un tel sous-groupe de Lie existe si et seulement si le sous-groupe  $H_0$  de  $G$  engendré par exponentiation de  $\mathfrak{h}$  est normal dans  $H$  et que  $H/H_0$  est dénombrable. Dans ce cas,  $H_0$  est la composante connexe du neutre dans  $H$ .

En application de ce qui précède, pour toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ , il existe un unique sous-groupe de Lie connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  et son ensemble sous-jacent est précisément le sous-groupe de  $G$  généré par  $\exp(\mathfrak{h})$ .

Une situation que nous rencontrerons souvent est celle où  $H$  est fermé dans  $G$ . En fait, si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  alors  $H$  est fermé dans  $G$  si et seulement si  $H$  est une sous-variété de  $G$  : c'est le théorème de Cartan-von-Neumann. Dans ce cas-là, il existe un unique sous-groupe de Lie de  $G$  d'ensemble sous-jacent  $H$  (on l'obtient en munissant ce dernier de l'atlas de sous-variété) et son algèbre de Lie est  $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in H\}$ .

## 1.2 – Algèbres de Lie

En ce qui concerne les algèbres de Lie, nous nous contenterons de donner quelques définitions usuelles ainsi qu'une caractérisation des algèbres de Lie réductives qui nous intéressent au premier chef.

Dans cet article, les algèbres de Lie seront réelles, sauf à de rares exceptions près où elles seront complexes. Ce qui suit s'applique aux deux cas.

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On appelle **représentation de  $\mathfrak{g}$**  la donnée d'un espace vectoriel  $E$  et d'un morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(E)$ . Une représentation de  $\mathfrak{g}$  s'étend de façon unique en une représentation de son algèbre enveloppante, que l'on définit comme suit :

**Définition 1.1** L'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ , notée  $U(\mathfrak{g})$ , est le quotient de l'algèbre tensorielle de  $\mathfrak{g}$  par l'idéal engendré par  $XY - YX - [X, Y]$  pour  $X$  et  $Y$  parcourant  $\mathfrak{g}$ . Il s'agit de l'algèbre associative unifière universelle contenant  $\mathfrak{g}$  telle que le crochet de deux éléments dans  $\mathfrak{g}$  corresponde à leur commutateur.

Nous enchaînons avec la définition de certains qualificatifs pour les algèbres de Lie.

Pour  $A$  et  $B$  deux parties d'une algèbre de Lie, on note  $[A, B]$  l'espace vectoriel généré par les éléments de la forme  $[X, Y]$  pour  $X \in A$  et  $Y \in B$ .

**Définition 1.2** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On définit deux suites décroissantes d'idéaux de  $\mathfrak{g}$  comme suit :

$$C^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})], \quad D^{n+1}(\mathfrak{g}) = [D^n(\mathfrak{g}), D^n(\mathfrak{g})],$$

avec les conditions initiales  $D^0(\mathfrak{g}) = C^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ . On dit que  $\mathfrak{g}$  est **nilpotente** (resp. **résoluble**) s'il existe un rang  $n$  tel que  $C^n(\mathfrak{g}) = 0$  (resp.  $D^n(\mathfrak{g}) = 0$ ).

Remarquons qu'une algèbre de Lie nilpotente est toujours résoluble. En effet, en reprenant les notations de la définition,  $D^n(\mathfrak{g}) \subset C^n(\mathfrak{g})$  pour tout  $n$ . Un cas particulier d'algèbres de Lie nilpotentes est celui des algèbres de Lie abéliennes (celles dont le crochet est nul).

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. La somme de deux idéaux résolubles de  $\mathfrak{g}$  est encore un idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ . Ainsi, il existe un plus grand idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$ , on l'appelle radical de  $\mathfrak{g}$  et on le note  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ . Par ailleurs, on définit le radical nilpotent de  $\mathfrak{g}$  comme l'intersection de  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  avec  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . C'est un idéal nilpotent de  $\mathfrak{g}$  (voir [4] pp.64-65).

**Définition 1.3** Une algèbre de Lie est dite **réductive** si son radical nilpotent est nul et on dit qu'elle est **semi-simple** si son radical est nul.

Voici quelques caractérisations utiles des algèbres de Lie réductives :

**Proposition 1.4.** *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\mathfrak{g}$  est réductive,
- tout idéal de  $\mathfrak{g}$  admet un idéal supplémentaire dans  $\mathfrak{g}$ ,
- le radical de  $\mathfrak{g}$  est égal à son centre  $z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{g}] = 0\}$ .

*Si une de ces conditions est réalisée alors  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  est semi-simple et c'est l'unique sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  vérifiant  $\mathfrak{g} = z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .*

La structure fine des algèbres de Lie réductives est donc essentiellement la même que celle des algèbres de Lie semi-simples, que l'on sait par ailleurs classifier depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle grâce aux travaux de Killing, Weyl et Cartan. Cette classification fait intervenir les systèmes de racines, objets absolument omniprésents en théorie de Lie. Nous nous empressons donc de les introduire.

### 1.3 – Systèmes de racines

Dans ce qui suit, les espaces vectoriels sont réels.

Sur un espace vectoriel  $V$ , on appelle réflexion de vecteur  $u \in V \setminus \{0\}$  toute symétrie vectorielle  $s$  de  $V$  telle que  $\ker(s + 1) = \mathbb{R}u$ .

**Définition 1.5** Soit  $V$  un espace vectoriel. Un **système de racines** sur  $V$  est un sous-ensemble  $R$  de  $V \setminus \{0\}$  vérifiant les conditions suivantes :

- $V$  est engendré par  $R$  comme espace vectoriel,
- pour tout  $\alpha \in R$ , il existe une (unique) réflexion  $s_\alpha$  de vecteur  $\alpha$  qui stabilise  $R$ ,
- pour tout couple  $(\alpha, \beta) \in R^2$ , on a :  $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$ .

On dit que les éléments de  $R$  sont des racines.

Dans cette définition, l'unicité de  $s_\alpha$  est en fait garantie par le fait que  $R$  est une partie génératrice de  $V$ , c'est pourquoi nous l'avons mis entre parenthèses. Voici une autre remarque : du fait que  $s_\alpha$  soit une réflexion de vecteur  $\alpha$ , il existe une unique forme linéaire  $\alpha^*$  sur  $V$  telle que pour tout  $\beta \in V$  on ait  $s_\alpha(\beta) - \beta = \alpha^*(\beta)\alpha$ . On appelle  $\alpha^*$  la **racine duale** de  $\alpha$ , appellation qui se justifie par le fait que  $R^* = \{\alpha^* : \alpha \in R\}$  soit un système de racines sur le dual de  $V$ .

Il existe une notion de base pour les systèmes de racines :

**Définition 1.6** Soit  $R$  un système de racines sur un espace vectoriel  $V$ . Une **base du système de racines** est une partie  $S$  de  $R$  telle que :

- les éléments de  $S$  forment une base de  $V$ ,
- pour toute racine  $\alpha$ , les coefficients de  $\alpha$  dans la base  $S$  sont ou bien tous entiers positifs, ou bien tous entiers négatifs.

Les racines ayant des coefficients positifs dans la base  $S$  sont dites positives (relativement à  $S$ ). Les éléments de  $S$  sont appelées racines simples.

On peut montrer que tout système de racines admet une base. En fait, un système de racines  $R$  sur un espace vectoriel  $V$  admet autant de bases qu'il y a de composantes connexes dans  $V^* \setminus \cup_{\alpha \in R} \ker(\alpha)$ .

Pour une introduction plus complète aux systèmes de racines, nous recommandons le chapitre V du livre de Serre [23].

## 2 Structure des groupes réductifs réels

---

Ayant introduit plus haut quelques fondements de théorie de Lie, nous allons à présent définir les groupes réductifs réels (ou groupes de Lie réductifs) et étudier un peu leur structure, ce qui nous servira maintes fois lorsque nous nous intéresserons à leurs représentations. La plupart des éléments présentés dans cette section peuvent se retrouver en grands détails dans le chapitre VII de [17].

La définition exacte des groupes réductifs réels varie en fonction des auteurs, d'autant plus que la véracité de certains théorèmes de théorie des représentations dépend subtilement de la classe de groupes que l'on considère. Une des définitions les plus générales que l'on puisse donner est la suivante :

**Définition 2.1** Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\Theta$  un automorphisme involutif de  $G$ . Notons  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\theta$  l'automorphisme involutif de  $\mathfrak{g}$  induit par  $\Theta$ ,  $K$  le sous-groupe des points fixes de  $\Theta$  et  $\mathfrak{p} = \ker(\theta + 1)$ . On dit que  $G$  muni de  $\Theta$  est un **groupe réductif réel** si les conditions suivantes sont réalisées :

- (1) Il existe une structure euclidienne sur  $\mathfrak{g}$  telle que d'une part  $\theta$  soit une isométrie et que d'autre part, pour tout  $g \in G$ , l'adjoint de

$\text{Ad}(g)$  soit égal à  $\text{Ad}(\Theta(g))$ .

