

# Introduction au domaine de recherche: Phénomènes critiques du modèle d'Ashkin-Teller en deux dimensions

Emile Avérous

Encadré par: Hugo Duminil-Copin\*

Septembre 2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Le modèle d'Ising . . . . .	1
1.2	Le modèle d'Ashkin-Teller . . . . .	2
1.3	Le modèle à six sommets . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Continuité des transitions de phase</b>	<b>4</b>
2.1	Le modèle à six sommets en volume infini . . . . .	5
2.2	Le modèle d'Ashkin-Teller sur la courbe auto-duale . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Invariance conforme des modèles au point critique</b>	<b>8</b>
3.1	Quelques modèles dans le continu . . . . .	8
3.2	Invariance conforme pour le modèle d'Ising . . . . .	9
3.3	Invariance conforme pour le modèle d'Ashkin-Teller . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>
	<b>Références</b>	<b>12</b>

## 1 Introduction

Cette introduction au domaine de recherche vise à présenter plusieurs modèles de physique statistique ainsi que leurs liens. Nous expliquerons différents concepts omniprésents en physique statistique, notamment à travers les exemples des modèles d'Ising et d'Ashkin-Teller en deux dimensions.

### 1.1 Le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising a été introduit par le physicien Wilhelm Lenz en 1920 [18] et initialement étudié par Ernst Ising [16]. Il a pour but de modéliser le comportement d'un ferromagnétique en fonction de la température. D'un point de vue mathématique, on considère un sous-domaine fini  $\Lambda$  du réseau  $\mathbb{Z}^d$ . Le modèle d'Ising est une variable aléatoire  $\sigma = (\sigma_x)_{x \in \Lambda} \in \{-1, +1\}^\Lambda$ . Les  $\sigma_x$  sont appelés *spins* et ils interagissent à travers l'Hamiltonien suivant

$$H_{\Lambda, \beta}(\sigma) = -\beta \sum_{(x, y) \in E(\Lambda)} \sigma_x \sigma_y$$

---

\*Université de Genève

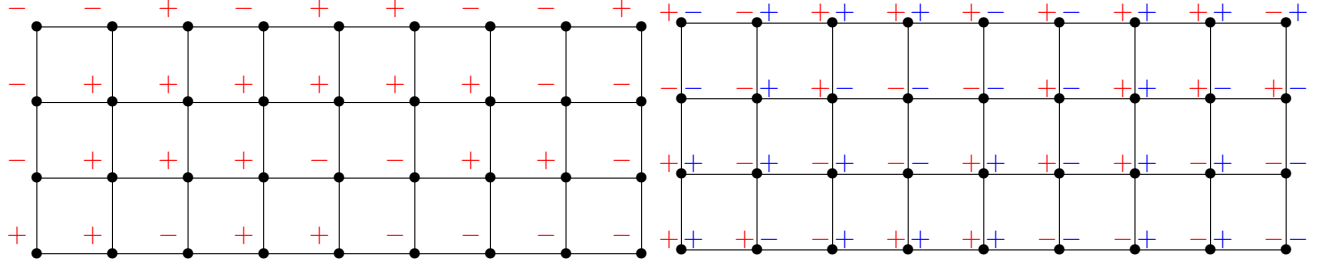


FIGURE 1 – Un exemple de configuration pour le modèle d’Ising (à gauche) et le modèle d’Ashkin-Teller (à droite).

où  $\beta > 0$  est un paramètre appelé la *température inverse* du modèle (car physiquement,  $\beta$  est proportionnel à l’inverse  $1/T$  de la température), et où  $E(\Lambda)$  est l’ensemble des arêtes de  $\Lambda$ , obtenues à partir de celles de  $\mathbb{Z}^d$ . Physiquement, l’hamiltonien représente l’énergie du système physique. Ainsi, les configurations de spin  $\sigma$  qui tendent à minimiser  $H_{\Lambda,\beta}(\sigma)$  sont celles où les spins voisins ont tendance à prendre la même valeur.

La loi de Maxwell-Boltzmann permet de représenter un modèle physique avec un hamiltonien par un modèle probabiliste, où les spins  $\sigma$  sont distribués selon la mesure de probabilité

$$\mu_{\Lambda,\beta}[\sigma] = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}} \exp(-H_{\Lambda,\beta}(\sigma))$$

où  $Z_{\Lambda,\beta} > 0$  est une constante appelée *fonction de partition*, qui sert à faire de cette mesure une mesure de probabilité. Souvent, on oublie ces constantes de normalisation, et on notera plutôt  $\mu_{\Lambda,\beta}[\sigma] \propto \exp(-H_{\Lambda,\beta}(\sigma))$ . Dans tout ce rapport, étant donné une mesure  $\mu$ , on utilisera la notation  $\mu(f)$  pour désigner l’espérance de  $f$  sous  $\mu$ .

Le modèle devient intéressant lorsque  $\Lambda$  devient très grand, et commence à ressembler à  $\mathbb{Z}^d$ . On dit alors qu’une suite de domaines  $(\Lambda_n)_n$  croît vers  $\mathbb{Z}^d$  si la suite est croissante au sens de l’inclusion et si  $\cup_n \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$ .

En dimensions  $d \geq 2$ , le modèle d’Ising possède une *transition de phase*, c’est-à-dire que son comportement à basse température (ou haut  $\beta$ ) est très différent de son comportement à haute température (ou bas  $\beta$ ). Concrètement, il existe une valeur  $\beta_c = \beta_c(d) \in ]0, +\infty[$  telle que :

- Cas sous-critique : Si  $\beta < \beta_c$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux points  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , tels que si  $(\Lambda_n)_n$  croît vers  $\mathbb{Z}^d$ , alors  $\limsup \mu_{\Lambda_n,\beta}[\sigma_x \sigma_y] \leq \varepsilon$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (où on rappelle ici que  $\mu_{\Lambda_n,\beta}[\sigma_x \sigma_y]$  est une espérance)
- Cas sur-critique : Si  $\beta > \beta_c$ , alors il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous points  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , pour tout  $\Lambda$  suffisamment grand (au sens de l’inclusion) et contenant  $x$  et  $y$ , on a  $\mu_{\Lambda,\beta}[\sigma_x \sigma_y] \geq c$ .

On peut comprendre la transition de phase comme ceci : lorsque  $\beta < \beta_c$ , lorsque  $\Lambda$  est très grand, conditionnellement à ce qui se passe loin de lui, un spin prendra toujours une valeur presque uniforme dans  $\{-1, +1\}$ , alors que lorsque  $\beta > \beta_c$ , le modèle présente une magnétisation spontanée, et les spins ont tendance à s’aligner. Il est en fait possible de montrer un résultat plus fort de *sharpness* [1, 13] : dans le cas sous-critique, la valeur  $\limsup \mu_{\Lambda_n,\beta}[\sigma_x \sigma_y]$  décroît exponentiellement en la distance  $|x - y|$ .

En deux dimensions  $d = 2$ , le modèle présente une forme de dualité. Avec le résultat de sharpness, ceci permet de calculer explicitement la valeur du paramètre critique  $\beta_c = \beta_c(2) = \log(1 + \sqrt{2})$ . Une question naturelle est de se demander quel est le comportement du système au point critique  $\beta = \beta_c$ . En dimension 2, de nombreuses choses sont connues, dont on parlera dans les sections suivantes.

