

# Introduction au domaine de recherche : EDPS singulières et structures de régularité

Dimitri FAURE

Septembre 2024

## 1 Calcul stochastique et EDPS

### 1.1 Equations différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique (EDS) standard dans  $\mathbb{R}^d$  est une équation différentielle ordinaire (EDO) à laquelle on ajoute un terme de bruit aléatoire temporel. Son écriture probabiliste est analogue à celle d'une EDO et prend en général la forme réduite :

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

ou la forme intégrale :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s) \quad (1)$$

où  $X(0)$  est la condition initiale (possiblement aléatoire),  $\mu$  et  $\sigma$  sont des fonctions mesurables et  $(W(s))_{s \geq 0}$  est une fonction aléatoire presque sûrement continue partout et dérivable nulle part appelée mouvement brownien. La solution d'une EDS est ainsi une fonction aléatoire  $X : (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto X(t, \omega) \in \mathbb{R}^d$ .

Pour une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , on peut facilement définir l'intégrande  $df(t)$  en la posant égale  $f'(t)dt$ . Pour une fonction non dérivable en revanche, cette quantité ne fait pas nécessairement sens, et on utilise ainsi fortement les propriétés aléatoires de  $W$  pour nous assurer que pour  $g$  mesurable bornée :

$$\sum_{i=0}^{2^N-1} g\left(\frac{i}{2^N}\right) \left(W\left(\frac{i+1}{2^N}\right) - W\left(\frac{i}{2^N}\right)\right)$$

converge presque sûrement quand  $N$  tend vers l'infini vers une quantité finie qu'on note  $\int_0^1 g(s)dW(s)$ .

L'étude des EDS commença dans les années 40 avec les travaux révolutionnaires de Kiyoshi Itô sur l'intégrale stochastique. Il est important de noter que, s'il est

nécessaire d'ajouter des hypothèses supplémentaires sur  $\mu$  et  $\sigma$  pour avoir existence d'une solution unique à (1), il suffit en fait que la deuxième coordonnée des coefficients soit localement Lipschitz pour qu'il y ait existence et unicité locale d'une solution (comme avec les EDO). Le caractère bien posé de l'équation est ainsi facile à démontrer, et l'étude mathématiques des EDS s'intéresse essentiellement aux propriétés spécifiques des solutions. Un champ de recherche particulièrement prolifique est celui qui s'intéresse à un grand nombre EDS couplées les unes aux autres, et on renvoie ainsi le lecteur aux nombreux ouvrages écrits sur les jeux à champ moyen depuis les articles fondateurs de Jean-Michel Lasry et de Pierre-Louis Lions.

## 1.2 Equations aux dérivées partielles stochastiques

Les équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) sont des équations aux dérivées partielles (EDP), auxquelles on ajoute un terme de bruit espace-temps. Un exemple classique est l'équation de la chaleur stochastique en dimension  $d$  :

$$d\psi(t, x) = \Delta\psi(t, x)dt + dW(t, x)$$

qu'on écrit en général :

$$\partial_t\psi = \Delta\psi + \xi \tag{2}$$

Ici l'inconnue  $\psi$  est une fonction de la variable espace-temps  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,  $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_i^2$  est le laplacien spatial, et  $\xi$  est le bruit blanc espace-temps qui remplace pour les EDPS le mouvement brownien.

La première chose à noter, est que (2) n'a en réalité pas de sens à  $(t, x)$  fixé. En effet  $\xi$  n'est pas une fonction aléatoire mais une distribution aléatoire, ce qui signifie concrètement qu'on ne peut lui donner sens qu'en l'intégrant contre une fonction test. En d'autres termes,  $\xi(t, x)$  n'existe pas mais  $(\xi, \varphi) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \varphi(t, x)\xi(dx, dt)$  est bien défini presque sûrement pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ . Plus précisément,  $\xi$  est caractérisé par le fait que  $(\xi, \varphi)$  soit gaussien pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$  et par l'identité suivante valable pour tout  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty$  :

$$\mathbb{E}((\varphi_1, \xi)(\varphi_2, \xi)) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \varphi_1(t, x)\varphi_2(t, x)dt dx.$$

Si l'on revient à l'étude (2), il est important discuter dès maintenant de la régularité exacte des objets en jeu. Commençons par la définition suivante qui généralise les espaces Hölder  $\mathcal{C}_s^\alpha$  pour  $\alpha \in (0, 1)$  au cas  $\alpha < 0$  :

**Définition.** Soit  $\alpha < 0$ , on définit  $\mathcal{C}_s^\alpha$  comme l'ensemble des distributions  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$  telles que pour tout compact  $L \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  on ait :

$$\|u\|_{\mathcal{C}_s^\alpha(L)} = \sup_{z=(t,x) \in L} \sup_{\eta \in B_r, \lambda \in (0,1]} \left| \frac{(u, \mathcal{S}_z^\lambda \eta)}{\lambda^\alpha} \right| < +\infty$$

où  $r = \lceil -\alpha \rceil$ ,  $B_r$  est l'ensemble des fonctions  $\eta$  lisses à support dans la boule unité pour  $\|\cdot\|_{\mathfrak{s}}$  telles que  $\|\eta\|_{C^r} \leq 1$  et :

$$\mathcal{S}_z^\lambda \eta(s, y) := \lambda^{-d-2} \eta(\lambda^{-2}(s-t), \lambda^{-1}(y-x)).$$

Cette définition est ainsi fondée sur le comportement de la distribution quand on effectue un changement d'échelle.