(2)  $K$  est compact.

(3) L'application

$$\begin{aligned} K \times \mathfrak{p} &\longrightarrow G \\ (k, p) &\longmapsto k \exp(p) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

(4) Pour tout  $g \in G$ ,  $\text{Ad}(g)$  s'étend en un automorphisme intérieur de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  obtenue par complexification de  $\mathfrak{g}$ . Cela signifie que  $\text{Ad}(g)_{\mathbb{C}}$  appartient au sous-groupe de Lie connexe de  $\text{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$  d'algèbre de Lie  $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ .

Même si cela n'apparaît pas clairement dans la définition, si  $(G, \Theta)$  est un groupe réductif alors l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  est réductive. En effet, la condition (1) ci-dessus implique que tout idéal de  $\mathfrak{g}$  admet un idéal supplémentaire dans  $\mathfrak{g}$ .

Les conditions (1), (2) et (3) de la définition sont des imitations des propriétés vérifiées par la décomposition polaire des endomorphismes inversibles sur un espace euclidien ou hermitien. Un groupe réductif réel est donc un groupe de Lie disposant d'une sorte de décomposition polaire. La condition (4) permet simplement de contrôler la non-connexité éventuelle de  $G$ .

Il y a trois sources majeures d'exemples de groupes réductifs réels. Présentons-les brièvement.

Il y a tout d'abord les **groupes réductifs linéaires connexes**, tel que  $SL_n(\mathbb{R})$ . Ce sont les sous-groupes connexes fermés de  $GL_n(\mathbb{R})$  (pour un certain  $n$ ) qui sont stable par transposition. Soit  $G \subset GL_n(\mathbb{R})$  un tel groupe. L'automorphisme involutif de  $G$  donné par  $A \mapsto {}^tA^{-1}$  et le produit scalaire  $(X, Y) \mapsto \text{Tr } {}^tXY$  sur son algèbre de Lie vérifient la première condition de la définition. Pour la troisième condition, il suffit de montrer que pour tout  $A \in G$ , si la décomposition polaire de  $A$  est  $UM$  avec  $U$  orthogonale et  $M$  symétrique définie positive alors  $M \in G$ . Cela n'est pas complètement évident, on peut le prouver en s'inspirant du lemme 6.15 de [17]. Les conditions (2) et (4) sont quant à elles automatiquement vérifiées dans ce cas.

Une deuxième classe d'exemples est celle des groupes qui s'obtiennent comme ensemble des **points réels d'un groupe linéaire algébrique connexe réductif défini sur  $\mathbb{R}$** . Pour faire simple, un groupe linéaire algébrique défini sur  $\mathbb{R}$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  (pour un certain  $n$ )

qui s'obtient par intersection de  $GL_n(\mathbb{C})$  avec le lieu d'annulation d'une famille de polynômes à coefficients réels en  $n^2$  indéterminées. Un tel groupe est dit réductif s'il n'admet pas de sous-groupe normal fermé connexe unipotent non trivial (« unipotent » signifie que  $g - 1$  est un endomorphisme nilpotent pour tout élément  $g$  du sous-groupe). Soit  $G(\mathbb{C})$  un groupe linéaire algébrique défini sur  $\mathbb{R}$ , réductif et connexe. En opérant un changement de base adapté si nécessaire, on peut montrer que  $G(\mathbb{C})$  est stable par transposition-conjugaison  $A \mapsto {}^t\bar{A}$ . Alors l'intersection de  $G(\mathbb{C})$  avec  $GL_n(\mathbb{R})$  (« les points réels ») forme un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui, muni de l'involution  $A \mapsto {}^tA^{-1}$  est un groupe réductif réel (voir [17] proposition 1.122). Parmi les exemples couverts par cette catégorie de groupes, on trouve  $GL_n(\mathbb{R})$  et  $O(p, q)$ .

Enfin, il y a tous les **groupes de Lie semi-simples de centre fini**. Un groupe de Lie est dit semi-simple s'il est connexe et que son algèbre de Lie est semi-simple. On peut montrer que tout groupe de Lie semi-simple admet une involution  $\Theta$  vérifiant les conditions (1) et (3). La condition (2) est alors équivalente au fait que le groupe soit de centre fini (*c.f* [17] théorème 6.31). La dernière condition est automatiquement vérifiée puisque les groupes semi-simples sont par définition connexes.

## 2.1 – Sous-classes des groupes réductifs

Comme évoqué plus tôt, pour certains théorèmes, la classe de groupes réductifs à considérer devra être plus restrictive que les seules conditions de la définition 2.1. Nous allons donc commencer par introduire un peu de vocabulaire pour pouvoir mieux décrire les groupes réductifs réels.

Pour tout ce qui suit, fixons un groupe réductif réel  $G$  d'involution  $\Theta$ . On utilise les mêmes notations que dans la définition plus haut. On note  $\mathfrak{k}$  l'algèbre de Lie de  $K$  qui est aussi l'ensemble des points de fixes de  $\theta$ .

Soit  $G_{\text{ss}}$  le sous-groupe de Lie connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Remarquons que  $G_{\text{ss}}$  est semi-simple. On dit que  $G$  est dans la **classe de Harish-Chandra** si  $G_{\text{ss}}$  est de centre fini.

On dira que  $G$  est **linéaire** s'il admet une représentation fidèle de dimension finie, c'est à dire s'il existe un espace vectoriel  $V$  de dimension finie et un morphisme de groupes de Lie injectif  $G \hookrightarrow GL(V)$ . Tout groupe réductif réel linéaire est dans la classe de Harish-Chandra (cela découle de [17] proposition 7.9)

On appelle sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  une sous-algèbre nilpotente  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  qui est son propre normalisateur dans  $\mathfrak{g}$ , c'est à dire qui vérifie pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  :

$$[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \implies X \in \mathfrak{h}.$$

Un sous-groupe de Cartan de  $G$  est sous-groupe de  $G$  qui s'obtient comme centralisateur d'une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . On dira donc que  $G$  est **à sous-groupes de Cartan abéliens** si pour toute sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ , le groupe  $C_G(\mathfrak{h}) = \{g \in G : \forall X \in \mathfrak{h}, \text{Ad}(g)X = X\}$  est abélien. Le fait que  $\mathfrak{g}$  soit réductif implique que ses sous-algèbres de Cartan soient abéliennes. Ainsi, le caractère non-abélien d'un sous-groupe de Cartan de  $G$  ne peut venir que de sa non-connexité. Le groupe des points réels d'un groupe linéaire algébrique connexe réductif défini sur  $\mathbb{R}$  est toujours à sous-groupes de Cartan abéliens.

## 2.2 – Procédés de construction

A présent, nous allons expliquer comment construire des sous-groupes réductifs de  $G$ . Lorsqu'il nous faudra fabriquer des représentations irréductibles de  $G$ , nous induirons souvent à partir de représentations de sous-groupes de  $G$  obtenus par les procédés que nous décrivons ici.

On définit la composante scindée  $\text{Vec}(G)$  de  $G$  comme étant le sous-groupe de Lie connexe de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , où  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  désigne le centre de  $\mathfrak{g}$ . C'est un sous-groupe fermé de  $G$ , il est abélien et isomorphe au groupe additif  $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), +)$  via l'exponentielle. En particulier, on a  $\text{Vec}(G) = \exp(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ . La condition (4) de la définition 2.1 assure que  $\text{Vec}(G)$  soit contenu dans le centre de  $G$ .

La sous-algèbre de Lie  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  est stable par action des automorphismes de  $G$ . On en déduit que  $K$  normalise  $G_{\text{ss}}$  et donc que l'ensemble  $KG_{\text{ss}}$  est un sous-groupe de  $G$ . Nous noterons ce dernier  ${}^\circ G$ . Il s'avère que c'est un sous-groupe fermé de  $G$ , stable par l'involution globale  $\Theta$  et que la paire  $({}^\circ G, \Theta|_{{}^\circ G})$  forme un groupe réductif réel. De plus, l'application

$$\begin{aligned} {}^\circ G \times \text{Vec}(G) &\longrightarrow G \\ (g, v) &\longmapsto gv \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes de Lie.

Un autre procédé de construction important est le suivant. Soit  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre de Lie abélienne de  $\mathfrak{g}$  qui est stable par  $\theta$ . Le centralisateur

de  $\mathfrak{a}$  dans  $G$ , noté  $C_G(\mathfrak{a})$ , est défini comme le sous-groupe de  $G$  formé des éléments qui agissent trivialement sur  $\mathfrak{a}$ . Autrement dit :

$$C_G(\mathfrak{a}) = \{g \in G : \forall X \in \mathfrak{a}, \text{Ad}(g)X = X\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de  $G$  stable par  $\Theta$ , son algèbre de Lie est

$$c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{a}] = 0\}$$

et la paire  $(C_G(\mathfrak{a}), \Theta|_{C_G(\mathfrak{a})})$  forme un groupe réductif réel.