## 1.2 Le modèle d’Ashkin-Teller

Le modèle d’Ashkin-Teller a initialement été introduit dans [4] pour étudier un modèle d’atomes à quatre états, et constitue une généralisation naturelle du modèle d’Ising. On se place toujours sur un domaine fini  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ . Cette fois-ci, à chaque sommet  $x$ , on associe deux spins  $\tau_x, \tau'_x \in \{-1, +1\}$ , et donc une configuration est donnée par  $(\tau, \tau') = (\tau_x, \tau'_x)_{x \in \Lambda} \in (\{-1, +1\}^2)^\Lambda$ . Cette fois-ci, l’hamiltonien du système dépend de deux paramètres  $J, U$  et est donné par

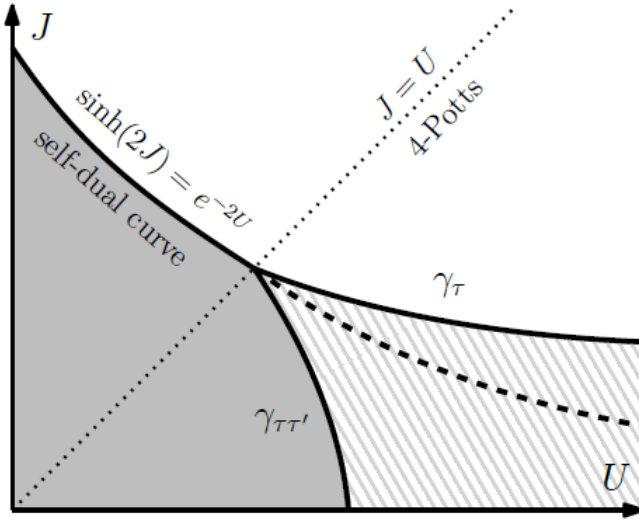


FIGURE 2 – Figure du diagramme de phase tirée de [2]. Le modèle a un comportement sous-critique dans la zone grisée, et un comportement sur-critique dans la zone blanche. Dans la zone hachurée, les spins  $\tau\tau'$  ont un comportement sur-critique, alors que les spins  $\tau$  et  $\tau'$  ont un comportement sous-critique. Les courbes critiques  $\gamma_\tau$  et  $\gamma_{\tau\tau'}$  se rejoignent au point  $J = U = \frac{1}{4} \log(3)$ .

$$H_{\Lambda, J, U}(\tau, \tau') = - \sum_{(x, y) \in E(\Lambda)} (J\tau_x\tau_y + J\tau'_x\tau'_y + U\tau_x\tau_y\tau'_x\tau'_y)$$

et les spins  $(\tau, \tau')$  sont alors distribués selon la mesure

$$\mu_{\Lambda, J, U}[\tau, \tau'] \propto \exp(-H_{\Lambda, J, U}(\tau, \tau')).$$

Lorsque  $U = 0$ , la mesure se factorise et alors  $(\tau, \tau')$  est distribué selon deux modèles d'Ising indépendants de paramètre  $\beta = J$ . Lorsque  $J = 0$ , le produit  $\tau\tau'$  est distribué selon un modèle d'Ising avec  $\beta = U$ . On note aussi le cas  $J = U$  qui correspond au modèle de Potts avec  $q = 4$  introduit dans [19]. Dans le cas général, le modèle d'Ashkin-Teller revient à prendre trois modèles d'Ising :  $\tau$  et  $\tau'$  de paramètre  $\beta = J$  et  $\tau\tau'$  de paramètre  $\beta = U$ , puis de conditionner à ce que le produit des deux premiers soit égal au troisième.

Le modèle d'Ashkin-Teller est très mal compris en dimension  $d \geq 3$ , et a surtout été étudié en dimension  $d = 2$ , où il présente une notion de dualité. Un des résultats majeurs a été de comprendre son diagramme de phase, c'est-à-dire de comprendre les différentes phases (sous-critique, critique, sur-critique) du modèle, en fonction de  $J, U \geq 0$ . Ce diagramme est donné et expliqué à la figure 1.2.

Comme le modèle dépend de deux paramètres  $J, U$ , la transition de phase du modèle ne se déroule pas à un unique point mais au niveau d'une courbe critique. Ici, le modèle exhibe deux transitions de phase : une pour les spins produit  $\tau\tau'$  (courbe  $\gamma_{\tau\tau'}$  sur la figure 1.2), une pour les spins seuls  $\tau$  et  $\tau'$  (courbe  $\gamma_\tau$  sur la figure 1.2). Ces deux transitions de phase sont confondues lorsque  $J \geq U$ , auquel cas elles se déroulent sur une courbe appelée *courbe auto-duale*, dont l'expression explicite est donnée par  $\sinh(2J) = e^{-2U}$ . Nous expliquerons cette appellation dans la section 2. Sur cette courbe, le modèle est relié à un autre modèle appelé le modèle à six sommets.

### 1.3 Le modèle à six sommets

Prenons un domaine  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ . Le modèle à six sommets associe à chaque arête de  $\Lambda$  une orientation, de telle sorte à ce que chaque sommet de degré 4 (c'est-à-dire n'appartenant pas au bord de  $\Lambda$ ) ait précisément deux arêtes entrantes, et deux arêtes sortantes, c'est l'*ice rule* (voir figure 1.3 pour un exemple de configuration).

A chaque sommet de  $\Lambda$ , il y a six configurations possibles d'arêtes entrantes et sortantes, et on associe un poids  $c > 0$  aux sommets où les deux flèches entrantes sont toutes deux verticales ou toutes deux horizontales, et poids 1 aux autres sommets. Pour une configuration de six sommets  $\vec{\omega}$ , notons  $N(\vec{\omega})$  le nombre de sommets de poids  $c$ . La probabilité d'une configuration  $\vec{\omega}$  est donnée par

$$\mathbb{P}_{6V, \Lambda, c}[\vec{\omega}] \propto c^{N(\vec{\omega})}.$$

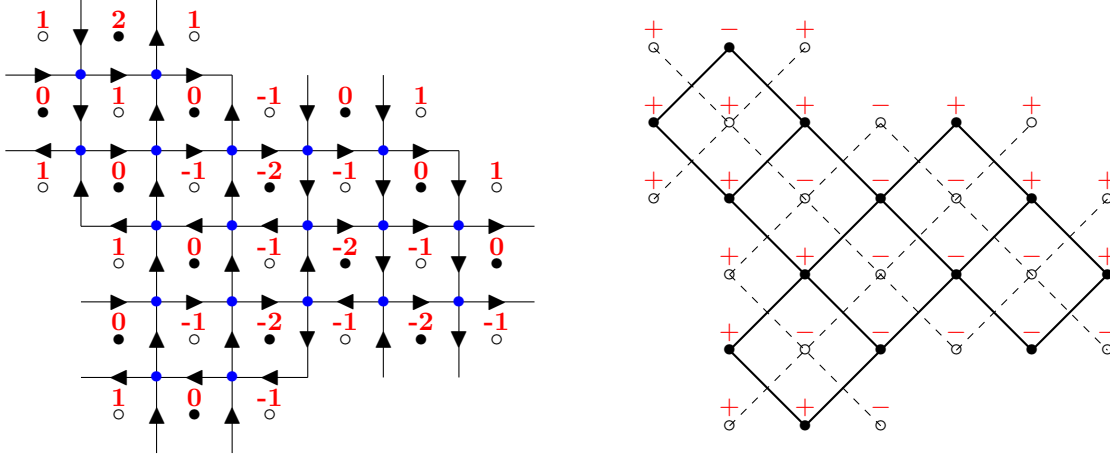


FIGURE 3 – Gauche : Exemple de configuration pour le modèle à six sommets dans un domaine de  $\mathbb{Z}^2$ , dont les sommets de degré 4 sont en bleu. En blanc et noir, les sommets du réseau dual  $(\mathbb{Z}^2)^*$ , sur lequel la fonction de hauteur est définie. Droite : La configuration de spin obtenue à partir de la fonction de hauteur. En traits pleins, le réseau  $\mathbb{L}^\bullet$  et en traitillés son dual  $\mathbb{L}^\circ$ .