**Remarque 1.** On note que les variables temporelle et spatiale sont traitées différemment, y compris pour la distance  $\|z' - z\|_{\mathfrak{s}} := |t' - t|^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^d |x'_j - x_j|$ . Cela justifie l'indice  $\mathfrak{s}$  dans  $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^\alpha$ .

Revenons maintenant (2). On a tout d'abord que  $\xi$  appartient presque sûrement à  $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{-\frac{d+2}{2}-\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . L'équation de la chaleur étant régularisante, la théorie de Schauder nous donne que  $\psi$  est par conséquent de régularité  $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{-\frac{d+2}{2}-\varepsilon+2} = \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\frac{2-d}{2}-\varepsilon}$ . Ainsi si  $\psi$  est bien une fonction pour  $d = 1$ , elle n'est plus qu'une distribution pour  $d \geq 2$ . Si cela ne pose pas problème pour la résolution de l'équation de la chaleur stochastique, tout ajout d'une non-linéarité peut rapidement mener à des problèmes de définition des termes apparaissant dans l'équation : on dit alors que l'EDPS est singulière.

### 1.3 Les EDPS singulières : l'exemple de $(\Phi_d^4)$

On considère pour la suite l'équation  $(\Phi_d^4)$  issue de la mécanique quantique pour  $d \geq 2$  :

$$\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi, \tag{3}$$

avec pour condition initiale  $u_0$ . Par la suite on prendra  $u_0 = 0$  pour simplifier les équations. Le principe de Duhamel nous assure alors, formellement, que  $u$  est solution de l'équation au point fixe suivante :

$$u = K * (-u^3 + \xi) \tag{4}$$

où on pose :

$$K(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \exp(-\frac{x^2}{4t}) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

le noyau de la chaleur. On a cependant que le terme  $K * \xi$  est de régularité  $-\frac{d+2}{2} - \varepsilon + 2 = \frac{2-d}{2} - \varepsilon < 0$  et on s'attend donc à ce que  $u$  ne soit qu'une distribution : le produit  $-u^3$  est donc mal défini.

Pour le cas  $d = 2$ , il est néanmoins possible de contourner cette difficulté à l'aide d'une astuce que nous allons présenter tout de suite. Dans le cas  $d = 3$ , cette équation est fondamentalement mal posée, et il est donc nécessaire de faire appel à de nouveaux outils mathématiques.

### 1.3.1 Le cas $(\Phi_2^4)$ et la renormalisation

On considère à présent l'objet  $\mathfrak{I} = K * \xi$ . On a que  $\mathfrak{I}$  est de régularité  $\mathcal{C}^{-\varepsilon}$  comme  $u$ , et l'astuce dite de Da Prato-Debussche consiste à écrire  $u = v + \mathfrak{I}$  puis à étudier l'équation vérifiée par  $v$ . On montre alors que  $v$  est de régularité strictement positive ce qui permet de gérer beaucoup plus facilement les non-linéarités.

Il est cependant important de remarquer tout de suite qu'on s'attend à ce que des termes en  $\mathfrak{I}^2$  et  $\mathfrak{I}^3$  apparaissent dans l'équation, et ces derniers ne sont a priori pas bien définis du fait de la faible régularité de  $\xi$ . Pour surmonter cette difficulté, on considère dans un premier temps l'objet régularisé  $\mathfrak{I}_\delta$  défini par :

$$\mathfrak{I}_\delta(z) = \mathfrak{I} * \rho_\delta(z) = \int K * \rho_\delta(z - \bar{z}) \xi(d\bar{z})$$

où  $\rho_\delta(t, x) := \delta^{-d-2} \rho(\delta^{-2}t, \delta^{-1}x)$  avec  $\rho$  fonction lisse positive d'intégrale égale à 1. On a que  $\mathfrak{I}_\delta$  est lisse pour tout  $\delta > 0$  et que  $\mathfrak{I}_\delta$  converge au sens des distributions vers  $\mathfrak{I}$ . On a ainsi que  $\mathfrak{I}_\delta^2$  et  $\mathfrak{I}_\delta^3$  sont bien définis, et on est donc tenté d'étudier leurs limites quand  $\delta \rightarrow 0$ . On ne peut cependant pas le faire directement, car on observe que  $\mathbb{E}(\mathfrak{I}_\delta^2) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} +\infty$  ce qui implique la présence de termes divergents dans le développement de  $\mathfrak{I}_\delta^2$ . En écrivant explicitement les intégrales stochastiques considérées, on peut cependant montrer que le seul terme divergent est une constante, et on a donc que :

$$\heartsuit := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathfrak{I}_\delta^2 - \mathbb{E}(\mathfrak{I}_\delta^2)$$

est une distribution aléatoire bien définie, de régularité  $\mathcal{C}^{-2\varepsilon}$ . On écrira par la suite  $C_\delta = \mathbb{E}(\mathfrak{I}_\delta^2)$ , et on peut facilement montrer que

$$\spadesuit := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathfrak{I}_\delta^3 - 3C_\delta \mathfrak{I}$$

est une distribution aléatoire bien définie de régularité  $\mathcal{C}^{-3\varepsilon}$ .

