

Introduction au Domaine de Recherche

Les arbres décorés utilisés dans les EDPS

Sommaire

1	Introduction	2
2	Notions préliminaires	4
3	Série de Butcher	7
4	Structure de régularité	9
5	Schrödinger non linéaire	12

1 Introduction

Cette introduction n'attaque qu'un angle des motivations et de l'histoire de l'utilisation des arbres pour travailler sur les EDPS (équation aux dérivées partielles stochastique).

Une EDPS est une EDP (équation aux dérivées partielles) dans laquelle de l'aléatoire est présent. Ce dernier agit sur l'équation de diverses manières. On évoquera deux équations connues, de structures aléatoire différentes.

La première équation est KPZ (Kardar-Parisi-Zhang). Elle est introduite en 1989 par trois physiciens (et permettra à Parisi de devenir lauréat du prix Nobel de physique en 2021), dans le but de décrire des évolutions d'interfaces rugueuses. Elle a ensuite été reprise dans de très nombreux domaines, en raison de son universalité. On l'écrit de la sorte :

$$\partial_t h(t, x) = \partial_{xx}^2 h(t, x) + (\partial_x h)^2(t, x) + \xi(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{T},$$

où le terme ξ est appelé bruit blanc en espace-temps et peut être vu comme la dérivée d'un mouvement Brownien. C'est la fonction aléatoire, elle est très irrégulière.

La seconde équation est NLS (Schrödinger non-linéaire) avec condition initiale aléatoire. On l'écrit

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)u(t, x) = W^p(u)(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{T}^d \\ u_0(x) = f(\omega) \end{cases},$$

f est une fonction aléatoire et W^p est une fonction appelée produit de Wick qui sert à supprimer certains termes pouvant poser problème. Cette équation est plus connue par les physiciens sous le nom d'équation de Gross-Pitaevskii et a été introduite par trois physiciens qui travaillaient sur l'optique, Chia, Garmire et Townes. Son application principale se trouve aujourd'hui en physique de la matière condensée. Ces deux équations, a priori très différentes dans leurs structures, s'avèrent avoir plus de points communs qu'à première vue. En effet, on trouve, parmi leurs similarités, les suivantes :

- Trouver une solution via Ansatz, mot allemand signifiant approche. Pour être plus clair, cela signifie supposer que la solution s'écrit sous une certaine décomposition puis vérifier que cela donne bien une solution que l'on peut construire.
- Un formalisme utilisant des arbres pour exprimer l'Ansatz.
- Un procédé de renormalisation.

La production d'une décomposition à partir d'arbres est une idée premièrement formulée par Butcher en 1963 dans [5], inspiré des travaux de Cayley de 1857 dans [6] et de ceux de Merson de 1957 [12]. Son objectif était de trouver un bon formalisme afin d'écrire un développement local d'une fonction solution d'une EDO (équation différentielle ordinaire) et pour cela il utilisa un formalisme d'arbres

qui encode mieux qu'un développement de Taylor la structure des opérations sous-jacentes. Ces travaux sont alors repris pour le cadre plus général des EDP par Gerhard et E. Hairer en 1974 [9]. En 2003, Brouder [2] reconnaît que l'ensemble des arbres et les opérations faites dessus par les précédents mathématiciens s'injectent dans une théorie algébrique riche : celle des algèbres de Hopf. Ainsi, une démarche plus systématique est permise. Par la suite, c'est Gubinelli en 2006 [8] qui comprend que ce que l'on appelle les chemins rugueux admet une formalisation en terme d'arbres très riche, qui sera par la suite utilisée par M. Hairer (médaillé Fields) dans son spectaculaire article sur les structures de régularité de 2014 [11]. Dans le papier de M. Hairer [11], il propose un formalisme, une technique et des théorèmes boîtes noires permettant la résolution de toute une classe d'EDPS dites paraboliques sous-critiques (KPZ, Φ_3^4 et d'autres) qui, jusque là, étaient hors d'atteinte. Un des procédés utilise ce que l'on appelle la renormalisation, qui est donnée de manière canonique en 2018 par Bruned, M. Hairer et Zambotti dans [3], ou ils utilisent pleinement la structure que forment les arbres. Le monde des EDPS dispersives ne dispose pas d'une théorie aussi puissante et générale que celle des structures de régularités. Pourtant de récents progrès témoignent de similarités, notamment sur les structures d'arbres présentes pour résoudre ces équations, et donc d'un espoir d'avoir une théorie plus générale et systématique. Dans ce sens on pourra citer par exemple [1], [7] ou encore [4].