Supposons à présent que l'on ne considère que des domaines  $\Lambda$  donnés par l'intérieur d'une courbe fermée de points dans  $\mathbb{Z}^2$  (en quelque sorte, on considère que les domaines sont simplement connexes). Dans ce cas, on peut définir une fonction de hauteur associée à une configuration de six sommets. Considérons le réseau dual  $(\mathbb{Z}^2)^*$  de  $\mathbb{Z}^2$  formé par les faces de  $\mathbb{Z}^2$  (voir figure 1.3). Etant donné une configuration  $\vec{\omega}$  du six sommets, on définit une fonction de hauteur, qui est une fonction  $h$  allant des faces de  $\mathbb{Z}^2$  (sommets de  $(\mathbb{Z}^2)^*$ ) adjacents à  $\Lambda$  et prenant ses valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . On la définit de telle manière à ce que pour chaque arête orientée de  $\vec{\omega}$ , la valeur de  $h$  à gauche de l'arête vale 1 de plus que la valeur de  $h$  à droite. L'ice rule et le fait que  $\Lambda$  soit l'intérieur d'une courbe assure que  $h$  existe et est unique à une constante additive près. La figure 1.3 (gauche) donne un exemple de fonction de hauteur obtenue à partir d'une configuration de six sommets.

On décompose à présent les faces  $(\mathbb{Z}^2)^*$  en deux réseaux. On fixe un coloriage en damier noir/blanc des faces de  $(\mathbb{Z}^2)^*$ . Le réseau  $\mathbb{L}^\bullet$  est obtenu à partir des faces noires de  $\mathbb{Z}^2$  en rajoutant des arêtes entre les faces qui ont un sommet en commun, et le réseau  $\mathbb{L}^\circ$  est obtenu de manière analogue avec les faces blanches (voir la figure 1.3, droite pour un exemple). On remarque que la fonction de hauteur  $h$  prend des valeurs de même parité sur les faces noires, et des valeurs de la parité opposée sur les faces blanches. Comme elle est définie à une constante additive près, on supposera donc toujours qu'elle prend des valeurs paires sur les faces noires et des valeurs impaires sur les faces blanches.

On associe à cette fonction de hauteur une configuration de spin en posant, pour chaque face  $x$ ,  $\sigma_x = 1$  si  $h(x) \equiv 0 \pmod{4}$  ou  $h(x) \equiv 1 \pmod{4}$ , et  $\sigma_x = -1$  sinon (voir figure 1.3, droite). On remarque la chose suivante : autour d'un sommet  $x \in \Lambda$ , il y a quatre faces, deux noires et deux blanches. Alors la ice rule implique que soit les deux faces noires ont le même spin, soit les deux faces blanches ont le même spin, on appelle ceci la *spin ice rule*. De plus, le sommet  $x$  est compté dans  $N(\vec{\omega})$  si et seulement si les deux faces noires ont le même spin, et les deux faces blanches aussi. Ainsi, en notant  $N(\sigma)$  le nombre de tels sommets pour  $\sigma$ , la loi du spin  $\sigma$  est donnée par

$$\text{Spin}_{\Lambda,c}(\sigma) \propto c^{N(\sigma)}.$$

Le modèle à six sommets est assez bien compris car il présente la particularité, comme le modèle d'Ising sur  $\mathbb{Z}^2$ , d'être intégrable (voir [5] pour plus de détails). Nous expliquerons dans la section 2 comment relier ce modèle au modèle d'Ashkin-Teller sur la courbe auto-duale.

## 2 Continuité des transitions de phase

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude des modèles définis précédemment en volume infini, c'est-à-dire sur tout  $\mathbb{Z}^2$ . Pour un espace du type  $E^{\mathbb{Z}^2}$  avec  $E$  discret (typiquement  $E = \{-1, +1\}$ ), on munit cet espace

de sa tribu produit. Si une suite de domaines  $(\Lambda_n)_n$  croît vers  $\mathbb{Z}^2$ , étant donné pour chaque  $n$  une mesure  $\mu_n$  sur  $E^{\Lambda_n}$ , on dit que la suite  $\mu_n$  converge vers une mesure  $\mu$  sur  $E^{\mathbb{Z}^2}$  si pour toute fonction  $f : E^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \mathbb{R}$  ne dépendant que d'un nombre fini de sites dans  $\mathbb{Z}^2$ , on a  $\mu_n(f) \rightarrow \mu(f)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

En général, on considèrera des mesures  $\mu_n$  telles que la mesure d'Ising, mais avec des conditions au bord, c'est-à-dire que l'on conditionne sur la valeur de la configuration sur le bord de  $\Lambda_n$ . Une question importante est de connaître l'importance de ces conditions au bord. Autrement dit, sur un grand domaine  $\Lambda$ , à quel point les conditions au bord ont-elle une influence sur la mesure loin du bord ? On peut se demander aussi si lorsque  $(\Lambda_n)_n$  croît vers  $\mathbb{Z}^2$ , on a une unique mesure en volume infini indépendante du choix des conditions au bord prises sur les  $\Lambda_n$ .

Pour le modèle d'Ising, les propriétés de monotonie assurent l'existence et l'unicité de cette mesure en volume infini dans le cas sous-critique, et la non-unicité dans le cas sur-critique. Ceci vient du fait que si l'on met des spins  $+1$  sur le bord du domaine et que l'on fait tendre le domaine vers  $\mathbb{Z}^2$ , dans le cas sur-critique, les spins auront une (strictement) plus grande probabilité de valoir  $+1$  que  $-1$ , alors que l'inverse est vrai lorsque l'on choisit des conditions au bord  $-1$ . Cependant, dans le cas sous-critique, les spins loins du bord ne voient plus l'influence des conditions au bord, donc dans la limite où  $\Lambda$  tend vers  $\mathbb{Z}^2$ , la loi d'un spin donné tend vers une loi uniforme sur  $\{-1, +1\}$ .

Une des questions les plus importantes dans l'étude d'un modèle de physique statistique est celle de l'unicité de la mesure en volume infini au niveau du paramètre critique. Dans le cas échant, on dit que la transition de phase est *continue*. Pour le modèle d'Ising, cette question a été résolue en toute dimension de manière affirmative.

## 2.1 Le modèle à six sommets en volume infini

Pour l'étude du modèle à six sommets, la question en volume infini porte plutôt sur la fonction de hauteur : supposons que l'on force la fonction de hauteur à valoir 0 ou 1 sur le bord d'un domaine, alors quand le domaine tend vers  $\mathbb{Z}^2$ , à quoi ressemble la fonction de hauteur près d'une face donnée de  $\mathbb{Z}^2$  ? Dans le cas  $c \geq 1$ , cette question a été résolue. Il y a deux comportements possibles pour la fonction de hauteur selon si  $c \leq 2$  ou  $c > 2$ , qui sont la *délocalisation* et *localisation* de la fonction de hauteur respectivement.