On a présent tous les outils en main pour pouvoir résoudre  $(\Phi_2^4)$ . Il est cependant important de noter que l'équation (3) ne fait toujours pas sens en elle-même, et la présence de termes divergents dans les puissances de  $\mathfrak{I}_\delta$  montrent qu'il ne suffit pas de régulariser le bruit et de passer à la limite pour obtenir une solution. On va donc procéder à ce que l'on appelle la renormalisation de l'équation, ce qui consiste à y ajouter des termes correctifs de façon à ce qu'on puisse la passer à la limite. Plus précisément, on étudie pour  $\delta > 0$  l'équation :

$$\partial_t u_\delta = \Delta u_\delta - (u_\delta^3 - 3C_\delta u_\delta) + \xi_\delta \tag{5}$$

où le terme  $u_\delta^3 - 3C_\delta u_\delta$  est parfois noté :  $u_\delta^3$  : et  $\xi_\delta$  est le bruit blanc régularisé. On observe que  $\mathfrak{I}_\delta$  est solution de :

$$\partial_t \mathfrak{I}_\delta = \Delta \mathfrak{I}_\delta + \xi_\delta$$

et qu'on a donc en posant  $v_\delta = u_\delta - \mathfrak{I}_\delta$  que  $v_\delta$  est solution de :

$$\begin{aligned}\partial_t v_\delta &= \Delta v_\delta - [(v_\delta + \mathfrak{I}_\delta)^3 - 3C_\delta(v_\delta + \mathfrak{I}_\delta)] \\ &= \Delta v_\delta - [v_\delta^3 + 3v_\delta^2 \mathfrak{I}_\delta + 3v_\delta(\mathfrak{I}_\delta^2 - C_\delta) + (\mathfrak{I}_\delta^3 - 3C_\delta \mathfrak{I}_\delta)]\end{aligned}$$

On fait à présent tendre  $\delta$  vers 0, et en notant  $v_\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} v_\delta$  on a que :

$$\partial_t v = \Delta v - (v^3 + 3v^2 \mathfrak{I} + 3v \mathfrak{V} + \mathfrak{V}^2),$$

qu'on peut réécrire :

$$v = -K * (v^3 + 3v^2 \mathfrak{I} + 3v \mathfrak{V} + \mathfrak{V}^2) \quad (6)$$

Le terme avec la plus mauvaise régularité à droite est  $\mathfrak{V}^2$  qui est de régularité  $\mathcal{C}^{-3\varepsilon}$ , donc  $K * \mathfrak{V}^2$  est de régularité  $\mathcal{C}^{2-3\varepsilon}$  ce qui suffit pour définir tous les produits de (6). En effet, si  $\mathfrak{I}$  et  $\mathfrak{V}$  ne sont que des distributions, la forte régularité de  $v$  fait qu'on peut donner un sens aux produits  $v^2 \mathfrak{I}$  et  $v \mathfrak{V}$ . Plus rigoureusement, on peut construire un opérateur produit :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta & \longrightarrow \mathcal{C}^\alpha \\ (f, g) & \longmapsto fg \end{cases}$$

pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  tel que  $\alpha \leq \beta$  et  $\alpha + \beta > 0$ . L'équation (6) est donc bien posée, et on dira que  $u = v + \mathfrak{I}$  est l'unique solution de  $(\Phi_2^4)$ .

Cette méthode de résolution chose a quelque de frustrant en cela qu'on ne résout pas stricto sensu (3), mais une version modifiée de cette dernière. Il est cependant impossible de donner un sens aux objets considérés sans procéder de cette façon. Qui plus est, la solution renormalisée est celle qu'on observe expérimentalement quand on replace cette équation dans le contexte physique dont elle est issue.

### 1.3.2 Le cas $(\Phi_3^4)$ et la nécessité d'une nouvelle approche

On désire utiliser la même méthode dans le cas  $d = 3$ , et en répétant les mêmes étapes de calculs on arrive facilement à la même équation pour  $v = u - \mathfrak{I}$  c'est à dire :

$$v = -K * (v^3 + 3v^2 \mathfrak{I} + 3v \mathfrak{V} + \mathfrak{V}^2) \quad (6)$$