On suivra le développement suivant.

On commence par proposer des définitions et des notations pour définir les arbres. On introduira ensuite l'exemple de Butcher et ses séries B, permettant de comprendre les développements indexés par des arbres. Ensuite, on motive l'utilisation d'une Ansatz avec la résolution de KPZ. Pour finir on tente de mettre en évidence et de faire sentir que des liens peuvent se faire entre le monde parabolique et le monde dispersif.

2 Notions préliminaires

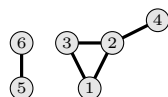
On introduit ici la construction des arbres. Ce geste, qui pourrait sembler une longueur, aura l'avantage d'expliquer la façon dont cette structure permet d'encoder beaucoup d'opérations.

Définition (Graphe) :

Un graphe $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles finis : V est l'ensemble des sommets du graphe et $E \subset \mathcal{P}_2(E)$ est l'ensemble des arêtes liant les sommets du graphe.

Exemple :

On représentera le graphe $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\})$ par



Remarques : Il est possible d'introduire des ensembles de sommets et d'arêtes infinis, cela mène à une définition d'arbre plus compliquée, mais qui n'est pas sans intérêt.

Aussi on omet les graphes qui ont des arêtes bouclant sur le même sommet.

Définition (Relation d'équivalence) :

Sur un graphe $G = (V, E)$ on définit une relation symétrique \sim sur E . Pour cela on parle de chaîne (injective) entre deux sommets v et \bar{v} et l'on note $v \sim \bar{v}$ si l'on dispose d'un nombre quelconque n d'arêtes distinctes $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}$ de E avec $x_0 = v$ et $x_n = \bar{v}$.

Grâce à cette définition on est capable d'introduire deux nouveaux concepts. Un graphe est dit acyclique s'il ne possède pas de sommet lié à lui-même par une chaîne. Il est dit connexe si pour toute paire de sommets il existe une chaîne les connectant. Cela va nous permettre de définir nos premiers arbres.

Définition (Arbre) :

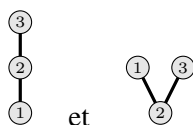
Un arbre est un graphe acyclique et connexe. On préfère la notation T pour un arbre plutôt que G .

Pour pouvoir encoder une suite d'opérations effectuées dans un certain ordre, il est intéressant de placer un ordre sur un arbre. Cet ordre permettra d'encoder à quel moment nous réalisons une opération. Pour pouvoir le construire il nous faut privilégier un nœud de l'arbre en tant que point de base pour notre ordre. On parlera alors de racine.

Définition (Ordre dans un arbre) :

On définit une relation d'ordre comme suit. On se fixe un nœud r de l'arbre que l'on appelle la racine. Comme un arbre est connexe on sait que tout nœud à l'exception de la racine est connecté à la racine. On dit alors qu'un nœud v est ancêtre d'un nœud \bar{v} dès lors que la chaîne liant r à v est contenue dans la chaîne associée à r et \bar{v} ou que $v = \bar{v}$. On note alors $v \preceq \bar{v}$. On peut aussi dire que \bar{v} est un descendant de v . On prendra comme convention que l'on peut aussi comparer la racine puisque l'on raisonne alors sur une chaîne vide.

Ainsi, il existe plusieurs manière d'ordonner un arbre. Il faudra par la suite faire la distinction. En effet, dès lors que les opérations encodées ne peuvent plus être interchangeables, on ne tombe plus sur les mêmes opérations. Par exemple, si l'on choisit pour racine le nœud le plus bas d'un arbre, on obtient les deux arbres suivants



qui sont problématiques du point de vue de la descendance du nœud 2. Dans le premier arbre, il y a un descendant : 3. Tandis que dans le second, on trouve deux descendants : 1 et 3. Pour palier ce problème, on rajoute la racine dans la définition des arbres.