**Théorème 2.1** (Glazman, Peled [15]). *Supposons que l'on ait  $c > 2$ . Alors si  $(\Lambda_n)_n$  est une suite de domaines croissant vers  $\mathbb{Z}^2$  et que l'on impose des conditions au bord 0 et 1 pour la fonction de hauteur, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la mesure des fonctions de hauteur converge vers une mesure en volume infini  $\text{HF}^{0,1}$  qui ne dépend pas de la suite  $(\Lambda_n)_n$ .*

*Sous cette mesure, il y a presque sûrement une unique composante connexe de faces avec hauteur 0 et une unique composante connexe de faces avec hauteur 1. De plus, étant donné une face  $x$  de  $\mathbb{Z}^2$ , considérons l'ensemble  $A$  des faces connectées à  $x$  par un chemin dont les hauteurs sont différentes de 0 ou 1. Alors la loi de  $A$  a une queue exponentielle.*

Ce résultat provient de l'étude d'un autre modèle de physique statistique, appelé FK-percolation. Lorsque  $c > 2$ , le modèle à six sommets peut être couplé avec le modèle de FK-percolation critique avec paramètre  $q > 4$ . Dans ce modèle avec  $q > 4$ , la transition de phase est discontinue [8], ce qui va correspondre à cette localisation de la fonction de hauteur.

Dans le cas où  $c \leq 2$ , la situation est plus complexe car il y a délocalisation. Celle-ci est donnée par le résultat suivant.

**Théorème 2.2** (Duminil-Copin, Karrila, Manolescu, Oulamara [9], Glazman, Lammers [14]). *Supposons que  $1 \leq c \leq 2$ . Soit  $(\Lambda_n)_n$  une suite de domaines croissant vers  $\mathbb{Z}^2$  et que l'on impose des conditions au bord 0 et 1 pour la fonction de hauteur. Alors il existe une constante universelle  $C > 0$  indépendante des  $(\Lambda_n)_n$  telle que pour toutes faces  $x, y$  de  $\mathbb{Z}^2$ , l'on ait, pour  $n$  suffisamment grand,*

$$\mathbb{E}_{6V, \Lambda_n, c}[h(x)^2] \geq C^{-1} \log(d(x, \Lambda_n^c))$$

$$C^{-1} \log|x - y| \leq \mathbb{E}_{6V, \Lambda_n, c}[(h(x) - h(y))^2] \leq C \log|x - y|$$

où  $|\cdot|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$  et  $d(x, \Lambda_n^c)$  est la distance de  $x$  à l'extérieur de  $\Lambda_n$ .

D'après ce résultat, il n'est pas possible de définir une mesure en volume infini pour la fonction de hauteur sous ces conditions au bord. Ce théorème provient initialement de calculs de l'énergie libre du modèle à six sommets [10]. Avant de passer au modèle de spin, on introduit la notion suivante de percolation noire.

**Définition 2.3** (Percolation noire). *Considérons une configuration de spins vérifiant la spin ice rule sur les faces d'un domaine  $\Lambda$ . La percolation noire est un ensemble  $\xi^\bullet$  d'arêtes du réseau  $\mathbb{L}^\bullet$ , obtenu de la manière suivante.*

*Pour chaque sommet  $x \in \Lambda$ , soit  $e$  l'arête de  $\mathbb{L}^\bullet$  correspondante (celle dont  $e$  est le milieu). Supposons que les deux faces noires autour de  $x$  (celles aux extrémités de  $e$ ) n'aient pas le même spin, alors on ne met pas  $e$  dans  $\xi^\bullet$ . Si les deux faces blanches autour de  $x$  n'ont pas le même spin, on met  $e$  dans  $\xi^\bullet$ . Si finalement les deux faces noires ont le même spin et de même pour les deux faces blanches, on met  $e$  dans  $\xi^\bullet$  avec probabilité  $\frac{1}{c}$ , et ceci de manière indépendante pour tous les  $x \in \Lambda$ .*

Notons que l'on peut aussi définir une percolation blanche sur le réseau  $\mathbb{L}^\circ$  de la même manière. Ces percolations permettent de mieux comprendre le modèle de spin, et permettront aussi de relier le modèle de spin au modèle d'Ashkin-Teller. Le résultat suivant est essentiellement équivalent à la délocalisation de la fonction de hauteur. Il dit, en quelque sorte, que la configuration de la percolation noire se comporte de la même manière à toute échelle. Ce résultat est un résultat dit de type Russo-Seymour-Welsh (RSW), et des résultats de cette forme sont omniprésents dans l'étude de la phase critique de modèles de physique statistique (voir [7] pour plus de détails sur cette propriété RSW). On notera  $\Lambda_n = \{-n, -n+1, \dots, n\}^2$  la boîte carrée de côté  $2n+1$ .

**Proposition 2.4** (Glazman, Lammers [14], Duminil-Copin, Karrila, Manolescu, Oulamara [9]). *Il existe une constante  $\varepsilon > 0$  telle que pour tout  $n$ , pour tout  $\Lambda$  contenant  $\Lambda_{3n}$ , sous  $\mathbb{P}_{6V, \Lambda, c}$ , dans l'anneau  $\Lambda_{2n} \setminus \Lambda_n$ , il existe un chemin de  $\xi^\bullet$  contournant  $\Lambda_n$  avec probabilité appartenant à  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ .*

Cette notion de même comportement à toute échelle est relié à la notion d'invariance conforme qui sera le sujet de la section 3. Ce résultat permet de montrer, pour le modèle de spin,

**Théorème 2.5** (Mesures en volume infini pour le modèle à six sommets). *1. Soit  $c > 2$ . Alors sous la condition au bord  $+1$  pour le modèle de spin, il existe une unique mesure en volume infini  $\text{Spin}_c^{+,+}$ . Sous cette mesure, il y a une composante connexe infinie de spins  $+1$  dans  $\mathbb{L}^\bullet$ , et de même dans  $\mathbb{L}^\circ$ . De plus, pour toute face  $x$  de  $\mathbb{Z}^2$ , la taille de la composante connexe de spins  $-1$  contenant  $x$  a une queue exponentielle.*

*2. Soit  $c \leq 2$ . Alors sous la condition au bord  $+1$  pour le modèle de spin, il existe une unique mesure en volume infini  $\text{Spin}_c$ . Sous cette mesure, toutes les composantes connexes de spin constant sont presque sûrement finies, et la mesure est invariante par multiplication par  $-1$  de tous les spins. Pour toute face  $x$  de  $\mathbb{Z}^2$ , la taille de la composante connexe de spin constant contenant  $x$  a une queue polynomiale.*

## 2.2 Le modèle d'Ashkin-Teller sur la courbe auto-duale

On s'intéresse maintenant au cas du modèle d'Ashkin-Teller. Afin de le relier au modèle à six sommets, on introduit la notion de *random current*. Etant donné un domaine  $\Lambda$ , le random current avec paramètres  $J, U$  est un couple  $\mathbf{n} = (\omega, \eta)$  où  $\eta \subset \omega \subset E(\Lambda)$  sont deux ensembles d'arêtes. Le poids d'une configuration  $\mathbf{n}$  est donné par

$$w_{\Lambda, J, U}(\mathbf{n}) = 2^{k(\omega)} x^{|\eta|} y^{|\omega \setminus \eta|}$$

où

$$x = e^{2U} \sinh(2J), \quad y = e^{2U} \cosh(2J) - 1.$$

Notons  $\partial \mathbf{n} = \partial \eta$  l'ensemble des sommets qui ont un degré impair pour  $\eta$ . Alors le modèle d'Ashkin-Teller est relié à son random current par l'expression des corrélations, pour  $A, B \subset \Lambda$

$$\text{AT}_{\Lambda, J, U} \left[ \prod_{x \in A} \tau_x \prod_{x \in B} \tau'_x \right] = \frac{\sum_{\mathbf{n}, \partial \mathbf{n} = A \Delta B} w_{\Lambda, J, U}(\mathbf{n}) \mathbb{1}(\mathbf{n} \in \mathcal{F}_A)}{\sum_{\mathbf{n}, \partial \mathbf{n} = \emptyset} w_{\Lambda, J, U}(\mathbf{n})}$$

où  $\Delta$  est la différence symétrique et où  $\mathbf{n} \in \mathcal{F}_A$  signifie que chaque composante connexe de  $\omega$  intersecte un nombre pair de points de  $A$ . On peut définir le random current comme une variable aléatoire en imposant que  $\partial \mathbf{n} = \emptyset$  :

$$\mathbb{P}_{RC,\Lambda,J,U}^\emptyset[\mathbf{n}] = \frac{w(\mathbf{n})\mathbb{1}(\partial \mathbf{n} = \emptyset)}{\sum_{\mathbf{n}', \partial \mathbf{n}' = \emptyset} w(\mathbf{n}')}.$$