La régularité des objets, cependant, n'est plus la même. En effet, on a à présent  $\mathfrak{I} \in \mathcal{C}^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ ,  $\mathfrak{V} \in \mathcal{C}^{-1-2\varepsilon}$  et  $\mathfrak{V}^2 \in \mathcal{C}^{-\frac{3}{2}-3\varepsilon}$ , donc en particulier on s'attend à ce que  $\mathfrak{V}^2 := K * \mathfrak{V}^2$  soit de régularité  $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-3\varepsilon}$  et donc  $v$  aussi, ce qui fait que les produits  $v^2 \mathfrak{I}$  et surtout  $v \mathfrak{V}$  sont mal définis. On peut néanmoins essayer d'adapter l'astuce de Da Prato-Debusche en considérant  $w = v - \mathfrak{V}^2$ , où  $\mathfrak{V}^2$  est de régularité  $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-3\varepsilon}$ , et en espérant que  $w = u - \mathfrak{I} + \mathfrak{V}^2$  soit de meilleure régularité que  $v$ . En faisant cela on l'obtient l'équation au point fixe :

$$\begin{aligned}w &= -K * (w^3 + 3w^2 \mathfrak{I} + 3w \mathfrak{V} + 3w(\mathfrak{V}^2)^2 + 3w^2(\mathfrak{V}^2) \\ &\quad + 6\mathfrak{I}(\mathfrak{V}^2)w + 3\mathfrak{V}(\mathfrak{V}^2) + 3\mathfrak{I}(\mathfrak{V}^2)^2)\end{aligned}$$

On a alors deux problèmes. Le premier est que certains produits de symboles sont mal définis, à commencer par  $\mathfrak{V}(\mathfrak{Y})$  car  $\mathfrak{V}$  est dans  $\mathcal{C}^{-1-2\varepsilon}$  et  $\mathfrak{Y}$  dans  $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-3\varepsilon}$ . Ce problème peut cependant être résolu en rajoutant une deuxième constante de normalisation  $C'_\delta = \mathbb{E}(\mathfrak{V}_\delta \mathfrak{Y}_\delta)$ . Le second problème est le produit  $w \mathfrak{V}$ . En effet, s'il existe il est de régularité  $\mathcal{C}^{-1-2\varepsilon}$ , ce qui implique que  $w$  est de régularité au plus  $\mathcal{C}^{-1-2\varepsilon+2} = \mathcal{C}^{1-2\varepsilon}$ , mais cette régularité n'est pas suffisante pour définir  $w \mathfrak{V}$  car  $(-1 - 2\varepsilon) + (1 - 2\varepsilon) = -4\varepsilon < 0$ . Il n'est pas possible de lever cette difficulté en soustrayant un nouveau symbole à  $u$ , et on a donc besoin d'une nouvelle approche si on veut résoudre  $(\Phi_3^4)$ .

## 2 Structures de régularité

En 2013, Martin Hairer développa la théorie des structures de régularité pour résoudre (KPZ), une autre EDPS singulière [1, 2]. Cette théorie, qui lui valut la médaille Fields l'année suivante, permet aussi de résoudre  $(\Phi_3^4)$ . L'idée générale derrière la théorie des structures de régularité est de reformuler (3) dans un espace abstrait où il est beaucoup plus pratique de travailler. Formellement on a pour tout  $\delta > 0$  le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (u_0, Z^\delta) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & \Phi^\delta \\ \uparrow \Psi & & \downarrow \mathcal{R} \\ (u_0, \xi_\delta) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & u_\delta \end{array}$$

avec respectivement :

- $\mathcal{F}$  l'application qui à une réalisation du bruit régularisé  $\xi_\delta$  et à une condition initiale  $u_0$  associe l'unique solution de l'équivalent en dimension 3 de (5) avec cette réalisation du bruit et cette condition initiale.
- $\Psi$  l'application qui associe à une réalisation du bruit  $\xi_\delta$  un "modèle renormalisé"  $Z^\delta = (\Pi^\delta, \Gamma^\delta)$ , c'est-à-dire essentiellement une collection d'applications partant d'un espace abstrait de symboles (appelé structure de régularité), et à image dans un espace distributionnel réel.
- $\mathcal{S}$  associe au modèle une "distribution modèle" dans l'espace abstrait, qui est solution du problème de point fixe abstrait équivalent à (4).
- $\mathcal{R}$  l'opérateur de reconstruction qui à une distribution modèle associe une distribution espace-temps.

et  $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \circ \Psi$ . Ainsi, résoudre l'équivalent de (5) dans l'espace réel revient à le résoudre dans l'espace abstrait, ce qui est beaucoup plus simple car il est plus facile de multiplier entre elles deux distributions modèle que deux distributions réelles. Démontrer la convergence des fonctions  $u_\delta$  vers une fonction  $u$  revient donc à démontrer la convergence des modèles  $(Z^\delta)_{\delta>0}$  vers un modèle  $Z$ , ce qui est relativement simple dans le cas de  $(\Phi_3^4)$ .

Nous allons à présent définir plus rigoureusement les différents objets entrant en jeu.

## 2.1 Aspects algébriques

Commençons par décrire l'espace abstrait.