Définition (Arbre enraciné) :

Un arbre enraciné est la donnée d'un arbre $T = (V, E)$ et d'une racine $r \in V$. On comprendra toujours le vocabulaire de la descendance selon la relation d'ordre obtenue via la racine. Sous cette définition, un arbre enraciné possède alors des feuilles. Ce sont les nœuds qui sont maximaux pour la relation \preceq . On notera souvent L cet ensemble et I son complémentaire. On notera cet ensemble d'arbres \mathcal{T} .

Afin de pouvoir encoder une suite d'opérations spécifiques, il est utile de décorer les arêtes et les nœuds des arbres enracinés.

Définition (Décoration) :

Pour un arbre enraciné $T = (V, E)$, on appelle décoration une fonction $D : X \rightarrow Y$ où Y est un ensemble dit de décorations et X est une partie de V ou E .

En pratique, il est commun de prendre un X qui est égal à V , L , I , $I - \{r\}$ ou bien E .

Une autre manière d'enrichir l'encodage d'opérations est de regarder le nombre d'enfants des nœuds des arbres enracinés.

Définition (Enfant) :

Pour un sommet v d'un arbre enraciné $G = (V, E)$ on définit l'ensemble de ses enfants $C(v)$ dont les éléments sont les nœuds descendants de v qui ont une chaîne

les liant à v de taille exactement 1.

Ainsi, suivant le nombre d'enfants que possède un nœud, on peut lui associer un certain type d'opération, par exemple une opération multilinéaire qui dépendrait du nombre d'entrées.

Enfin il peut être utile de regrouper des arbres selon leurs caractéristiques et ainsi obtenir des objets vérifiant des propriétés agréables dans le monde analytique. Ainsi des caractéristiques qui peuvent être utiles sont à définir, au cas par cas, selon la structure des problèmes analytiques étudiés. Pour donner un exemple, si l'on décore un arbre sur ses arêtes par deux couleurs, noir et blanc, il peut être intéressant de regarder les arbres "tout noir".

Un dernier point important est que la définition d'arbre est souple dans sa manière d'être obtenue. On peut notamment voir les arbres d'un point de vue récursif.

Définition (Arbre version récursive) :

Un arbre τ est

- soit un nœud que l'on note \bullet .
- soit un nœud v connecté à un nombre quelconque d'arbres τ_1, \dots, τ_q , opération que l'on note $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_q]$. Dans ce cas la racine est le nœud v .

Selon le contexte on préfère utiliser l'une ou l'autre définition. Par exemple, si l'arbre encode un problème qui est entièrement traduit par les feuilles, on préfère la première version donnée. La définition récursive présente un très grand intérêt dès lors qu'il s'agit de définir des fonctions sur les arbres.

3 Série de Butcher

Dans cette section on suit certaines idées de [5].

Pour une fonction lisse, les développements de Taylor permettent d'encoder très bien son comportement local. Mais lorsqu'il y a plus de structures, par exemple si la fonction est solution d'une EDO, il est normal de vouloir lui exprimer des développements plus adaptés que ceux de Taylor. En gardant en tête la solution d'une EDO, ses dérivées admettent une structure très mal encodée par les développements de Taylor. L'idée de Butcher est d'écrire cela via ce qui sera nommé plus tard en son honneur : les séries B.

Si l'on forme le développement de Taylor d'une fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ on rappelle que l'on obtient

$$x^i(h) = x^i(0) + \sum_{j=1}^d x_j^i(0)h^j \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^d x_{j_1 \dots j_n}^i h^{j_1} \dots h^{j_n} + o(h^n).$$

Où l'on note la dérivée n -ième de la fonction x via $x_{i_1 \dots i_n} = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} x$.

Si x est désormais solution de l'EDO suivante

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

Si l'on calcule les dérivées de x en 0, alors ces dernières s'obtiennent à partir de celle de f et l'on réalise assez rapidement que la formulation à la Taylor manque certains points importants.