Pour le modèle d'Ising, le random current est un outil essentiel pour étudier le modèle en toute dimension. Le résultat important est le suivant. Il faut normalement faire attention aux conditions de bord mais on les ignore dans l'intérêt de ce rapport. Ce couplage utilise la dualité suivante entre les réseaux  $\mathbb{L}^\bullet$  et  $\mathbb{L}^\circ$  : à chaque arête  $e$  de  $\mathbb{L}^\bullet$ , on peut associer une unique arête duale  $e^*$  de  $\mathbb{L}^\circ$  obtenue à partir de  $\mathbb{L}^\bullet$  par rotation de  $\pi/2$  autour de son milieu. Les détails du couplage suivant ne sont pas si importants, mais les nombreuses propriétés de celui-ci illustrent les différents liens que l'on peut obtenir entre les modèles.

**Théorème 2.6** (Couplage six sommets/Ashkin-Teller). *Soit  $\Lambda$  un domaine fini de  $\mathbb{Z}^2$  et soient  $(J, U)$  des paramètres sur la courbe auto-duale, c'est-à-dire vérifiant  $e^{-2U} = \sinh(2J)$ . Posons  $c = \coth(2J)$  (où  $\coth = \cosh / \sinh$ ). Alors il est possible de coupler les modèles suivants*

- Le modèle d'Ashkin-Teller  $(\tau, \tau')$  avec paramètres  $(J, U)$  sur le réseau  $\mathbb{L}^\bullet$ .
- Le random current sans sources (c'est-à-dire pris sous  $\mathbb{P}_{J,U}^\emptyset$ )  $\mathbf{n}^\dagger = (\omega^\dagger, \eta^\dagger)$  sur le réseau  $\mathbb{L}^\circ$  avec paramètres  $(J, U)$ .
- Les configurations de spin et de percolation noire  $\sigma, \xi^\bullet$  sous la mesure  $\text{Spin}_{\Lambda,c}$

de telle manière que

- $\omega^\dagger$  soit précisément l'ensemble dual d'arêtes de  $\xi^\bullet$ , c'est-à-dire qu'une arête  $e$  de  $\mathbb{L}^\bullet$  appartient à  $\xi^\bullet$  si et seulement si l'arête duale  $e^*$  de  $\mathbb{L}^\circ$  n'appartient pas à  $\omega$ .
- $(\tau, \tau')$  est constant sur chaque arête de  $\xi^\bullet$
- $\eta^\dagger$  est l'ensemble des interfaces de  $\sigma_{\mathbb{L}^\bullet}$ , c'est-à-dire qu'une arête  $e^*$  de  $\mathbb{L}^\circ$  appartient à  $\omega$  si et seulement si l'arête  $e$  correspondante de  $\mathbb{L}^\bullet$  a deux spins  $\sigma$  différents à ses extrémités.
- La configuration de spin satisfait  $\sigma_{\mathbb{L}^\bullet} = \tau\tau'$ .
- Etant donné la configuration de six sommets  $(\sigma, \xi^\bullet)$ , la configuration d'Ashkin-Teller est obtenue en choisissant  $\tau\tau' = \sigma_{\mathbb{L}^\bullet}$ , puis en choisissant  $\tau$  par des spins  $\{-1, +1\}$  indépendants et uniformes sur chacune des composantes connexes de  $\xi^\bullet$ .

**Remarque 2.7.** — La percolation noire  $\xi^\bullet$  et la composante  $\omega$  du random current sont reliés par une notion de dualité, l'un est une fonction déterministe de l'autre.

- Le modèle à six sommets présente une dualité simple correspondant à la dualité entre  $\mathbb{L}^\bullet$  et  $\mathbb{L}^\circ$ . Ainsi, les spins  $\sigma_{\mathbb{L}^\bullet}$  et  $\sigma_{\mathbb{L}^\circ}$  sont distribués identiquement. Les spins sur les faces noires sont reliés au modèle d'Ashkin-Teller sur  $\mathbb{L}^\bullet$  par le théorème précédent, et de même les spins sur les faces blanches sont reliés au modèle d'Ashkin-Teller sur  $\mathbb{L}^\circ$ . Ce lien entre le modèle d'Ashkin-Teller sur  $\mathbb{L}^\bullet$  et sur  $\mathbb{L}^\circ$  avec les mêmes paramètres  $(J, U)$  correspond à l'auto-dualité du modèle, qui n'est valide que pour des paramètres sur la courbe  $e^{-2U} = \sinh(2J)$ .

Notons que le modèle d'Ashkin-Teller est couplé au random current, mais sur des réseaux duaux l'un de l'autre. Ce résultat a été utilisé dans [11, 12] pour étudier le *double random current* du modèle d'Ising, qui correspond au cas  $U = 0$  du théorème précédent.

A partir des résultats sur le modèle de spin, notamment du résultat de RSW pour  $\xi^\bullet$ , ce théorème permet d'extraire des résultats sur le modèle d'Ashkin-Teller sur la courbe auto-duale. On rappelle (voir figure 1.2) que la courbe auto-duale est critique dans la zone  $J \geq U$  (dans la zone où il y a une unique transition de phase).

**Théorème 2.8.** *Soient  $(J, U)$  avec  $J \geq U \geq 0$  et  $e^{-2U} = \sinh(2J)$ . Alors il existe une unique mesure en volume infini  $\text{AT}_{J,U}$  qui est la limite des mesures sur des domaines finis et avec des conditions au bord quelconques. De plus, sous cette mesure, les corrélations  $\text{AT}_{J,U}[\sigma_x \sigma_y]$  décroissent polynomialement en  $|x - y|^{-1}$ .*

Il est aussi possible de montrer d'autres résultats qualitatifs sur cette mesure  $AT_{J,U}$ . Pour ce modèle, comme pour le modèle d'Ising, la phase critique présente un comportement très différent des phases sous-critiques et sur-critiques. Les corrélations décroissent polynomialement, et on voit apparaître une sorte d'invariance par changement d'échelle. Dans la section suivante, on présente des résultats et des conjectures sur le comportement quantitatif des modèles à grande échelle.

### 3 Invariance conforme des modèles au point critique

Supposons à présent que l'on considère les modèles comme précédemment sur le réseau  $\delta\mathbb{Z}^2$ , avec  $\delta > 0$  que l'on fait tendre vers 0. On peut se demander si on a une forme de convergence du modèle vers un objet continu. La conjecture générale est que pour de nombreux modèles de physique statistique, la phase critique possède, dans la limite  $\delta \rightarrow 0$ , la propriété d'*invariance conforme*. Dans le continu, cette propriété s'écrit de la forme suivante.

Dans la suite, on suppose que par "ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$ ", on sous-entend que l'ouvert est différent de  $\mathbb{C}$  tout entier. Supposons que l'on ait un objet défini sur chaque ouvert simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$  que l'on identifie à  $\mathbb{C}$ . Cet objet est dit invariant conforme si pour tous ouverts simplement connexes  $U, V \subset \mathbb{C}$ , si  $f$  est une bijection conforme de  $U$  vers  $V$  (c'est-à-dire une bijection holomorphe), alors l'objet sur  $V$  est simplement le pushforward de l'objet sur  $U$  par  $f$ .