**Définition.** Une structure de régularité  $\mathcal{T}$  est un triplet  $(A, T, G)$  où

- $A \subset \mathbb{R}$  est un ensemble d'indices localement fini et minoré.
- $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$  est un espace vectoriel gradué où chaque  $T_\alpha$  est un espace de Banach de dimension finie et  $T_0$  isomorphe à  $\mathbb{R}$  de vecteur unité noté  $1$ .
- $G$  un groupe d'opérateurs linéaires sur  $T$  tels que :

$$\Gamma\tau - \tau \in \bigoplus_{\beta < \alpha} T_\beta =: T_{<\alpha} \quad (7)$$

soit vérifié pour tout  $\Gamma \in G$ , tout  $\alpha \in A$  et tout  $\tau \in T_\alpha$ . De plus  $\Gamma 1 = 1$  pour tout  $\Gamma \in G$ .

Précisons par ailleurs quelques notations. Soit  $\tau \in T_\alpha$ , on dit que  $\tau$  est d'ordre  $\alpha$  et on note  $|\tau| = \alpha$ . Pour  $\tau \in T$  général, en notant  $\|\cdot\|_\alpha$  la norme de  $T_\alpha$ , on écrit  $\|\tau\|_\alpha = \|Q_\alpha\tau\|$  où  $Q_\alpha : T \rightarrow T_\alpha$  est le projecteur sur la composante d'ordre  $\alpha$ .

**Remarque 2.** Pour mieux comprendre les conditions exprimées plus haut, on va prendre un exemple de structure de régularité bien connue. On considère donc l'ensemble  $\bar{A} = \mathbb{N}$ , l'espace vectoriel gradué  $\bar{T} = \mathbb{R}[X]$  et le groupe de translations  $\bar{G} = (\Gamma_h)_{h \in \mathbb{R}}$  où  $\Gamma_h P(X) = P(X+h)$  pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $h \in \mathbb{R}$ . On vérifie facilement que (7) est vérifié, et on a donc que  $(\bar{A}, \bar{T}, \bar{G})$  est la structure de régularité des polynômes.

## 2.2 Aspects analytiques

Maintenant que la structure algébrique abstraite a été définie, on peut définir ce qu'est un modèle associé à une structure de régularité.

**Définition.** Soit  $\mathcal{T} = (A, T, G)$  une structure de régularité, un modèle pour  $\mathcal{T}$  sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  consiste en une paire  $(\Pi, \Gamma)$  où :

- $\Gamma$  est une application  $\Gamma : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow G$  qu'on écrit  $(x, y) \mapsto \Gamma_{xy}$ . On impose  $\Gamma_{xx} = Id$  et  $\Gamma_{xy}\Gamma_{yz} = \Gamma_{xz}$  pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}^{d+1}$ .
- $\Pi = \{\Pi_x\}_{x \in \mathbb{R}^{d+1}}$  est une famille d'applications linéaires  $\Pi_x : T \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ .
- On a la relation algébrique :

$$\Pi_y = \Pi_x \Gamma_{xy} \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Enfin pour tout  $\alpha \in A$  et tout compact  $L \subset \mathbb{R}^{d+1}$ , on exige que les bornes :

$$|(\Pi_x \tau)(\mathcal{S}_x^\lambda \eta)| \lesssim \|\tau\|_\alpha \lambda^\alpha \text{ et } \sup_{\beta < \alpha} \frac{\|\Gamma_{xy} \tau\|_\beta}{\|x - y\|_s^{\alpha - \beta}} \lesssim \|\tau\|_\alpha$$

soient uniformes en  $\tau \in T_\alpha$ , en  $\lambda \in (0, 1]$ , en  $x, y \in L$  et en  $\eta \in B_r$  pour  $r := \lceil -\alpha \rceil$ .

Tout cela peut paraître très abstrait, mais nous allons maintenant énoncer une dernière définition qui permettra de donner un sens concret aux structures de régularité et aux modèles.

**Définition.** Soit  $\mathcal{T}$  une structure de régularité et  $(\Pi, \Gamma)$  un modèle sur  $\mathcal{T}$ . Alors pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ , l'espace des distributions modèle  $\mathcal{D}^\gamma$  consiste en l'ensemble des fonctions  $F : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow T_\gamma^-$  tels que pour tout compact  $L \subset \mathbb{R}^{d+1}$  :

$$\|F\|_{\gamma, L} := \sup_{x \in L} \sup_{\beta < \gamma} \|F(x)\|_\beta + \sup_{x, y \in L, 0 < \|x - y\|_s \leq 1} \sup_{\beta < \gamma} \frac{\|F(x) - \Gamma_{xy} F(y)\|_\beta}{\|x - y\|_s^{\gamma - \beta}} < +\infty$$

On a à présent toutes les définitions nécessaires pour étudier un exemple concret où les différents objets associés aux structures de régularité sont employés.