A l'ordre 1, 2 et 3 :

$$\begin{aligned} x' &= f \circ x \\ x'' &= (f' \circ x)(f \circ x) \\ x''' &= (f'' \circ x)(f \circ x, f \circ x) + (f' \circ x)(f' \circ x)(f \circ x). \end{aligned}$$

Par soucis de simplicité on oublie l'évaluation en x afin de pouvoir calculer l'ordre 4 qui s'écrit

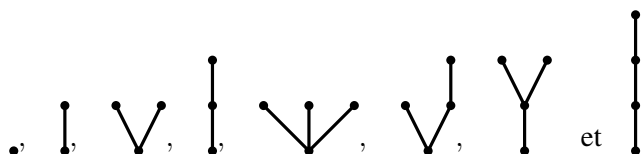
$$x^{(4)} = f''' f f f + 3f'' f f' f + f' f'' f f + f' f' f' f.$$

Ces expressions, rapportées au développement de Taylor, n'apparaissent pas directement. On pourrait toujours argumenter que l'on peut retrouver ces développements via la formule de Faà di Bruno, mais même dans ce cas il y a une structure d'arbres cachée qui permet de mieux se représenter ce qu'il se passe combinatoirement. Afin d'y voir plus clair et obtenir une façon de comprendre ce qu'il se passe, il est bien d'introduire la notation de Lukasiewicz et de projeter sur la coordonnée i . On obtient alors pour le terme d'ordre 4

$$f_{ijk}^i f^j f^k f^l + 3f_{jk}^i f^j f_l^k f^l + f_j^i f_{kl}^j f^k f^l + f_j^i f_k^j f_l^k f^l$$

que l'on peut dès lors interpréter en terme d'arbres.

La règle de construction informelle est la suivante : si on a un terme de la forme $f_{y_1 \dots y_r}^x$ on le lira "x admet pour enfants y_1, \dots, y_r ". On construit ainsi des arbres. En réécrivant des quantités, respectivement selon l'ordre d'apparition dans les calculs que l'on a effectués, on a leur traduction en terme d'arbres.



On définit donc l'ensemble des arbres \mathcal{T} comme dans la partie sur les notions préliminaires. On le gradue selon le nombre de nœuds : \mathcal{T}_n est l'ensemble des arbres obtenus avec moins de n nœuds.

Ainsi à l'aide d'un traducteur Π on est capable de passer du monde des arbres au monde analytique via la définition récursive suivante

$$\Pi(\bullet)x = f \circ x \quad \text{et} \quad \Pi([\tau_1 \dots \tau_q])x = (f^{(q)} \circ x)(\Pi(\tau_1)x, \dots, \Pi(\tau_q)x).$$

Puis on obtient la formule de développement en arbres, appelée la série B de x :

$$x(h) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} h^{|\tau|} \frac{a(\tau)}{\sigma(\tau)} \Pi(\tau)(x_0) + o(h^n).$$

Où $|\cdot|$ désigne le nombre de nœuds de τ , σ est une fonction qui dépend de la structure de l'arbre et possède une interprétation combinatoire. Enfin a est une fonction qui peut prendre des valeurs choisies selon l'usage. Par exemple, si l'on veut avoir une expression égale à la formule de Taylor, on doit choisir ce que l'on appelle la factorielle de l'arbre $a(\tau) = \tau!$. Mais il est possible de faire d'autres choix. Pour la méthode numérique de Runge-Kotta, a prend une forme plus complexe.

Ainsi une première manière de comprendre l'intérêt de traduire un problème analytique en terme d'arbres est que l'on peut former des développements d'une manière plus élégante et exploitable. Dans la partie qui suit, on va observer une utilisation bien plus poussée menant à des résultats profonds.

4 Structure de régularité

La théorie des structures de régularité est lourde, afin de pouvoir parler d'arbres, il est nécessaire de rester vague pour ne pas allonger ce texte. On suit néanmoins l'approche fournie par [11] mais historiquement KPZ à été résolue sans structure de régularité dans [10].

On commence en introduisant les ensembles de fonctions Hölderiennes : $u \in H^\alpha$ si elle vérifie localement $|u(y) - u(x)| \leq K|y - x|^\alpha$ où K est une constante et $\alpha > 0$. Il existe une manière de parler de distributions Hölderiennes, dans ce cas on appelle aussi cet ensemble H^α et l'on a dans ce cas $\alpha \leq 0$.