Dans la section suivante, nous introduisons certains objets dans le continu qui possèdent cette propriété d'invariance conforme. Nous expliquerons ensuite comment ces objets apparaissent comme des limites à partir des modèles discrets. Nous exhiberons notamment différentes questions encore ouvertes dans le domaine et les résultats partiels qui ont déjà été démontrés.

#### 3.1 Quelques modèles dans le continu

Le premier modèle continu que nous introduisons est le champ libre gaussien, qui sera appelé plus simplement GFF (Gaussian Free Field). Sur un ouvert simplement connexe  $U \subset \mathbb{C}$ , les covariances de cet objet sont obtenues à partir de la fonction de Green  $G_U$ , qui est une fonction à deux variables  $x, y \in U$ , harmonique en  $x, y$  en dehors de la diagonale  $x = y$ , et divergeant en  $\frac{1}{2\pi} \log|x - y|$  sur cette diagonale (la définition précise de  $G_U$  ne sera pas importante dans la suite).

**Définition 3.1** (GFF). *Supposons donné un ouvert simplement connexe  $U \subset \mathbb{C}$ . Le GFF est une distribution aléatoire  $\Gamma : U \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant que pour toute fonction test  $f : \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ ,  $\Gamma(f)$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance*

$$\mathbb{E}[\Gamma(f)^2] = \int_{U \times U} f(x)f(y)G_U(x,y)dx dy$$

où  $G_U$  est la fonction de Green sur  $U$ .

Le champ libre gaussien est un objet très naturel dans le continu, et il apparaît comme la limite d'objets discrets. On renvoie à [24] pour plus de détails sur le GFF. On cite tout de même la propriété d'invariance conforme. Soient  $U, V$  deux ouverts simplement connexes et  $\Phi : U \rightarrow V$  une bijection conforme. Soit  $\Gamma$  le GFF sur  $U$ . Alors  $\Gamma \circ \Phi$  est le GFF sur  $V$ .

Le GFF  $\Gamma$  est une distribution aléatoire, et n'est notamment pas évaluable en un point donné. Cependant, il existe tout de même des objets se comportant comme des "lignes de niveau" du GFF, ce qui a initialement été remarqué dans [20]. Posons  $\lambda = \sqrt{\pi}/8$ . Alors il existe un ensemble (infini) aléatoire de boucles appelé  $CLE_4$  (Conformal Loop Ensemble) qui peut être couplé avec le GFF tel que expliqué dans le résultat ci-dessous. Notons que le "4" dans  $CLE_4$  est un paramètre, et on peut en fait définir toute une famille de  $CLE_\kappa$  avec  $\kappa \in ]8/3, 8[$ , introduit initialement par Sheffield dans [21], puis étudié par Sheffield et Werner dans [22]. On ne s'intéresse qu'au paramètre  $\kappa = 4$  car c'est celui pour lequel on a un couplage naturel avec le GFF.

**Théorème 3.2** (Couplage GFF- $CLE_4$ ). *Soit  $U$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$ . Alors le GFF  $\Gamma$  peut être couplé avec un ensemble de boucles appelé  $CLE_4$  de telle manière à ce que :*

— *Le  $CLE_4$  est mesurable par rapport au GFF.*

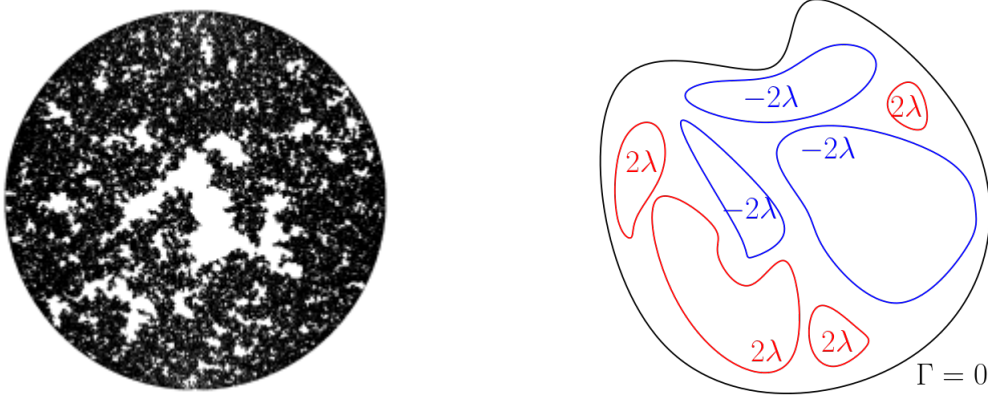


FIGURE 4 – Gauche : Simulation d’un  $CLE_4$  due à David B. Wilson. L’intérieur des boucles est représentée en blanc. Droite : Une représentation du couplage entre le GFF et le  $CLE_4$ . Les boucles du  $CLE_4$  sont représentées en rouge et en bleu. Dans chaque boucle, la “valeur” de  $\Gamma$  sur le bord intérieur de la boucle est  $-2\lambda$  ou  $2\lambda$ , où le signe est pris indépendamment pour chaque boucle avec probabilité  $\frac{1}{2}$ .

- Conditionnellement au  $CLE_4$ , le GFF est obtenu de la manière suivante : on fixe, pour chaque boucle  $\ell$  du  $CLE_4$ , une variable  $\varepsilon_\ell$  uniforme dans  $\{-1, +1\}$ , avec les  $\varepsilon_\ell$  mutuellement indépendants. Fixons aussi un GFF  $\Gamma_\ell$  dans l’intérieur de chaque boucle  $\ell$ , avec les  $\Gamma_\ell$  mutuellement indépendants. Le GFF  $\Gamma$  est égal, en distribution, à

$$\Gamma = \sum_{\ell} (\Gamma_\ell + 2\lambda\varepsilon_\ell) \mathbb{1}_{int(\ell)}$$

où  $int(\ell)$  est l’intérieur de la boucle  $\ell$ .

Notons que le choix d’un “saut” de  $2\lambda$  est important, et que l’on ne peut pas coupler d’ensemble de boucle comme précédemment en remplaçant  $2\lambda$  par autre chose. Notons aussi que la mesurabilité du  $CLE_4$  en fonction du GFF est un résultat non constructif, et il n’y a pas de façon explicite de construire le  $CLE_4$  en fonction du GFF. Une simulation du  $CLE_4$  et une représentation du couplage sont données figure 3.1. Pour plus de détail sur ce couplage, on renvoie à [24].

Il est tout de même naturel de se demander si l’on ne peut pas espérer avoir des lignes de niveau à d’autres niveaux que  $\pm 2\lambda$ , éventuellement en retirant certaines des hypothèses. La réponse est oui sous certaines conditions.

**Théorème 3.3** (Ensembles locaux 2-valués du GFF [3]). *Soient  $a, b > 0$  deux réels tels que  $a + b \geq 2\lambda$ . Alors il existe un ensemble de courbes aléatoire  $\mathfrak{L}_{-a,b}$  appelé ensemble local 2-valué qui peut être écrit comme l’union disjointe d’ensembles de boucles  $\mathfrak{L}_{-a,b}^-$  et  $\mathfrak{L}_{-a,b}^+$ . L’ensemble  $\mathfrak{L}_{-a,b}$  peut être couplé avec un GFF  $\Gamma$  de manière à ce que :*

- Les ensembles  $\mathfrak{L}_{-a,b}^-$  et  $\mathfrak{L}_{-a,b}^+$  sont mesurables par rapport au GFF.
- si  $(\Gamma_l)_{l \in \mathfrak{L}_{-a,b}}$  est une liste de GFF indépendants sur chaque  $l \in \mathfrak{L}_{-a,b}$ , alors on a l’égalité

$$\Gamma = \sum_{l \in \mathfrak{L}_{-a,b}^-} (\Gamma_l - a) \mathbb{1}_{int(l)} + \sum_{l \in \mathfrak{L}_{-a,b}^+} (\Gamma_l + b) \mathbb{1}_{int(l)}$$

Ainsi, le  $CLE_4$  peut être vu comme un cas particulier de cette construction, avec  $a = b = 2\lambda$ . La différence entre les couplages est que l’appartenance à  $\mathfrak{L}_{-a,b}^-$  et  $\mathfrak{L}_{-a,b}^+$  n’est pas obtenue par des lancers de pièce indépendants dans le cas général.