Les deux procédés de construction de groupes réductifs réels présentés ci-dessus ont la qualité de préserver les sous-classes de groupes de réductifs définis à la sous-section précédente.

### 2.3 – Structure de l'algèbre de Lie

Nous continuons notre présentation des groupes réductifs réels avec une brève étude de leur structure infinitésimale.

On appelle **sous-algèbre vectorielle** de  $\mathfrak{g}$  toute sous-algèbre abélienne incluse dans  $\mathfrak{p}$ . Fixons  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre vectorielle maximale de  $\mathfrak{g}$ . Grâce à la condition (1) de la définition 2.1,  $\mathfrak{g}$  peut être muni d'une structure euclidienne telle que pour tout  $Y \in \mathfrak{p}$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(Y)$  soit symétrique. Ainsi, les endomorphismes de la forme  $\text{ad}(H)$  pour  $H$  parcourant  $\mathfrak{a}$  sont diagonalisables et commutent deux à deux. Pour tout  $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ , notons

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a}, [H, X] = \lambda(H)X\}$$

l'espace propre généralisé associé. Comme  $\mathfrak{a}$  est vectorielle maximale, l'espace propre associé à 0 est réduit à  $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ , où  $\mathfrak{m}$  désigne l'intersection de  $\mathfrak{g}_0$  avec  $\mathfrak{k}$ . En notant  $R_{\mathfrak{a}}$  l'ensemble des formes linéaires non-nulles  $\alpha$  telles que  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ , on obtient la décomposition suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in R_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

On peut montrer que  $R_{\mathfrak{a}}$  est un système de racines sur l'espace des formes linéaires sur  $\mathfrak{a}$  qui s'annulent sur  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .

Fixons  $S$  une base de  $R_{\mathfrak{a}}$  et notons

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R_{\mathfrak{a}}^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

la somme des sous-espaces propres associés aux racines positives relativement à  $S$ . Le sous-espace  $\mathfrak{n}$  est une sous-algèbre de Lie nilpotente de  $\mathfrak{g}$ .

Les sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$  de la forme  $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  pour  $\mathfrak{a}$  et  $S$  choisis comme ci-dessus sont dites **paraboliques minimales**. Une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  est dite **parabolique** si elle contient une sous-algèbre parabolique minimale. Les sous-algèbres paraboliques de  $\mathfrak{g}$  peuvent être décrites très explicitement :

**Proposition 2.2.** *Soit  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre vectorielle maximale de  $\mathfrak{g}$ ,  $S$  une base du système de racine associé et  $q_{\min}$  la sous-algèbre parabolique minimale de  $\mathfrak{g}$  relative à la paire  $(\mathfrak{a}, S)$ . Pour  $F$  une partie de  $S$ , on définit  $\Gamma_F = R_{\mathfrak{a}} \cap \text{vect}(F)$  et :*

$$q(\mathfrak{a}, S, F) = q_{\min} + \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_F} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

où  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  désigne pour tout  $\alpha \in R_{\mathfrak{a}}$  l'espace propre généralisé associé à  $\alpha$ .

Pour toute partie  $F$  de  $S$ ,  $q(\mathfrak{a}, S, F)$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Réciproquement, toute sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  contenant  $q_{\min}$  est de cette forme. De plus, pour  $F \neq F'$ , les sous-algèbres  $q(\mathfrak{a}, S, F)$  et  $q(\mathfrak{a}, S, F')$  sont distinctes.

Le groupe  $K$  agit naturellement sur les sous-algèbres paraboliques de  $\mathfrak{g}$ . En effet, pour tout  $k \in K$ , l'action adjointe de  $k$  commute avec  $\theta$  donc préserve  $\mathfrak{p}$ , ce qui implique que l'image d'une sous-algèbre vectorielle maximale est encore une sous-algèbre vectorielle maximale. Mieux encore, si  $\mathfrak{a}$  est une sous-algèbre vectorielle maximale de  $\mathfrak{g}$ ,  $S$  une base de  $R_{\mathfrak{a}}$  et  $k$  un élément de  $K$ , alors le système de racine associé à  $\text{Ad}(k)\mathfrak{a}$  est précisément  ${}^t\text{Ad}(k)^{-1}R_{\mathfrak{a}}$  et  ${}^t\text{Ad}(k)^{-1}S$  en est une base. Notant  $\mathfrak{q}$  la sous-algèbre parabolique minimale relative à la paire  $(\mathfrak{a}, S)$ , on en déduit que  $\text{Ad}(k)\mathfrak{q}$  est la sous-algèbre parabolique minimale relative à la paire  $(\text{Ad}(k)\mathfrak{a}, {}^t\text{Ad}(k)^{-1}S)$ . On a le résultat suivant :

**Proposition 2.3.** *Le groupe  $K$  agit transitivement sur l'ensemble des paires  $(\mathfrak{a}, S)$  où  $\mathfrak{a}$  est une sous-algèbre vectorielle maximale de  $\mathfrak{g}$  et  $S$  une base du système de racine associé.*

En conséquence,  $K$  agit transitivement sur les sous-algèbres paraboliques minimales. Ainsi, si on fixe  $(\mathfrak{a}, S)$  comme dans l'énoncé ci-dessus, alors toute sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  est conjuguée par un élément de  $K$  à une sous-algèbre contenant la parabolique minimale associée à  $(\mathfrak{a}, S)$ .

## 2.4 – Sous-groupes de Levi, sous-groupes paraboliques

Les deux classes de sous-groupes de  $G$  mentionnés dans le titre jouent un rôle majeur dans la description de ses représentations irréductibles. Nous consacrons donc quelques lignes à les définir et à présenter leurs propriétés.

**Définition 2.4** On dit qu'un sous-groupe de  $G$  est un **sous-groupe de Levi** s'il est le centralisateur d'une sous-algèbre vectorielle de  $\mathfrak{g}$ . Explicitement, les sous-groupes de Levi de  $G$  sont ceux de la forme

$$C_G(\mathfrak{b}) = \{g \in G : \forall Y \in \mathfrak{b}, \text{Ad}(g)Y = Y\}$$

pour  $\mathfrak{b}$  une sous-algèbre vectorielle de  $\mathfrak{g}$ .

Tous les sous-groupes de Levi de  $G$  sont fermés,  $\Theta$ -stables et ce sont surcroît des groupes réductifs réels. Nous définissons également les sous-groupes paraboliques de  $G$  :

**Définition 2.5** On dit qu'un sous-groupe de  $G$  est un **sous-groupe parabolique** s'il est le normalisateur d'une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ , c'est à dire s'il est de la forme

$$N_G(\mathfrak{q}) = \{g \in G : \text{Ad}(g)\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}\}$$

pour  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$ .

Les sous-groupes paraboliques sont fermés dans  $G$ . Une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}$  est son propre normalisateur dans  $\mathfrak{g}$ , ce qui implique que l'algèbre de Lie de  $N_G(\mathfrak{q})$  est  $\mathfrak{q}$ . Il existe donc une correspondance biunivoque entre les sous-algèbres paraboliques de  $\mathfrak{g}$  et les sous-groupes paraboliques de  $G$ .

Par ailleurs, pour tout sous-groupe parabolique  $Q$ , on peut montrer que  $L = Q \cap \theta(Q)$  est un sous-groupe de Levi de  $G$ . On dira que  $L$  est le **facteur de Levi** de  $Q$ . De façon réciproque, tout sous-groupe de Levi de  $G$  se réalise comme facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique, bien que ce dernier ne soit pas unique.

Afin de décrire un peu plus finement la structure des sous-groupes paraboliques, plaçons-nous dans le contexte de la proposition 2.2. On considère une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}$  associée à un triplet  $(\mathfrak{a}, S, F)$  avec  $F$  une partie de  $S$ . Soient  $Q$  le normalisateur de  $\mathfrak{q}$  dans  $G$ ,  $L$  son facteur de

Levi et  $N_F$  le sous-groupe connexe de  $G$  d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{n}_F = \bigoplus_{\alpha \in R_{\mathfrak{a}}^+ \setminus \Gamma_F} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Notons  $A_F = \text{Vec}(L)$ ,  $M_F = {}^{\circ}L$  et  $\mathfrak{a}_F, \mathfrak{m}_F$  leurs algèbres de Lie respectives.

**Proposition 2.6.** *Les faits suivants sont vérifiés :*

- $N_F$  est un sous-groupe distingué fermé simplement connexe de  $Q$ . Son algèbre de Lie  $\mathfrak{n}_F$  est le radical nilpotent de  $\mathfrak{q}$ .
- $A_F$  est un sous-groupe abélien fermé simplement connexe de  $Q$  et son algèbre de Lie  $\mathfrak{a}_F$  est égale à  $\bigcap_{\alpha \in F} \ker(\alpha)$ .
- $M_F$  est  $\Theta$ -stable, c'est un groupe réductif réel et il est fermé dans  $Q$ .
- On a :  $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_F \oplus \mathfrak{a}_F \oplus \mathfrak{n}_F$ .
- L'application

$$\begin{aligned} M_F \times A_F \times N_F &\longrightarrow Q \\ (m, a, n) &\longmapsto man \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

- $L = M_F A_F$  est le centralisateur de  $\mathfrak{a}_F$  dans  $G$ .
- Le quotient  $G/Q$  est compact.