On considère  $f \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R})$  où  $\alpha \in (0, 1)$ . On peut facilement montrer que pour tout  $L$  compact de  $\mathbb{R}$ , il existe  $C_L > 0$  tel que pour tout  $x, y \in L$  tels que pour  $|y - x| \leq 1$  on ait :

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) - \frac{1}{2}f''(x)(y - x)^2| \leq C_L |y - x|^{2+\alpha}. \quad (8)$$

On revient à présent à la structure de régularité des polynômes  $\overline{\mathcal{T}}$ , et on considère le modèle  $(\overline{\Pi}, \overline{\Gamma})$  défini par :

- $(\overline{\Pi}_x X^k)(y) = (y - x)^k$  pour tout  $k \geq 0$  et  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- $\overline{\Gamma}_{yx} X^k = (X + (y - x)\mathbf{1})^k$

On considère à présent la fonction  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x)\mathbf{1} + f'(x)X + \frac{1}{2}f''(x)X^2 \in \overline{\mathcal{T}}$ . On observe que :

$$\mathcal{Q}_0(\Gamma_{yx} F(x)) = (f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}f''(x)(y - x)^2)\mathbf{1},$$

si bien qu'on peut réécrire (8) :

$$\|F(y) - \overline{\Gamma}_{yx} F(x)\|_0 \leq C_L |y - x|^{2+\alpha}$$

une inégalité qui correspond exactement à l'une des conditions présentes dans la définition de  $\|\cdot\|_{\gamma, L}$  pour  $\beta = 0$  et  $\gamma = 2 + \alpha$ . On vérifie facilement que les autres conditions sont vérifiées et que  $F \in \mathcal{D}^{2+\alpha}(\mathbb{R})$ .

En reprenant le problème à l'envers, on montre que si on suppose  $F(x) = f_0(x)\mathbf{1} + f_1(x)X + f_2(x)X^2$ , alors le fait pour  $F$  d'être dans  $\mathcal{D}^{2+\alpha}$  équivaut au fait que  $f_0$  soit dans  $\mathcal{C}^{2+\alpha}$  et on a alors  $f_1 = f_0'$  et  $f_2 = \frac{1}{2}f_0''$ . Ainsi une distribution modèle encode par définition des propriétés de régularité sur ses composantes. Quand on la projette sur l'espace réel à l'aide du modèle, on obtient analytiquement que  $y \mapsto \overline{\Pi}_x F(x)(y)$  est la fonction polynomiale associée au développement de Taylor de  $f_0$  en  $x$  à l'ordre 2.

Si cet exemple est relativement simple, il donne une bonne idée de l'intérêt des structures de régularité. Si nous sommes tous familiers des développements de Taylor avec des polynômes, le cadre des structures de régularité permet de faire des développements de Taylor généralisés incorporant de nouveaux symboles qui seront interprétés comme des distributions espace-temps singulières par le modèle. L'avantage de se placer dans l'espace  $T$  de la structure de régularité par rapport à l'espace réel, est que, sous réserve de définir un produit sur  $T$ , on peut multiplier entre elles deux distributions modèle quelconques, quand bien même les symboles entrant en jeu dans leurs développements sont interprétés comme des distributions singulières par le modèle. Plus précisément, en considérant un produit sur  $T$  c'est à dire une fonction  $T \times T \rightarrow T$  vérifiant :

**Définition.** Une application  $(a, b) \in T \times T \mapsto ab \in T$  est un produit si elle est bilinéaire et vérifie :

- Si  $a \in T_\alpha$  et  $b \in T_\beta$ , alors  $ab \in T_{\alpha+\beta}$
- On a  $\mathbf{1}a = a\mathbf{1} = a$  pour tout  $a \in T$ .

on a en notant  $\mathcal{D}_\alpha^\gamma$  l'ensemble des distributions modèle ne faisant intervenir que des symboles d'ordre  $\geq \alpha$ , que :

**Théorème 1.** Soit  $F, G$  des distributions modèle avec  $F \in \mathcal{D}_{\alpha_1}^{\gamma_1}$  et  $G \in \mathcal{D}_{\alpha_2}^{\gamma_2}$ , alors  $FG$  est une distribution modèle telle que  $FG \in \mathcal{D}_{\alpha_1+\alpha_2}^\gamma$  avec  $\gamma = (\gamma_1 + \alpha_2) \wedge (\gamma_2 + \alpha_1)$  et pour tout  $L$  compact  $\|FG\|_{\gamma, L} \lesssim \|F\|_{\gamma_1, L} \|G\|_{\gamma_2, L}$ .

Nous pouvons à présent retourner à  $(\Phi_3^4)$ .

### 2.3 Résolution de $(\Phi_3^4)$

Nous n'allons pas dans cette section entrer dans les détails techniques et nous nous contenterons donc de donner une idée de la façon dont on peut résoudre  $(\Phi_3^4)$  avec des structures de régularité.

On ajoute à la structure polynomiale en dimension 3+1 des symboles représentant les distributions aléatoires apparaissant naturellement dans l'étude de  $(\Phi_3^4)$ . On les construit petit à petit à partir des polynômes, de  $\Xi$  symbole d'ordre  $-\frac{5}{2} - \varepsilon$ , de l'opérateur  $\mathcal{I}$  qui associe à  $\tau \in T_\alpha$  un élément de  $T_{\alpha+2}$ , et de la multiplication. On pose ainsi  $\mathbf{!} = \mathcal{I}(\Xi)$  d'ordre  $-\frac{1}{2} - \varepsilon$ , puis  $\mathbf{!} \mathbf{!} = \mathbf{!} \mathbf{!}$  symbole d'ordre  $-1 - 2\varepsilon$ , puis  $\mathbf{!} \mathbf{!} \mathbf{!} = \mathcal{I}(\mathbf{!} \mathbf{!})$  symbole d'ordre  $1 - 2\varepsilon$ , etc. On continue de cette façon à construire tous les symboles dont nous avons besoin.