### 3.2 Invariance conforme pour le modèle d’Ising

Au point critique, le modèle d’Ising possède de nombreuses propriétés d’invariance conforme. On cite par exemple [6, 23] pour des résultats d’invariance conforme et de convergence de certaines interfaces vers des

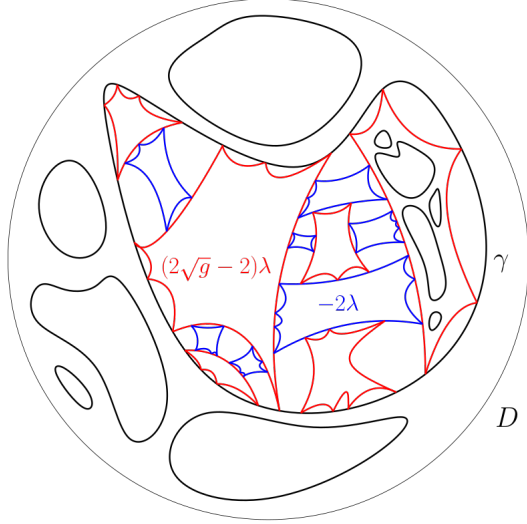


FIGURE 5 – Illustration de la convergence du random current du modèle d’Ashkin-Teller vers un ensemble de boucles. En noir, les bords extérieurs des composantes connexes de  $\omega^\delta$  forment un  $CLE_4$ . Conditionnellement à un tel bord  $\gamma$ , les bords intérieurs forment l’ensemble  $\mathfrak{L}_{-2\lambda, (2\sqrt{g}-2)\lambda}$  dont les bords de  $\mathfrak{L}_{-2\lambda, (2\sqrt{g}-2)\lambda}^-$  sont en bleus, et ceux de  $\mathfrak{L}_{-2\lambda, (2\sqrt{g}-2)\lambda}^+$  sont en rouge. A l’intérieur de ces boucles, on retrouve à nouveau les bords extérieurs de  $\omega$  qui forment un  $CLE_4$ .

courbes de type  $CLE_\kappa$  avec  $\kappa = 3$  et  $\kappa = 16/3$ . Pour le lien avec Ashkin-Teller, on s’intéressera plutôt à l’invariance conforme du double random current du modèle d’Ising, comme démontré dans [11, 12]. Supposons que l’on considère un ouvert  $D$  simplement connexe de régularité suffisante (domaine de Jordan). Pour  $\delta > 0$ , soit  $D^\delta$  une discrétisation de  $D$  par le réseau  $\delta\mathbb{Z}^2$ . On considère le modèle d’Ising critique sur ce domaine, ainsi que son double random current  $\mathbf{n}^\delta = (\omega^\delta, \eta^\delta)$  défini comme le random current du modèle d’Ashkin-Teller avec  $U = 0$ .

**Théorème 3.4** (Duminil-Copin, Lis, Qian [11, 12]). *Lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , les composantes connexes du random current  $\omega^\delta$  convergent en loi vers un objet invariant conforme. Plus précisément, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ ,*

- *Les bords extérieurs des composantes connexes de  $\omega^\delta$  convergent vers un  $CLE_4$  dans  $D$ .*
- *Si le bord extérieur d’une composante connexe de  $\omega^\delta$  converge vers  $\gamma$ , les bords intérieurs de cette composante convergent vers l’ensemble  $\mathfrak{L}_{-2\lambda, (2\sqrt{2}-2)\lambda}$  dans l’intérieur de  $\gamma$ .*
- *Si le bord intérieur d’une composante connexe de  $\omega^\delta$  converge vers  $\gamma$ , alors les bords extérieurs des composantes connexes de  $\omega^\delta$  à l’intérieur de  $\gamma$  convergent vers le  $CLE_4$  dans l’intérieur de  $\gamma$ .*

La figure 3.3 avec  $g = 2$  illustre ce théorème.

### 3.3 Invariance conforme pour le modèle d’Ashkin-Teller

Dans le cas général du modèle d’Ashkin-Teller, on s’attend aussi à avoir des phénomènes d’invariance conforme sur la courbe auto-duale avec  $J \geq U$ . Au niveau du modèle à six sommets, on a la conjecture suivante. Cette conjecture est connue lorsque  $c = \sqrt{2}$ , qui correspond au cas  $U = 0$  du modèle d’Ising, et ce résultat est le point essentiel pour identifier la limite dans le théorème de la section précédente. Remarquons que cette conjecture est beaucoup plus forte que le résultat de délocalisation de la fonction de hauteur, et n’est notamment valide que pour  $c \geq 2$ .

**Conjecture 3.5.** *Soit  $0 \leq c \leq 2$ . Soit  $D$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  et  $D^\delta$  une discrétisation de  $D$  par  $\delta\mathbb{Z}^2$ . Considérons le modèle à six sommets sur  $D^\delta$  avec condition au bord 0 ou 1 pour la fonction de hauteur. Alors la fonction de hauteur converge vers  $\sigma GFF$ , dans le sens où pour toute fonction test  $f \in C_c^\infty(D)$ , on a la convergence en loi*

$$\sum_{x \in D^\delta} h(x) f(x) \rightarrow \sigma \Gamma(f) \quad (\delta \rightarrow 0)$$

où  $\sigma$  est donné par

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sin^{-1}(c/2)}.$$

Un résultat partiel a été obtenu pour certaines valeurs de  $c$  dans le plan tout entier.

**Théorème 3.6** (Duminil-Copin, Lammers, Manolescu, Kozłowski, 2024+). *Soit  $\sqrt{3} \leq c \leq 2$ . Alors on a la convergence de la fonction de hauteur vers le GFF dans le cas où le domaine est le plan tout entier.*

Remarquons que les spins produit  $\tau\tau'$  dans le modèle d'Ashkin-Teller sont obtenus en regardant la fonction de hauteur du six sommets modulo 4, et donc  $\tau\tau'$  est obtenu en considérant  $\cos(\frac{\pi}{2}h)$ . Admettant qu'il est possible de définir le cosinus du GFF (voir [17]), une conjecture naturelle est la suivante. Encore une fois, le résultat n'est connu que dans le cas d'Ising  $U = 0$  [17].

**Conjecture 3.7.** *Soit  $(J, U)$  sur la courbe auto-duale avec  $J \geq U$  et soit  $c = \coth(2J)$ . Alors le champ du spin produit  $\tau\tau'$  pris sous la mesure  $\text{AT}_{J,U}$  sur  $\delta\mathbb{Z}^2$  converge, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , vers  $\cos(\frac{\pi}{2}\sigma \text{GFF})$ , dans le sens où l'on a convergence en loi de la variable obtenue en intégrant contre une fonction test  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$ .*

Posons  $g = \frac{8}{\pi} \sin^{-1}(c/2) = \frac{8}{\pi\sigma^2}$ . Remarquons que pour  $U = 0$ , on a  $c = \sqrt{2}$  et  $g = 2$ . Pour cette valeur de  $g$ , on a  $2\sqrt{g}\lambda = 2/\sigma$ . Ainsi, lorsque l'on considère des lignes de niveau de  $2\sqrt{g}\lambda$  pour le GFF, ceci correspond pour  $\sigma\text{GFF}$  à des lignes de niveau de saut 2. Cette remarque permet d'étendre naturellement le résultat d'invariance conforme pour le double random current du modèle d'Ising à une conjecture dans le cas général du modèle d'Ashkin-Teller (voir figure 3.3).