Une structure de régularité fournit un espace abstrait sur lequel on dispose de plusieurs points pratiques pour la résolution d'EDPS :

- c'est un espace de Fréchet et l'on dispose de notions de continuité.
- les éléments de cet espace encodent toutes sortes de développements locaux.
- on peut y construire des objets dont l'existence n'a rien d'évident.

Une difficulté est de trouver la bonne structure de régularité adaptée au type de problème étudié. Pour comprendre ce qu'il se passe, il faut imaginer que pour créer la structure de régularité, il faut trouver les bons comportements locaux. Pour des fonctions lisses les bons comportements locaux sont encodés par les développements de Taylor, qui sont en correspondance directe avec l'espace des polynômes qui nous fournit alors la structure de régularité.

On peut tenter alors de faire une heuristique pour comprendre les phénomènes locaux qui agiraient dans un cadre à la KPZ. Pour cela on se place sur les espaces d'Hölder généralisés, si un élément u est exactement H^α , il faudra s'imaginer que $u(z+h) - u(z)$ "varie comme" h^α . Nous noterons alors $r(u)$ ce que l'on appelle la régularité de u qui n'est rien d'autre que son module d'Hölderianité. On introduit de plus l'opérateur de la chaleur $\mathcal{L} = \partial_t - \partial_{xx}^2$. Quelques faits à savoir pour la suite sont les suivants

- ξ a une régularité $r(\xi) = -3/2^-$.
- on est capable de définir un produit d'éléments Hölderiens f et g quand on a $r(f) + r(g) > 0$.
- dériver diminue la régularité : $r(\partial f) = r(f) - 1$.
- si on dispose toujours de f et g Hölderiens, et vérifiant $\mathcal{L}f = g$ alors on a $r(f) = r(g) + 2$.

Ainsi, en réécrivant KPZ via $\mathcal{L}h = (\partial_x h)^2 + \xi$ on peut donc espérer au mieux $r(h) \leq r(\xi) + 2 = 1/2^-$. Puis quand on voudra former le produit $(\partial_x h)^2$ on est alors censé multiplier deux distributions vérifiant $2r(\partial_x h) = 0^-$ ce qui est un problème car on ne sait pas faire.

Il est donc important de renormaliser ne serait-ce que pour pouvoir donner un sens à KPZ. On note KPZ $_\epsilon$ l'équation où à la place du bruit ξ on a un régularisé ξ_ϵ et on notera sa solution h_ϵ . L'objectif serait d'avoir h_ϵ qui converge. Malheureusement

ce ne sera pas le cas et c'est pour cela que l'on considère plutôt l'équation

$$\text{KPZ}_\varepsilon : \quad \mathcal{L}h_\varepsilon = (\partial_x h_\varepsilon)^2 - C_\varepsilon + \xi_\varepsilon.$$

On introduit désormais les arbres afin de pouvoir comprendre les développements locaux, pour cela on reprend l'idée des itérations à la Picard : on construit de manière récursive les processus suivants

$$\mathcal{L}Y_\varepsilon^\bullet = \xi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}, \mathcal{L}Y_\varepsilon^{[\tau_1 \tau_2]} = \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_1} Y_\varepsilon^{\tau_2} - C_\varepsilon^{[\tau_1 \tau_2]},$$

où les constantes C^τ , $\tau \in \mathcal{T}$ sont à déterminer plus tard. L'ensemble des arbres générés sera noté \mathcal{T}_{KPZ} , c'est l'ensemble des arbres binaires stricts. On peut déjà observer que la structure d'un arbre τ permet de déterminer la régularité et les opérations réalisées pour obtenir Y_ε^τ .

Un calcul formel peut montrer que $Y_\varepsilon = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{\text{KPZ}}} Y_\varepsilon^\tau$ est solution de KPZ_ε avec $C_\varepsilon = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} C_\varepsilon^\tau$. Hélas, c'est inextricable pour montrer les résultats de convergence même avec les structures de régularité. C'est ici que vient l'Ansatz. M. Hairer propose de tronquer la somme sur un nombre fini d'arbres (15 dans [10]). Dans ce cas on peut contrôler d'une bonne manière les convergences. Cette réduction est motivée par des raisons de régularité, plus un arbre est gros plus la régularité de l'objet associé est grande et on peut alors s'abstenir de le considérer. Il pose donc

$$Y_\varepsilon = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{\text{tronqué}}} Y_\varepsilon^\tau + u_\varepsilon$$

et montre que u_ε est solution d'une équation qui permet de formuler un problème équivalent, à condition d'avoir la convergence des Y_ε^τ vers des Y^τ .