**Remarque 3.** Dans la définition d'une structure de régularité on suppose  $A$  minoré, et comme la régularité de  $\Xi$  est négative, on pourrait potentiellement générer une suite de symbole  $\Xi^k$  dont l'ordre tendrait vers  $-\infty$ . On peut cependant régler ce problème en supposant que certains produits de symboles sont égaux à 0, à commencer par  $\Xi \Xi$ .

On rappelle qu'on cherche, formellement, à résoudre dans l'espace réel l'équation au point fixe :

$$u = K * (-u^3 + \xi), \quad (4)$$

et qu'on se place dans l'espace des structures de régularité pour résoudre une équation abstraite équivalente. On a déjà un équivalent des distributions espace-temps (les distributions modèle), un équivalent du bruit stochastique (le symbole  $\Xi$ ), et un équivalent du produit. Il ne nous reste plus qu'à définir un équivalent de la convolution. Ce dernier est un opérateur  $\mathcal{K}_\gamma : \mathcal{D}_\alpha^\gamma \rightarrow \mathcal{D}_{\alpha+2\wedge 0}^{\gamma+2}$ , que nous ne décrirons pas explicitement, mais qui correspond à la somme de  $\mathcal{I}$  et d'opérateurs prenant en entrée une distribution modèle et renvoyant en sortie une autre distribution modèle dont tous les symboles sont des polynômes. En notant  $\Phi$  l'analogue abstrait de  $u$ , on veut que  $\Phi$  soit solution de l'équation au point fixe abstrait :

$$\Phi = K_\gamma(-\Phi^3 + \Xi) \quad (9)$$

On peut alors montrer que pour  $\Phi$  de la forme :

$$\Phi = \mathfrak{I} + \Phi_1 \mathbf{1} - \mathfrak{Y} - 3\Phi_1 \mathfrak{Y} + \langle \Phi_X, X \rangle$$

et  $\gamma > 1 + 2\varepsilon$ , l'application  $\Phi \mapsto K_\gamma(-\Phi^3 + \Xi)$  est contractante pour  $t$  suffisamment petit, ce qui implique que (9) admet une unique solution locale.

Il faut maintenant souligner qu'on n'a pas encore précisé quel modèle est associé à notre structure de régularité, mais qu'il est nécessaire de supposer qu'il y a un modèle pour que la notion de distribution modèle fasse sens. Si l'on n'avait pas besoin jusqu'ici de considérer un modèle en particulier, le passage de  $\Phi$  à  $u$  nécessite la construction d'applications de l'espace abstrait vers l'espace réel.

On va en fait considérer, comme annoncé plus haut, une suite de modèles aléatoires  $(\Pi^\delta, \Gamma^\delta)$  convergeant en probabilité vers un modèle  $(\Pi, \Gamma)$  en vérifiant, entre autres, pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$  les égalités :

- $\Pi_x^\delta \Xi = \xi_\delta$
- $\Pi_x^\delta \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\delta$
- $\Pi_x^\delta \mathfrak{Y} = \mathfrak{I}_\delta^2 - C_\delta$
- $\Pi_x^\delta \mathfrak{Y}^2 = \mathfrak{I}_\delta^3 - 3C_\delta \mathfrak{I}_\delta$

Il ne nous reste donc plus qu'à définir l'opérateur de reconstruction  $\mathcal{R}$  qui nous permettra de passer d'une distribution modèle à une distribution espace-temps. En effet,  $\Pi_x^\delta F(x)$  est le développement de Taylor généralisé au point  $x$  de la distribution qui nous intéresse, mais ce que nous voulons avoir c'est la distribution elle-même. On a donc besoin du théorème suivant, dit de reconstruction :

**Théorème 2.** Soit  $\mathcal{T} = (A, T, G)$  une structure de régularité,  $\alpha = \min A$  et  $r = \lceil -\alpha \rceil$ . Soit  $(\Pi, \Gamma)$  un modèle pour  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{D}^\gamma$  l'espace de distributions modèle associées pour  $\gamma > 0$ . Alors il existe une fonction continue  $\mathcal{R} : \mathcal{D}^\gamma \rightarrow \mathcal{C}_s^\alpha$  telle que pour tout compact  $L \subset \mathbb{R}^{d+1}$  et tout  $F \in \mathcal{D}^\gamma$ , la distribution espace-temps  $\mathcal{R}F$  est la seule distribution espace-temps vérifiant :

$$|(\mathcal{R}F)(\mathcal{S}_z^\lambda \eta) - (\Pi_z F(z))(\mathcal{S}_z^\lambda \eta)| \lesssim \lambda^\gamma$$