Le premier point de la proposition ci-dessus montre que le sous-groupe  $N_F$  est une donnée intrinsèque de  $Q$ . On l'appelle **radical unipotent** de  $Q$ .

Une fois un peu comprise la structure des groupes réductifs réels, nous pouvons enfin commencer à étudier leurs représentations.

### 3

## Représentations hilbertiennes des groupes réductifs réels

L'objectif de cette section est de donner une introduction générale à la théorie des représentations des groupes réductifs réels. Nous définirons notamment les duaux admissibles et tempérés, ainsi que l'induction de représentations.

Commençons par les définitions qui s'imposent. Fixons  $G$  un groupe localement compact quelconque. Il s'agit simplement d'un groupe muni

d'une topologie localement compacte de sorte que la loi de composition et l'inversion soient des opérations continues.

On appellera espace hilbertien un espace vectoriel topologique complexe complet dont la topologie est engendrée par une norme provenant d'un produit scalaire. Autrement dit, un espace hilbertien est un espace de Hilbert dont on a oublié le produit scalaire tout en se rappelant de sa topologie. Par la suite, un produit scalaire sur un espace hilbertien désignera toujours un produit scalaire hermitien dont la norme génère la topologie de l'espace.

**Définition 3.1** Une **représentation hilbertienne** de  $G$  est la donnée d'un morphisme de groupes continu  $\pi : G \rightarrow \text{Aut}(E)$  où  $E$  est un espace hilbertien et  $\text{Aut}(E)$  son groupe des automorphismes continus muni de la topologie forte.

Pour précision, la topologie forte sur l'espace  $\text{End}(E)$  des endomorphismes linéaires continus d'un espace vectoriel topologique est la topologie projective relative aux applications  $f \in \text{End}(E) \mapsto f(\xi) \in E$  pour  $\xi$  parcourant  $E$ .

Nous poursuivons avec d'autres définitions. Soit  $(\pi, E)$  une représentation hilbertienne de  $G$ . Une **sous-représentation** de  $(\pi, E)$  est un sous-espace fermé de  $E$  stable par action de  $G$ . On dit que la représentation est **irréductible** si elle est non-nulle et si elle n'admet pas d'autres sous-représentations que  $\{0\}$  et  $E$ .

On définit également les morphismes de la catégorie des représentations hilbertiennes.

**Définition 3.2** Soient  $(\pi, E)$  et  $(\pi', E')$  deux représentations hilbertiennes de  $G$ . Un  **$G$ -morphisme** (ou **opérateur entrelaçant**)  $(\pi, E) \rightarrow (\pi', E')$  est une application linéaire continue  $E \rightarrow E'$  qui commute à l'action de  $G$ .

Deux représentations hilbertiennes  $(\pi, E)$  et  $(\pi', E')$  de  $G$  sont dites **équivalentes** si elles sont isomorphes dans la catégorie définie plus haut, c'est à dire, s'il existe un opérateur entrelaçant inversible  $E \rightarrow E'$ .

Une représentation hilbertienne  $(\pi, E)$  est dite **unitarisable** s'il existe un produit scalaire sur  $E$  pour lequel  $\pi(g)$  soit un opérateur unitaire pour tout  $g \in G$ . On appelle **dual unitaire** de  $G$  le quotient de l'ensemble des représentations hilbertiennes unitarisables de  $G$  par la relation d'équivalence définie ci-dessus. Il est d'usage de noter le dual unitaire  $\hat{G}$ .

Enfin, mentionnons quelques constructions usuelles : le dual topolo-

gique d'une représentation hilbertienne, le quotient d'une représentation hilbertienne par une sous-représentation et le produit fini (ou la somme finie) de représentations hilbertiennes sont à leur tour, de façon naturelle, des représentations hilbertiennes.

### 3.1 – Représentations des groupes compacts

Avant d'aborder le cas des groupes réductifs réels, nous nous concentrons sur celui des groupes compacts. Nous utiliserons les résultats de cette partie pour définir les représentations admissibles d'un groupe réductif réel et décrire son dual tempéré.

Deux faits essentiels à savoir en ce qui concerne les représentations des groupes compacts sont que, d'une part, toutes les représentations hilbertiennes sont unitarisables et d'autre part, que toute représentation hilbertienne irréductible est de dimension finie. Une des applications directes du premier fait est que toute représentation de dimension finie d'un groupe compact se décompose en somme directe de représentations irréductibles. Quant au second fait, il implique par exemple que le dual unitaire d'un groupe de Lie connexe compact se déduit du calcul des représentations irréductibles de dimension finie de son algèbre de Lie, ce qui se fait grâce à la théorie du plus haut poids (voir [23] chapitre VII).

Fixons  $K$  un groupe compact et notons  $\hat{K}$  son dual unitaire. Pour tout élément  $\omega$  de  $\hat{K}$ , choisissons un représentant  $(\rho_\omega, V_\omega)$  de  $\omega$ .

**Définition 3.3** Soit  $(\pi, E)$  une représentation hilbertienne de  $K$ . Pour tout  $\omega \in \hat{K}$ , on appelle **composante isotypique** de  $(\pi, E)$  relative à  $\omega$  le sous-espace fermé de  $E$  généré par les éléments de la forme  $f(v)$  pour  $v$  un élément de  $V$  et  $f : (\rho_\omega, V_\omega) \rightarrow (\pi, E)$  un  $K$ -morphisme.

Les composantes isotypiques d'une représentation hilbertienne  $(\pi, E)$  sont des sous-représentations de  $(\pi, E)$ . De plus, leur somme est directe et dense dans  $E$ . Par ailleurs, les  $K$ -morphisms préservent les composantes isotypiques : si  $f : (\pi, E) \rightarrow (\pi', E')$  est un  $K$ -morphisme et  $\omega$  un élément de  $\hat{K}$  alors l'image par  $f$  de la composante isotypique de  $(\pi, E)$  relative à  $\omega$  est incluse dans celle de  $(\pi', E')$ .

La somme des composantes isotypiques d'une représentation hilbertienne de  $K$  peut se caractériser autrement. Avant, donnons juste une définition :

**Définition 3.4** Soit  $(\pi, E)$  une représentation hilbertienne de  $K$ . On dit

qu'un vecteur  $\xi \in E$  est  **$K$ -fini** si le sous-espace de  $E$  engendré par les éléments de la forme  $\pi(k)\xi$  pour  $k$  parcourant  $K$  est de dimension finie.

En fait, on peut montrer que l'ensemble des vecteurs  $K$ -finis d'une représentation hilbertienne de  $K$  est précisément la somme de ses composantes isotypiques.

La dernière notion essentielle dont nous aurons besoin par la suite est la suivante :

**Définition 3.5** Soit  $(\pi, E)$  une représentation hilbertienne de  $K$ . On dit que  $(\pi, E)$  est **admissible** si ses composantes isotypiques sont de dimension finie.

Il est difficile d'aborder le thème des représentations des groupes compacts sans présenter le théorème de Peter-Weyl et la théorie des caractères. Hélas, par manque de place, nous ne le ferons pas. Un lecteur désireux d'en savoir plus pourra consulter le chapitre 5 de [10].

### 3.2 – Dual admissible d'un groupe réductif réel

Grâce aux développements précédents, nous pouvons maintenant définir les duaux tempérés et admissibles d'un groupe réductif réel.

Pour toute cette partie,  $G$  désigne un groupe réductif réel dans la classe de Harish-Chandra d'involution  $\Theta$  et d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Le sous-groupe compact des points fixes de  $\Theta$  est noté  $K$ .

Fixons  $(\pi, E)$  une représentation hilbertienne de  $G$ . Un vecteur  $\xi \in E$  est dit **lisse** si l'application  $g \in G \mapsto \pi(g)\xi$  est lisse. On note  $C^\infty(\pi, E)$  le sous-espace des vecteurs lisses de  $(\pi, E)$ . Ce sous-espace est naturellement muni d'une action de  $\mathfrak{g}$ . En effet, pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ , on peut définir une application linéaire  $\pi_{\mathfrak{g}}(X) : C^\infty(\pi, E) \rightarrow C^\infty(\pi, E)$  de la façon suivante :

$$\forall \xi \in C^\infty(\pi, E), \quad \pi_{\mathfrak{g}}(X)\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(e^{tX})\xi.$$

Pour tout  $(X, Y) \in \mathfrak{g}^2$ , on a  $[\pi_{\mathfrak{g}}(X), \pi_{\mathfrak{g}}(Y)] = \pi_{\mathfrak{g}}([X, Y])$ . Autrement dit,  $(\pi_{\mathfrak{g}}, C^\infty(\pi, E))$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ .

On appelle **module de Harish-Chandra** de  $(\pi, E)$  le sous-espace de  $E$  formé par les vecteurs  $K$ -finis lisses. On le notera  $\text{HC}(\pi, E)$ . Le mot « module » se réfère ici au fait que  $\text{HC}(\pi, E)$  est stable par action de  $K$  et  $\mathfrak{g}$  (il n'est cependant pas stable par  $G$  en général). En fait, c'est

un exemple particulier de ce que l'on appelle un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module (voir [3], section 2).

On dira que deux représentations hilbertiennes de  $G$  sont **infinitésimalement équivalentes** si leurs modules de Harish-Chandra sont isomorphes. Explicitement, si on se donne  $(\pi', E')$  une autre représentation hilbertienne de  $G$ , alors  $(\pi', E')$  est infinitésimalement équivalente à  $(\pi, E)$  s'il existe  $\mathrm{HC}(\pi, E) \rightarrow \mathrm{HC}(\pi', E')$  un isomorphisme linéaire qui commute aux actions de  $K$  et  $\mathfrak{g}$ .

Une représentation hilbertienne  $(\pi, E)$  de  $G$  est dite **admissible** si sa restriction à  $K$  est admissible. On peut montrer que toute représentation hilbertienne irréductible unitarisable de  $G$  est admissible (voir [28] théorème 3.4.10).

**Définition 3.6** On appelle **dual admissible** d'un groupe réductif  $G$  le quotient de l'ensemble de ses représentations irréductibles admissibles par la relation d'équivalence infinitésimale. Le dual admissible de  $G$  est noté  $\hat{G}^{\mathrm{adm}}$ .

Il assez clair que l'équivalence de deux représentations admissibles implique leur équivalence infinitésimale. La réciproque est fautive en général mais elle est vraie lorsqu'on considère deux représentations irréductibles unitarisables [3] (théorème 6). La première assertion nous indique qu'il existe une flèche naturelle  $\hat{G} \rightarrow \hat{G}^{\mathrm{adm}}$ , la seconde montre que cette flèche est injective. On peut ainsi considérer le dual unitaire d'un groupe réductif réel comme un sous-ensemble de son dual admissible.

A présent, définissons le dual tempéré de  $G$ .

Rappelons que tout groupe localement compact admet, à multiplication scalaire près, une unique mesure invariante par translation à gauche et une unique mesure invariante par translation à droite (on les appelle mesure de Haar à gauche et à droite). Lorsque le groupe est unimodulaire, ce qui est le cas de tout groupe réductif réel (voir corollaire 8.31 de [17]), les mesures de Haar à gauche coïncident avec les mesures de Haar à droite.

**Définition 3.7** On munit  ${}^\circ G$  d'une mesure de Haar. On dit qu'une représentation admissible  $(\pi, E)$  de  $G$  est **tempérée** si pour tout vecteur  $K$ -fini  $\xi$  de  $E$  et tout vecteur  $K$ -fini  $\nu$  de la représentation duale de  $(\pi, E)$ , la fonction  $g \in {}^\circ G \mapsto |\nu(\pi(g)\xi)|^{2+\varepsilon}$  est intégrable pour tout  $\varepsilon > 0$ .

Toutes les représentations tempérées irréductibles sont unitarisables. C'est une conséquence d'un résultat de Langlands (*c.f.* [18] lemme 4.10).

**Définition 3.8** Le **dual tempéré** de  $G$  est le quotient de l'ensemble des représentations tempérées irréductibles de  $G$  par la relation d'équivalence usuelle des représentations hilbertiennes. On le notera  $\hat{G}^{\text{tem}}$ .

Il découle de la remarque précédente que  $\hat{G}^{\text{tem}}$  s'identifie à un sous-ensemble de  $\hat{G}$ . Ce dernier se caractérise comme le support de la mesure de Plancherel (18.8 [8]) sur  $\hat{G}$  que l'on appelle aussi dual réduit de  $G$  (voir 18.1.7 et 18.3.1 de [8]). Ce résultat est l'objet d'un célèbre article [13] de Howe *et al.*

Avant d'expliquer les résultats de classification des duaux tempérés et admissibles, nous introduisons un dernier ingrédient.

### 3.3 – Induction des représentations

Nous présentons ici un outil fondamental de théorie des représentations. Le principe de l'induction est de construire des représentations d'un groupe à partir de représentations de sous-groupes plus petits. Il y a bien des choses à dire à ce sujet mais nous nous contenterons ici de la définition qui, déjà, prend un peu de place. Pour une présentation plus exhaustive, consulter par exemple [10] (chapitre 6) et [24].

Fixons  $G$  un groupe de Lie,  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  de sorte que  $G/H$  soit compact. Soit  $(\pi, E)$  une représentation hilbertienne de  $H$ . La représentation de  $G$  induite de  $(\pi, E)$  s'obtient en « forçant »  $G$  à agir sur  $E$ . Construisons-la pas à pas.

Tout d'abord, remarquons que la projection  $G \rightarrow G/H$  est une fibration de fibre  $H$  (c'est un  $H$ -fibré principal). On note  $G \times_{\pi} E$  le quotient topologique de  $G \times E$  par l'action continue de  $H$  définie par :

$$\forall h \in H, \forall (g, \xi) \in G \times E, \quad h.(g, \xi) = (gh^{-1}, \pi(h)\xi).$$

La projection canonique  $E \times G \rightarrow G$  passe au quotient et induit donc une surjection continue  $G \times_{\pi} E \rightarrow G/H$ . Muni de cette dernière,  $G \times_{\pi} E$  hérite d'une structure naturelle de fibré vectoriel continu de fibre  $E$ . Nous pouvons expliciter les trivialisations : si  $s$  est une section locale continue de  $G \rightarrow G/H$  définie sur un ouvert  $U$ , alors

$$\begin{aligned} U \times E &\longrightarrow (G \times_{\pi} E)|_U \\ (x, \xi) &\longmapsto (s(x), \xi) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques au-dessus de  $U$ .

On définit ensuite une notion de métrique continue sur  $G \times_{\pi} E \rightarrow G/H$ . On appelle métrique sur  $G \times_{\pi} E \rightarrow G/H$  la donnée pour tout  $x \in G/H$  d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  sur la fibre de  $G \times_{\pi} E \rightarrow G/H$  au-dessus de  $x$ . Une telle métrique est dite continue si, vue dans une trivialisatation telle qu'explicitée plus haut, elle se met sous la forme

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = \langle \xi, a_x \eta \rangle, \quad (\xi, \eta \in E)$$

pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire quelconque sur  $E$  et  $(a_x)$  une famille d'opérateurs inversibles fortement continue.

A présent, fixons une métrique continue  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $G \times_{\pi} E \rightarrow G/H$ . Notons  $D^{1/2}$  le fibré vectoriel des demi-densités sur  $G/H$  et  $D^1$  celui des 1-densités. Considérons l'application bilinéaire positive au dessus de  $G/H$  suivante :

$$\begin{aligned} \mu : (G \times_{\pi} E \otimes D^{1/2}) \times_{G/H} (G \times_{\pi} E \otimes D^{1/2}) &\longrightarrow D^1 \\ (\xi \otimes \alpha, \eta \otimes \beta) &\longmapsto \langle \xi, \eta \rangle \bar{\alpha} \beta. \end{aligned}$$

Notons  $\Gamma$  l'espace des sections de  $G \times_{\pi} E \otimes D^{1/2}$ . L'expression

$$\int_{G/H} \mu(\psi, \varphi) \quad (\psi, \varphi \in \Gamma)$$

définit un produit scalaire sur  $\Gamma$ . Du fait de la compacité de  $G/H$ , la topologie pré-hilbertienne générée sur  $\Gamma$  par ce produit scalaire est indépendante du choix de la métrique continue  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Le complété  $\tilde{\Gamma}$  de  $\Gamma$  pour cette topologie est alors un espace hilbertien.

Il ne reste à présent qu'à donner l'action de  $G$  sur  $\tilde{\Gamma}$ . L'action de  $G$  par translations à gauche sur lui-même induit une action continue de  $G$  sur  $G \times_{\pi} E$ . L'action à gauche de  $G$  sur  $G/H$  induit une action lisse de  $G$  sur  $D^1$ . En tensorisant les deux actions, on obtient une action continue de  $G$  sur  $G \times_{\pi} E \otimes D^{1/2}$ . De là, on déduit une action de  $G$  sur  $\Gamma$ . Un élément  $g$  de  $G$  agit sur une section  $\psi$  de  $G \times_{\pi} E \otimes D^{1/2}$  de la façon suivante :

$$\forall x \in G/H, \quad (g \cdot \psi)(x) = g \cdot \psi(g^{-1}x).$$

Cette action s'étend en une représentation hilbertienne de  $G$  d'espace sous-jacent  $\tilde{\Gamma}$ . On l'appelle **représentation de  $G$  induite de  $(\pi, E)$**  et on la note  $\text{Ind}_H^G(\pi, E)$ .