On explique comment construire de manière simplifiée (qui ne reflète donc pas toutes les difficultés, mais pour les arbres cela ne change rien) les procédés limites grâce aux arbres. On introduit la décomposition spatiale en Fourier dont on écrit le k -ème coefficient $Y_{\varepsilon,k}^\tau$ de Y_ε^τ et $\bar{Y}_{\varepsilon,k}^\tau$ celui $\partial_x Y_\varepsilon^\tau$.

Grâce à la forme de $Y_{\varepsilon,k}^\tau$ en tant que processus stochastique, on sait que pour le connaître suffisamment il suffit de calculer sa fonction de covariance qui elle-même se déduit de celle de $\bar{Y}_{\varepsilon,k}^\bullet$ et qui vaut

$$\mathbb{E} \left[\bar{Y}_{\varepsilon,k}^\bullet(s) \bar{Y}_{\varepsilon,l}^\bullet(t) \right] = \delta_{k,-l} e^{-k^2|t-s|}.$$

Tout cela est du au fait que les processus sont Gaussiens, et que l'on a la formule qui suit

$$Y_{\varepsilon,k}^{[\tau_1 \tau_2]}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^t e^{k^2(t-s)} \bar{Y}_{\varepsilon,l}^{\tau_1}(s) \bar{Y}_{\varepsilon,k-l}^{\tau_2}(s) ds.$$

En itérant la formule et en utilisant la structure récursive des arbres, puis en passant à l'espérance on se retrouve à estimer des objets de la forme

$$\mathbb{E} \left[\bar{Y}_{\varepsilon,k_1}^\bullet(t_1) \dots \bar{Y}_{\varepsilon,k_r}^\bullet(t_r) \right].$$

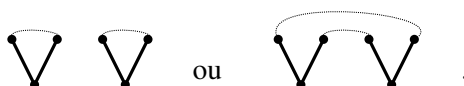
Grâce à ce que l'on appelle la formule de Wick, qui provoque des appariements au niveau des nœuds, on se ramène à un produit de fonctions de la forme

$$\mathbb{E} \left[\bar{Y}_{\varepsilon,k}^{\bullet}(s) \bar{Y}_{\varepsilon,l}^{\bullet}(t) \right].$$

Afin de pouvoir réaliser de bonnes estimations via la formule de Wick, on rajoute de la structure aux arbres précédemment construits en étiquetant les nœuds et en ajoutant la condition que si un nœud possède des enfants alors la somme des étiquettes des enfants est égale à celle du nœud. Par exemple on a l'arbre suivant :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} l \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ k \end{array} \\ k - l \end{array}.$$

Ensuite, la formule de Wick produit au niveau des arbres des appariements, à savoir on égalise la valeur de l'étiquette qui se trouve sur deux feuilles. Ainsi, si l'on réalise le produit associé aux arbres (on oublie les étiquettes) $\begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array}$ et $\begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array}$ on aura les deux types d'appariements qui suivent



Pour finir, Hairer injecte ces arbres appareillés dans une structure de diagramme pondéré et après quelques manipulations, il montre que si l'on réussit à bien pondérer ces diagrammes alors on sait montrer la convergence des différents objets obtenus.

5 Schrödinger non linéaire

De la même manière que pour la partie précédente, on ne présente que quelques aspects et l'on effectue des simplifications.

On se base sur l'article de [7].

On rappelle la forme de l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)u = W^p(u), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{T}^d \\ u(0, x) = f(\omega) \end{cases},$$

où l'on a $f(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{g_k(\omega)}{\langle k \rangle^\alpha} e^{ik \cdot x}$ avec g_k des variables aléatoires gaussiennes i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées) centrées réduites.

Les auteurs de l'article utilisent une structure nouvelle pour encoder les diverses opérations qu'ils effectuent dans leur résolution. Ils appellent leurs nouveaux objets tenseurs aléatoires et ces derniers sont formés à partir de ce qu'ils appellent une plante.