uniformément en  $\eta \in B_r$ , en  $\lambda \in (0, 1]$  et en  $z \in L$

Dans le cas général, " $\mathcal{R}F(z)$ " n'a pas de sens car  $\mathcal{R}F$  est une distribution. Cependant, si notre modèle est à valeur dans l'espace des fonctions continues (ce qui est le cas pour  $(\Pi^\delta, \Gamma^\delta)$  car on considère un bruit régularisé), on a l'identité diagonale :

$$\mathcal{R}F(z) = (\Pi_z F(z))(z).$$

Ainsi en notant  $\mathcal{R}^\delta$  l'opérateur de reconstruction pour  $(\Pi^\delta, \Gamma^\delta)$ , et  $\Phi^\delta$  la solution de (9), on montre que  $\mathcal{R}K_\gamma = K * \mathcal{R}$  et on en déduit que  $u_\delta = \mathcal{R}^\delta \Phi^\delta$  est solution de :

$$u_\delta = K * [-(u_\delta^3 - (3C_\delta + 9C'_\delta)u_\delta) + \xi_\delta]$$

et la convergence de  $(\Pi^\delta, \Gamma^\delta)$  vers  $(\Pi, \Gamma)$  (et donc de  $\Phi^\delta$  vers  $\Phi$ ) implique que  $u_\delta$  converge en probabilité vers  $u$  qui est l'unique solution de (3) au sens des structures de régularité.

**Remarque 4.** Le terme  $-(3C_\delta + 9C'_\delta)u_\delta$  est en fait égal à  $\mathcal{R}^\delta((\Phi^\delta)^3) - \mathcal{R}^\delta(\Phi^\delta)^3$ . On y retrouve la première constante de renormalisation  $C_\delta$ , nécessaire à la renormalisation des symboles de  $(\Phi_2^4)$ , mais aussi une seconde constante  $C'_\delta$  nécessaire à la renormalisation des symboles exclusifs à  $(\Phi_3^4)$  comme  $\heartsuit$ .

### 3 Conclusion et problèmes ouverts

On a donc grâce aux structures de régularité une notion de solution pour  $(\Phi_3^4)$  qui était auparavant une équation mal posée. Les articles fondateurs de Hairer ont plus généralement ouvert la voie à une résolution systématique d'un grand nombre d'EDPS localement sous-critiques, et nous avons à présent un cadre bien établi pour les questions d'existence et d'unicité des solutions. La théorie des EDPS singulières n'en est toutefois qu'à ses débuts en ce qui concerne une description précise des propriétés des solutions, comme l'existence de mesures invariantes, la convergence des solutions vers celles-ci, et des propriétés hors équilibre telles que la métastabilité [8, 9].

Ainsi, dans le cas de  $(\Phi_3^4)$ , il est parfois plus utile de ne pas recourir directement aux structures de régularité. En effet, l'espace et le temps sont traités ensemble dans la théorie de Hairer, or il est important de les séparer quand on étudie, par exemple, des EDPS non-autonomes [5, 6, 7]. Ainsi, dans le cadre de ma thèse, je suis amené à étudier des équations du type :

$$\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) - u^3(t, x) + a(t)u + \xi(t, x)$$

pour un  $a$  qui change de signe à un temps  $t_0 \in (0, T)$ . On cherche donc à avoir un contrôle précis de  $u(t, \cdot)$  pour tout  $t \in [0, T]$ , et on préfère pour cela recourir à la théorie des distributions paracontrôlées [3, 4], une théorie qui a la même notion de solution que les structures de régularité mais qui est formellement beaucoup plus calculatoire et qui permet souvent d'obtenir des résultats de concentration précis à temps fixé.

## Références

- [1] Hairer, M. (2013). Solving the KPZ equation. *Annals of mathematics*, **178**, 559-664.
- [2] Hairer, M. (2014). A theory of regularity structures. *Inventiones mathematicae*, **198**(2), 269-504.
- [3] Mourrat, J. C., & Weber, H. (2017). The dynamic  $\Phi_3^4$  model comes down from infinity. *Communications in Mathematical Physics*, **356**, 673-753.
- [4] Mourrat, J. C., Weber, H., & Xu, W. (2015, December). Construction of Diagrams for Pedestrians. In *Meeting on Particle Systems and PDE's* (pp. 1-46). Cham : Springer International Publishing.
- [5] Nader, R. (2022). *Metastability in slowly time-dependent non-singular or singular stochastic PDEs* (Doctoral dissertation, Université d'Orléans).
- [6] Berglund, N., & Nader, R. (2023). Stochastic resonance in stochastic PDEs. *Stochastics and Partial Differential Equations : Analysis and Computations*, **11**(1), 348-387.
- [7] Berglund, N., & Nader, R. (2024). Concentration estimates for slowly time-dependent singular SPDEs on the two-dimensional torus. *Electronic J. Probability* **29** :1-35.
- [8] Berglund, N., Di Gesù, G., & Weber, H. (2017). An Eyring–Kramers law for the stochastic Allen–Cahn equation in dimension two. *Electronic J. Probability* **22**(41) :1-27.
- [9] Berglund, N. (2021). An Eyring-Kramers law for slowly oscillating bistable diffusions. *Probability and Mathematical Physics* **2-4** :685-743.