L'usage des densités dans la construction ci-dessus peut sembler superflu. On pourrait aussi par exemple choisir une mesure lisse de plein

support sur  $G/H$  et intégrer la métrique contre cette dernière, ce qui nous donnerait plutôt un produit scalaire sur les sections de  $G \times_{\pi} E$ . En fait, la raison pour laquelle on tensorise par les demi-densités c'est que cela permet d'avoir une induction qui préserve l'unitarisabilité : si  $(\pi, E)$  est unitarisable alors  $\text{Ind}_H^G(\pi, E)$  l'est aussi.

En pratique, dans cet article, nous n'induirons des représentations qu'à partir de sous-groupes paraboliques de groupes réductifs réels. Nous allons donc examiner ce cas plus attentivement.

Soit  $G$  un groupe réductif réel dans la classe de Harish-Chandra et  $K$  le groupe des points fixes de l'involution. On se donne  $Q$  un sous-groupe parabolique de  $G$  dont on note respectivement  $L$  et  $N$  le facteur de Levi et le radical unipotent. L'algèbre de Lie de la partie scindée  $\text{Vec}(L)$  de  $L$  est notée  $\mathfrak{a}$ . Soit  $(\pi, E)$  une représentation hilbertienne de  ${}^{\circ}L$  et  $\lambda : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $\mathbb{R}$ -linéaire. Au vu des différentes propriétés énoncées à la proposition 2.6, il existe un unique morphisme de groupes continu  $\pi \otimes \lambda : Q \rightarrow \text{Aut}(E)$  tel que :

- $(\pi \otimes \lambda)|_{{}^{\circ}L} = \pi$ ,
- $\forall H \in \mathfrak{a}, \quad (\pi \otimes \lambda)(e^H) = e^{\lambda(H)}$ ,
- $\forall n \in N, \quad (\pi \otimes \lambda)(n) = 1$ .

La paire  $(\pi \otimes \lambda, E)$  forme alors une représentation hilbertienne de  $Q$  que l'on peut ensuite induire sur  $G$ . Toutes nos inductions seront de cette forme. Pour conclure, voici quelques propriétés de l'induction parabolique :

**Proposition 3.9.** *Les assertions suivantes sont vérifiées :*

- (1) *La représentation  $\text{Ind}_Q^G(\pi \otimes \lambda)$  est admissible dès que  $(\pi, E)$  l'est.*
- (2) *Si  $(\pi, E)$  est tempérée et  $\lambda$  imaginaire pure alors  $\text{Ind}_Q^G(\pi \otimes \lambda)$  est tempérée.*
- (3) *Si  $(\pi', E')$  est une représentation admissible de  ${}^{\circ}L$  équivalente à  $(\pi, E)$  alors  $\text{Ind}_Q^G(\pi' \otimes \lambda)$  est équivalente à  $\text{Ind}_Q^G(\pi \otimes \lambda)$ .*
- (4) *Soit  $Q'$  un autre sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $L$ . La représentation induite  $\text{Ind}_{Q'}^G(\pi \otimes \lambda)$  est équivalente à  $\text{Ind}_Q^G(\pi \otimes \lambda)$  dès lors qu'une des deux est irréductible.*
- (5) *Soit  $k$  un élément de  $K$ . Notons  $k^*\pi$  et  $k^*\lambda$  les tirés en arrière de  $\pi$  et  $\lambda$  par l'action par conjugaison de  $k$ . La représentation*

$$\text{Ind}_{k^{-1}Qk}^G(k^*\pi \otimes k^*\lambda)$$

*est équivalente à  $\text{Ind}_Q^G(\pi \otimes \lambda)$ .*

Pour les preuves, on pourra consulter [24] lemme 2.4 pour (1), [16] proposition 7.14 pour (2) et [16] VII§4 pour (4).

## 4 Classifications des duaux tempérés et admissibles

Ce qui nous occupera le plus dans cette dernière section est la classification du dual tempéré d'un groupe réductif réel au moyen de la bijection de Mackey-Higson introduite dans [2]. Cela nécessitera quelques préliminaires sur le caractère infinitésimal d'une représentation et sur les  $K$ -types minimaux. Avant tout cela néanmoins, nous présentons la classification de Langlands du dual admissible. Cette dernière décrit le dual admissible d'un groupe réductif réel en fonction des duaux tempérés de sous-groupe réductifs. Cela fournira donc une motivation supplémentaire pour s'intéresser au dual tempéré.

Afin de présenter la classification de Langlands, plaçons nous dans le même contexte qu'à la proposition 2.6, avec les mêmes notations. Soit  $G$  un groupe réductif réel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre vectorielle maximale de  $\mathfrak{g}$  et  $S$  une base du système de racine. On appelle triplet de Langlands un triplet de la forme  $(F, \pi, \lambda)$  où

- $F$  est une partie de  $S$ ,
- $\pi$  est une représentation irréductible tempérée de  $M_F$ ,
- $\lambda$  est une forme linéaire sur  $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$  qui s'annule sur  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}_F$  telle que pour toute racine simple  $\alpha \in S \setminus F$  de racine duale  $H_{\alpha} \in \mathfrak{a}$ , on ait  $\operatorname{Re}[\lambda(H_{\alpha})] > 0$ .

Pour  $F$  une partie de  $S$ , on notera  $Q_F$  le sous-groupe parabolique de  $G$  associé.

**Théorème 4.1.** (Classification de Langlands [18])

- Pour tout triplet de Langlands  $(F, \pi, \lambda)$ , la représentation induite  $\operatorname{Ind}_{Q_F}^G(\pi \otimes \lambda|_{\mathfrak{a}_F})$  (définie comme à la section 3.3) admet un unique quotient irréductible. On l'appelle quotient de Langlands relatif à  $(F, \pi, \lambda)$ , on le note  $J(F, \pi, \lambda)$ .
- Deux quotients de Langlands  $J(F, \pi, \lambda)$  et  $J(F', \pi', \lambda')$  sont infinitésimalement équivalents si et seulement si  $F = F'$ ,  $\pi$  équivalente à  $\pi'$  et  $\lambda = \lambda'$ .

- *Toute représentation admissible irréductible de  $G$  est infinitésimale-ment équivalente à un quotient de Langlands.*

#### 4.1 – Caractère infinitésimal réel et $K$ -types minimaux

Soit  $G$  un groupe réductif réel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Notons  $K$  le sous-groupe des points fixes de l'involution. On suppose que  $G$  est linéaire à sous-groupes de Cartan abéliens.

On se donne  $(\pi, E)$  une représentation admissible irréductible de  $G$ . On peut montrer (voir [3] théorème 5) que son module de Harish-Chandra  $\mathrm{HC}(\pi, E)$  est également irréductible comme  $(\mathfrak{g}, K)$ -module : son seul sous-espace non-nul stable par les actions conjointes de  $\mathfrak{g}$  et  $K$  est  $\mathrm{HC}(\pi, E)$ . Par le lemme de Schur (*c.f.* [28] 3.3.2), cela implique que le centre de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$  agit sur  $\mathrm{HC}(\pi, E)$  via des scalaires. Notons  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  le centre de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ . On appelle **caractère infinitésimal** de  $(\pi, E)$  l'unique morphisme d'algèbres  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$  par lequel  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  agit sur  $\mathrm{HC}(\pi, E)$ . Les morphismes d'algèbres  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$  sont appelés caractères de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ .

Il existe pour les caractères de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  des notions de partie réelle et partie imaginaire (voir [28] section 3.1 puis [27] §2). Même si nous n'expliquerons pas ces notions dans le détail, nous allons tout de même donner un énoncé formel.

*Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des caractères de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ . De façon « canonique », il existe des parties  $\mathcal{C}^{\mathrm{Re}}$  et  $\mathcal{C}^{\mathrm{Im}}$  de  $\mathcal{C}$  dont l'intersection est réduite à un unique caractère, ainsi que des rétractions  $\mathrm{Re} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{Re}}$  et  $\mathrm{Im} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{Im}}$  telles que l'application  $\mathrm{Re} \times \mathrm{Im} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{Re}} \times \mathcal{C}^{\mathrm{Im}}$  soit une bijection. Les éléments de  $\mathcal{C}^{\mathrm{Re}}$  sont appelés **caractères réels** de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ .*

On en déduit une notion de **caractère infinitésimal réel** pour les représentations admissibles irréductibles de  $G$ .

Dans sa thèse datant de 1979, Vogan démontre qu'il existe une façon assez naturelle de paramétrer les représentations tempérées irréductibles de caractère infinitésimal réel de  $G$  grâce au dual unitaire de  $K$ . Par la suite, pour raccourcir quelque peu les énoncés, on appellera **représentation tempirique** de  $G$  toute représentation tempérée irréductible de caractère infinitésimal réel.