**Conjecture 3.8** (Convergence du random current d'Ashkin-Teller). *Soit  $(J, U)$  sur la courbe auto-duale avec  $J \geq U$ . Soit  $D$  un domaine avec discrétisation  $D^\delta$  par  $\delta\mathbb{Z}^2$ . Considérons le modèle d'Ashkin-Teller dans le domaine  $D^\delta$  sans conditions au bord, avec son random current  $\mathbf{n}^\delta = (\omega^\delta, \eta^\delta)$ . Lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , les composantes connexes du random current  $\omega^\delta$  convergent en loi vers un objet invariant conforme. Plus précisément, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ ,*

- *Les bords extérieurs des composantes connexes de  $\omega^\delta$  convergent vers un  $\text{CLE}_4$  dans  $D$ .*
- *Si le bord extérieur d'une composante connexe de  $\omega^\delta$  converge vers  $\gamma$ , les bords intérieurs de cette composante convergent vers l'ensemble  $\mathfrak{L}_{-2\lambda, (2\sqrt{g}-2)\lambda}$  dans l'intérieur de  $\gamma$ .*
- *Si le bord intérieur d'une composante connexe de  $\omega^\delta$  converge vers  $\gamma$ , alors les bords extérieurs des composantes connexes de  $\omega^\delta$  à l'intérieur de  $\gamma$  convergent vers le  $\text{CLE}_4$  dans l'intérieur de  $\gamma$ .*

*De plus, cette convergence est naturellement couplée avec le GFF obtenu à la limite du six sommets.*

## 4 Conclusion

L'étude des phénomènes critiques de modèles de physique statistique est un domaine vaste. Pour certains modèles tels que le modèle d'Ising en deux dimensions, on sait dire de nombreuses choses très précises sur le comportement du modèle au point critique, où l'on voit apparaître cette notion d'invariance conforme.

Cependant, alors que l'invariance conforme semble être un comportement universel des modèles au point critique, ce qui est très bien compris en physique, relativement peu de résultats positifs dans ce sens ont été démontrés en mathématiques. On citera notamment les modèles d'Ising, de percolation sur le réseau triangulaire, et le modèle de dimères sur lesquels des propriétés d'invariance conforme ont été démontrés.

Pour un modèle tel que le modèle à six sommets ou d'Ashkin-Teller, il est tout de même possible d'obtenir des informations sur le comportement qualitatif du modèle au point critique en volume infini (propriétés de RSW, de décroissance polynomiale des corrélations, etc.), qui sont les premières étapes pour comprendre le comportement quantitatif du modèle dans le continu (convergence des composantes connexes, des spins, etc.).

## Références

- [1] Michael AIZENMAN, David J BARSKY et Roberto FERNÁNDEZ. “The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp”. In : *Journal of Statistical Physics* 47 (1987), p. 343-374.
- [2] Yacine AOUN, Moritz DOBER et Alexander GLAZMAN. “Phase diagram of the Ashkin–Teller model”. In : *Communications in Mathematical Physics* 405.2 (2024), p. 37.
- [3] Juhan ARU, Avelio SEPÚLVEDA et Wendelin WERNER. “On bounded-type thin local sets of the two-dimensional Gaussian free field”. In : *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 18.3 (2019), p. 591-618.
- [4] Julius ASHKIN et Edward TELLER. “Statistics of two-dimensional lattices with four components”. In : *Physical Review* 64.5-6 (1943), p. 178.
- [5] Rodney J BAXTER. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Courier Corporation, 2007.
- [6] Dmitry CHELKAK et Stanislav SMIRNOV. “Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables”. In : *Inventiones mathematicae* 189 (2012), p. 515-580.
- [7] Hugo DUMINIL-COPIN. “Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice”. In : *PIMS-CRM Summer School in Probability*. Springer, 2017, p. 35-161.
- [8] Hugo DUMINIL-COPIN, Maxime GAGNEBIN, Matan HAREL, Ioan MANOLESCU et Vincent TASSION. “Discontinuity of the phase transition for the planar random-cluster and Potts models with  $q > 4$ ”. In : *arXiv preprint arXiv :1611.09877* (2016).
- [9] Hugo DUMINIL-COPIN, Alex KARRILA, Ioan MANOLESCU et Mendes OULAMARA. “Delocalization of the height function of the six-vertex model”. In : *arXiv preprint arXiv :2012.13750* (2020).
- [10] Hugo DUMINIL-COPIN, Karol Kajetan KOZŁOWSKI, Dmitry KRACHUN, Ioan MANOLESCU et Tatiana TIKHONOVSKAIA. “On the six-vertex model’s free energy”. In : *Communications in Mathematical Physics* 395.3 (2022), p. 1383-1430.
- [11] Hugo DUMINIL-COPIN, Marcin LIS et Wei QIAN. “Conformal invariance of double random currents I : identification of the limit”. In : *arXiv preprint arXiv :2107.12985* (2021).
- [12] Hugo DUMINIL-COPIN, Marcin LIS et Wei QIAN. “Conformal invariance of double random currents II : tightness and properties in the discrete”. In : *arXiv preprint arXiv :2107.12880* (2021).
- [13] Hugo DUMINIL-COPIN et Vincent TASSION. “A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model”. In : *Communications in Mathematical Physics* 343 (2016), p. 725-745.
- [14] Alexander GLAZMAN et Piet LAMMERS. “Delocalisation and continuity in 2D : loop  $O(2)$ , six-vertex, and random-cluster models”. In : *arXiv preprint arXiv :2306.01527* (2023).
- [15] Alexander GLAZMAN et Ron PELED. “On the transition between the disordered and antiferroelectric phases of the 6-vertex model”. In : *Electronic Journal of Probability* 28 (2023), p. 1-53.
- [16] E ISING. *Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. Z Für Phys* 31 : 253–258. 1925.
- [17] J JUNNILA, E SAKSMAN et C WEBB. “Imaginary multiplicative chaos : Moments, regularity and connections to the Ising model. Preprint”. In : *arXiv preprint arXiv :1806.02118* (2018).
- [18] Wilhelm LENZ. “Beitrag zum Verständnis der magnetischen Erscheinungen in festen Körpern”. In : *Z. Phys.* 21 (1920), p. 613-615.
- [19] Renfrey Burnard POTTS. “Some generalized order-disorder transformations”. In : *Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society*. T. 48. 1. Cambridge University Press. 1952, p. 106-109.
- [20] Oded SCHRAMM et Scott SHEFFIELD. “Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field”. In : (2009).
- [21] Scott SHEFFIELD. “Exploration trees and conformal loop ensembles”. In : (2009).
- [22] Scott SHEFFIELD et Wendelin WERNER. “Conformal loop ensembles : the Markovian characterization and the loop-soup construction”. In : *Annals of Mathematics* (2012), p. 1827-1917.

- [23] Stanislav SMIRNOV. “Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits”. In : *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics* 333.3 (2001), p. 239-244.
- [24] Wendelin WERNER et Ellen POWELL. “Lecture notes on the Gaussian free field”. In : *arXiv preprint arXiv :2004.04720* (2020).