Tâchons d'expliquer dans les grandes lignes l'approche de Vogan. Tout d'abord, on associe à tout élément  $\mu \in \check{K}$  une certaine longueur  $|\mu| > 0$

(c.f [26]). Si  $(\pi, E)$  est une représentation admissible de  $G$  alors on définit les  $K$ -types minimaux de  $(\pi, E)$  comme les éléments  $\mu$  de  $\hat{K}$  de longueur minimale parmi ceux dont la composante isotypique dans  $(\pi, E)$  est non-nulle. Voici le théorème d'intérêt :

**Theorème 4.2.** *Une représentation tempirique de  $G$  admet un unique  $K$ -type minimal. De plus, deux représentations tempiriques de  $G$  admettant le même  $K$ -type minimal sont nécessairement équivalentes. Enfin, de façon réciproque, tout élément de  $\hat{K}$  peut s'obtenir comme l'unique  $K$ -type minimal d'une représentation tempirique de  $G$ .*

Par l'entremise des représentations tempiriques et de leurs  $K$ -types minimaux, on peut ainsi injecter  $\hat{K}$  dans  $\hat{G}^{\text{tem}}$ .

## 4.2 – Classification du dual tempéré et analogie de Mackey

Au début des années 70, Mackey évoqua l'idée que de larges pans du dual unitaire d'un groupe réductif réel  $G = Ke^{\mathfrak{p}}$  devaient pouvoir se paramétrer de la même façon que le dual unitaire de son groupe de déplacements de Cartan, à savoir le produit semi-direct  $G_0 = K \ltimes \mathfrak{p}$  où  $\mathfrak{p}$  est vu comme un groupe additif. Cette idée avait pour origine une intuition physique. Supposons en effet que  $G$  soit le groupe des isométries de notre espace-temps, de sorte que l'on puisse interpréter ses représentations irréductibles comme les différentes particules de notre monde (lire par exemple [25] chapitre IX). Le groupe  $G_0$  s'interprète alors comme le groupe des isométries de ce même espace-temps que l'on aurait "aplati", c'est à dire, dont on aurait annulé la courbure. Or, dans le cas où cette dernière est suffisamment faible pour que cela n'affecte point nos observations, les particules associées à  $G_0$  (ses représentations irréductibles) devraient rendre compte de la même physique que celles associées à  $G$ , d'où la conjecture de Mackey. La correspondance entre les duals de  $G$  et  $G_0$  se vérifiait sur certains exemples mais elle n'avait pas de réel fondement mathématique et c'est pourquoi l'idée fut reçue avec un grand scepticisme. C'est d'autant plus le cas que la théorie des représentations des groupes réductifs réels avançaient alors à grands pas et dans une toute autre direction.

Ce n'est que bien plus tard, après réinterprétation de l'analogie de Mackey au regard de la conjecture de Baum-Connes [11], que Higson [12] montra l'existence d'une bijection naturelle entre le dual tempéré de  $G$  et le dual unitaire de  $G_0$  pour  $G$  un groupe complexe semi-simple. Plus

récemment, Afgoustidis parvint à généraliser cette construction à tout groupe réductif réel  $G$  linéaire à groupes de Cartan abéliens [2]. Les quelques lignes qui suivent visent à expliciter cette bijection.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous allons nous étendre un peu plus longuement sur  $G_0$ . Tandis que  $G$  agit transitivement par isométries sur l'espace symétrique  $G/K$ , le groupe  $G_0$  agit quant à lui par isométries sur l'espace tangent de  $G/K$  au point  $K$ , lequel est identifié à  $\mathfrak{p}$ . On peut donc vaguement interpréter  $G_0$  comme le groupe des isométries infinitésimales d'une variété riemannienne dont  $G$  serait le groupe des isométries globales. Par exemple, dans le cas où les éléments de  $G = SL_2(\mathbb{R})$  sont identifiées à des isométries directes du plan hyperbolique, son groupe Cartan  $G_0 = SO(2) \times \mathbb{R}^2$  représente les isométries directes du plan euclidien. Une autre façon d'interpréter  $G_0$  est de le considérer comme l'approximation de  $G$  dans le régime  $\mathfrak{p} \approx 0$ . Dans ce cas, pour  $X, Y \in \mathfrak{p}$ , on peut écrire  $e^X e^Y \approx e^{X+Y}$ , ce qui donne effectivement la loi de groupe de  $G_0$ . Reformulé de manière plus élégante,  $G_0$  s'identifie au fibré normal de l'inclusion  $K \hookrightarrow G$ .

Afin d'expliquer la bijection de Mackey-Higson, nous devons d'abord introduire quelques notations. Pour toute forme linéaire  $\nu \in \mathfrak{p}^*$ , on note  $K^\nu$  le stabilisateur de  $\nu$  pour l'action co-adjointe de  $K$  sur  $\mathfrak{p}^*$  (la contra-grédiante de l'action adjointe sur  $\mathfrak{p}$ ). On appelle **donnée de Mackey** un couple de la forme  $(\nu, \pi)$  où  $\nu$  est une forme linéaire sur  $\mathfrak{p}$  et  $\pi$  une représentation hilbertienne irréductible de  $K^\nu$ . Deux données de Mackey  $(\nu, \pi)$  et  $(\nu', \pi')$  sont dites **équivalentes** s'il existe un élément  $k \in K$  tel que  $\nu' = k.\nu$  et  $\pi = \pi' \circ c_k$  où  $c_k : K^\nu \rightarrow K^{\nu'}$  désigne la conjugaison par  $k$ . On note  $\mathcal{M}$  le quotient de l'ensemble des données de Mackey par cette relation d'équivalence.

Commençons par la description du dual unitaire de  $G_0$ . Pour toute forme linéaire  $\nu \in \mathfrak{p}^*$ , notons  $G_0^\nu$  le stabilisateur de  $\nu$  pour l'action co-adjointe de  $G_0$  sur  $\mathfrak{p}^*$ . Remarquons que  $G_0^\nu = K^\nu \times \mathfrak{p}$  pour tout  $\nu \in \mathfrak{p}^*$ . Si  $(\nu, \pi)$  est une donnée de Mackey, alors  $\pi$  se prolonge en une unique représentation  $\pi \otimes i\nu$  de  $G_0^\nu$  telle que :

$$(\pi \otimes i\nu)(k, X) = e^{i\nu(X)} \pi(k).$$

Le théorème suivant, dû à Mackey [19], détermine le dual unitaire de  $\hat{G}_0$ .

**Theorème 4.3.** *Pour toute donnée de Mackey  $(\nu, \pi)$ , la représentation de  $G_0$  induite de  $\pi \otimes i\nu$  est irréductible et unitarisable. Réciproquement, toute représentation hilbertienne irréductible unitarisable de  $G_0$  est obtenue de*

cette façon. De plus, pour  $(\nu, \pi)$  et  $(\nu', \pi')$  deux données de Mackey, si  $\text{Ind}_{G_0^{\nu}}^{G_0^{\nu}}(\pi \otimes i\nu)$  est équivalente à  $\text{Ind}_{G_0^{\nu'}}^{G_0^{\nu'}}(\pi' \otimes i\nu')$  alors  $(\nu, \pi)$  et  $(\nu', \pi')$  sont équivalentes. On obtient ainsi une bijection entre  $\mathcal{M}$  et  $\hat{G}_0$ .

La preuve de ce théorème est expliquée avec grand soin dans [10] section 6.6.

Une construction analogue fonctionne pour le dual tempéré de  $G$  qui, on le rappelle, est supposé linéaire et à sous-groupes de Cartan abéliens.

Soit  $(\nu, \pi)$  une donnée de Mackey. Contrairement au cas du groupe de déplacements, le sous-espace  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  n'est pas un idéal, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'action naturelle de  $G$  sur  $\mathfrak{p}^*$ . Néanmoins, en identifiant les éléments  $\mathfrak{p}^*$  à des formes linéaires sur  $\mathfrak{g}$  qui s'annulent sur  $\mathfrak{k}$ , on peut considérer  $\mathfrak{p}^*$  comme un sous-espace de  $\mathfrak{g}^*$ . Notons  $L^\nu$  le stabilisateur de  $\nu$  pour l'action co-adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}^*$ . Alors  $L^\nu$  est un sous-groupe de Levi de  $G$ . En effet, en considérant un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathfrak{g}$  vérifiant la condition (1) de la définition 2.1 et en notant  $\nu^\# = \langle \nu, \cdot \rangle$ , on peut voir que  $L^\nu$  est le centralisateur de  $\nu^\#$  dans  $G$ . Autre fait remarquable, l'intersection  $K \cap {}^\circ L^\nu$  est égale à  $K^\nu$ . Le groupe réductif  $L^\nu$  étant également linéaire à sous-groupes de Cartan abéliens, il existe par le théorème 4.2 une représentation tempirique  $\tilde{\pi}$  de  ${}^\circ L^\nu$  ayant pour  $K^\nu$ -type minimal la classe d'équivalence de  $\pi$ .

**Proposition 4.4.** *Soit  $Q$  un sous-groupe parabolique de  $G$  ayant pour facteur de Levi  $L$ . Notons  $\mathfrak{a}$  l'algèbre de Lie de la partie scindée de  $L$ . Alors la représentation  $\text{Ind}_{Q_0^{\mathfrak{a}}}^G(\tilde{\pi} \otimes i\nu_{\mathfrak{a}})$  est irréductible.*

Ce résultat est essentiellement une reformulation d'un théorème que l'on attribue à Harish-Chandra, bien qu'il ne l'ait jamais publié (c.f. [24] théorème 2.6). Les propriétés (2), (3) et (4) de l'induction parabolique énoncées à la proposition 3.9 impliquent que  $\text{Ind}_{Q_0^{\mathfrak{a}}}^G(\tilde{\pi} \otimes i\nu_{\mathfrak{a}})$  est tempérée et que sa classe d'équivalence ne dépend pas des choix de  $\tilde{\pi}$  et  $Q$ . Ainsi, notre procédé associe à toute donnée de Mackey un unique élément du dual tempéré de  $G$ . La propriété 3.9(5) assure que cette association passe au quotient, ce qui définit une application  $\mathcal{M} \rightarrow \hat{G}^{\text{tem}}$ .

**Théorème 4.5.** (Afgoustidis [2] théorème 3.5)  $\mathcal{M} \rightarrow \hat{G}^{\text{tem}}$  est bijective.

Ce théorème propose une paramétrisation particulièrement simple du dual tempéré de  $G$ . En le combinant avec le théorème 4.3, on obtient une bijection  $\hat{G}_0 \simeq \hat{G}^{\text{tem}}$  dite de Mackey-Higson.

En ce qui concerne la preuve, mentionnons simplement qu'elle est assez

élémentaire si l'on admet les principaux résultats de la classification de Knapp-Zuckerman [14, 15].

## Ouverture

---

L'existence de la bijection de Mackey-Higson soulève des questions qui mériteraient de futures recherches.

Dans l'article [1], Afgoustidis montre que la bijection  $\hat{G}_0 \simeq \hat{G}^{\text{tem}}$  préserve suffisamment de structures sur les duals pour que l'on puisse fournir une démonstration simple de la conjecture de Connes-Kasparov pour  $G$  réductif réel au moyen d'une déformation continue de  $G$  sur  $G_0$  dans le style de [12]. L'analogie de Mackey permet ainsi de mettre en évidence que les groupes  $G_0$  et  $G$  partagent de nombreux invariants bien que leurs structures respectives soient fort différentes. Or, fait remarquable, la bijection de Mackey-Higson s'étend aux duals admissibles de  $G_0$  et  $G$  (théorème 5.1 de [2]). On pourrait ainsi se demander quelles structures des duals admissibles sont préservées par la bijection.

Une autre piste à l'explorer est la généralisation de cette approche aux espaces homogènes de  $G$ . Prenons  $H$  un sous-groupe  $\Theta$ -stable de  $G$ . L'espace homogène  $G/H$  se déforme continûment sur le fibré normal  $N$  de l'inclusion  $K/K \cap H \subset G/H$ . C'est un exemple d'une construction géométrique répandue que l'on appelle déformation au cône normal (voir par exemple [7] 2.3.1). Y a-t-il alors une correspondance naturelle entre les représentations irréductibles de  $G$  qui apparaissent dans la décomposition de  $L^2(G/H)$  et les représentations irréductibles de  $G_0$  apparaissant dans celle de  $L^2(N)$  ?

Enfin, Monk et Voigt [21] ont montré que l'analogie de Mackey et la quantification permettaient de construire une déformation à deux paramètres des groupes de Lie semi-simples complexes aux propriétés intéressantes. Puisque les travaux sur la quantification des groupes de Lie semi-simples réels vont bon train [6], on pourrait également essayer de déterminer si cette déformation s'étend au cas réel.

## Références

---

- [1] Alexandre Afgoustidis. On the analogy between real reductive groups and Cartan motion groups : A proof of the Connes-Kasparov isomorphism. *Journal of Functional Analysis*, 277(7) :2237–2258, October 2019.
- [2] Alexandre Afgoustidis. On the analogy between real reductive groups and Cartan motion groups : the Mackey–Higson bijection. *Cambridge Journal of Mathematics*, 9(3) :551–575, 2021.
- [3] M. Welleda Baldoni. General representation theory of real reductive Lie groups. In T. Bailey and A. Knapp, editors, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 61, pages 61–72. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.
- [4] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*. Number 9 in *Éléments de mathématique*. Springer, Berlin, reproduction en fac-similé edition, 2007.
- [5] Jr. David A. Vogan, Jeffrey D. Adams, Peter E. Trapa, and Marc A.A. Van Leeuwen. Unitary representations of real reductive groups. *Astérisque*, 417 :1–177, 2020.
- [6] Kenny De Commer. Quantisation of semisimple real Lie groups, April 2024.
- [7] Claire Debord and Georges Skandalis. Lie groupoids, pseudodifferential calculus, and index theory. In Ali Chamseddine, Caterina Consani, Nigel Higson, Masoud Khalkhali, Henri Moscovici, and Guoliang Yu, editors, *Advances in Noncommutative Geometry : On the Occasion of Alain Connes’ 70th Birthday*, pages 245–289. Springer International Publishing, Cham, 2019.
- [8] Jacques Dixmier. *C\*-algebras*. Number v. 15 in North-Holland mathematical library. North-Holland; sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier North Holland, Amsterdam; New York : New York, 1977.
- [9] Michel Duflo. Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques. *Acta Mathematica*, 149(1) :153–213, December 1982.
- [10] Gerald B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 0 edition, February 2016.
- [11] Nigel Higson, Paul Baum, and Alain Connes. Classifying space for proper actions and K-theory of group C\*-algebras. In *C\* algebras :*

- 1943-1993 a fifty year celebration*, number 167 in Contemporary mathematics, pages 240–291. American mathematical society, Providence, 1994.
- [12] Nigel Higson and Angel Román. The Mackey bijection for complex reductive groups and continuous fields of reduced group  $C^*$ -algebras. *Representation Theory of the American Mathematical Society*, 24(20) :580–602, November 2020.
- [13] R. Howe, M. Cowling, and U. Haagerup. Almost 12 matrix coefficients. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1988(387) :97–110, 1988.
- [14] A. W. Knap and Gregg J. Zuckerman. Classification of Irreducible Tempered Representations of Semisimple Groups. *Annals of Mathematics*, 116(2) :389–455, 1982. Publisher : [Annals of Mathematics, Trustees of Princeton University on Behalf of the Annals of Mathematics, Mathematics Department, Princeton University].
- [15] A. W. Knap and Gregg J. Zuckerman. Classification of Irreducible Tempered Representations of Semisimple Groups II. *Annals of Mathematics*, 116(3) :457–492, 1982. Publisher : [Annals of Mathematics, Trustees of Princeton University on Behalf of the Annals of Mathematics, Mathematics Department, Princeton University].
- [16] Anthony W. Knap. *Representation theory of semisimple groups : an overview based on examples*. Princeton landmarks in mathematics. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. Oxford, 1986.
- [17] Anthony W. Knap. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.
- [18] R. Langlands. On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. In Paul Sally and David Vogan, editors, *Mathematical Surveys and Monographs*, volume 31, pages 101–170. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1989.
- [19] George W. Mackey. Imprimitivity for representations of locally compact groups i. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 35 9 :537–45, 1949.
- [20] George W. Mackey. Unitary representations of group extensions. I. *Acta Mathematica*, 99(1) :265–311, December 1958.
- [21] Andrew Monk and Christian Voigt. Complex quantum groups and a deformation of the Baum–Connes assembly map. *Transactions of the American Mathematical Society*, 371(12) :8849–8877, February 2019.

- [22] F. Peter and H. Weyl. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. *Mathematische Annalen*, 97(1) :737–755, December 1927.
- [23] Jean-Pierre Serre. *Complex Semisimple Lie Algebras*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [24] E. P. Van Den Ban. Induced representations and the Langlands classification. In T. Bailey and A. Knapp, editors, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 61, pages 123–155. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.
- [25] V. S. Varadarajan. *Geometry of Quantum Theory : Second Edition*. Springer New York, New York, NY, 1968.
- [26] David A. Vogan. The Algebraic Structure of the Representations of Semisimple Lie Groups I. *Annals of Mathematics*, 109(1) :1–60, 1979. Publisher : [Annals of Mathematics, Trustees of Princeton University on Behalf of the Annals of Mathematics, Mathematics Department, Princeton University].
- [27] David A. Vogan, Jr. A Langlands Classification for Unitary Representations. pages 299–324, Okayama and Kyoto, Japan.
- [28] Nolan R. Wallach. *Real Reductive Groups I*. March 1988.