Il y a de nombreuses similarités avec les techniques du parabolique :

- Formulation d'une Ansatz donnant une décomposition de la solution jusqu'à un certain ordre.
- Structure encodant une suite d'opérations complexes.
- Devoir de gérer des appariements.

On ne donnera pas la réalisation de leur objet car ces derniers sont assez opaques, on va tenter plutôt d'éclairer un point de vue avec des arbres qui est en cours d'élaboration.

Afin de pouvoir se ramener à un bon cadre, les auteurs ramènent NLS à une formulation équivalente nécessitant l'introduction de quelques notations.

Pour une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ on note u_k son k -ième coefficient de Fourier spatial. Pour un dyadique $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, on dénote la troncation à la bande fréquentielle N par

$$u_N(t) = \sum_{N/2 < \langle k \rangle \leq N} u_k(t) e^{ik \cdot x}.$$

La notation majuscule : N, M, \dots est réservée aux entiers puissance de deux (dyadiques). Le problème équivalent est lourd en symboles et en opérations, on lui supposera donc la forme extrêmement simplifiée mais qui reste éclairante sur le genre de manipulations qui peut avoir lieu :

$$(y_M)_k = (f_M)_k + \sum_q \sum_{N_1, \dots, N_q} \sum_{k_1, \dots, k_q} \int (y_{N_1})_{k_1} \dots (y_{N_q})_{k_q}.$$

Les auteurs ont besoin de tuer les interactions haute-basse...-basse fréquences afin de pouvoir appliquer une inégalité de larges déviations. Pour cela ils définissent pour tout dyadique M un opérateur V^M qui s'en charge et leur problème devient

(avec de nouvelles simplifications)

$$(y_M)_k = (1 + V^M) \left((f_M)_k + \sum_q \sum_{N_1, \dots, N_q} \sum_{k_1, \dots, k_q} \int (y_{N_1})_{k_1} \dots (y_{N_q})_{k_q} \right).$$

Ensuite ils vont faire une Ansatz mélangée avec une récurrence qui va leur permettre d'écrire que pour M , on a

$$(y_M)_k = \sum_{\tau \in \mathcal{G}_{\text{dec}}^{N,D}} \Pi(\tau)_k + (z_M)_k.$$

Ils initialisent à $M = 1/2$ en posant $y_{1/2} = z_{1/2} = 0$. Ensuite, ils supposent construits à tout rang $N \leq M/2$ leur décomposition ainsi que les arbre, puis font l' Ansatz que cette décomposition à lieu au rang M . Avec cette approche, il ne reste plus qu'à identifier quels arbres sont à créer. Pour cela on injecte dans l'équation chaque décomposition, pour chaque $z_N, N < M/2$ (c'est important de noter que l'on ne considère pas $N = M$) on le décompose en la somme $l_N^M + h_N^M$ (cela permet de régler des problèmes de basses et hautes fréquences du côté temporel de Fourier cette fois-ci). Il ne reste plus qu'à observer qu'une fois tout développé à gauche dans l'équation, on obtient 4 types de termes que l'on considère pour former les arbres du développement de y_M (les autres servent à former le reste) :

- Les $(f_M)_k$ et l'on pose avec $\mathbf{k} = (k, M)$

$$\Pi(\downarrow^{\mathbf{k}}) = (f_M)_k.$$

- Les $V^M(f_M)_k$ et l'on pose

$$\Pi(\downarrow^M) = V^M(f_M)_k.$$

- Une intégrale produit de la forme $\int \Pi(T_1) \dots \Pi(T_r)(h_{N_1}^M)_{l_1}, \dots, (h_{N_s}^M)_{l_s}$ (le produit est commutatif on peut donc supposer cet ordre) que l'on écrit

$$\Pi([T_1, \dots, T_q, \downarrow^{\mathbf{k}}, \dots, \downarrow^{\mathbf{k}}]_{(k,M)}^1) = \int \Pi(T_1) \dots \Pi(T_r)(h_{N_1}^M)_{l_1}, \dots, (h_{N_s}^M)_{l_s}.$$

- Enfin un opérateur et une intégrale produit : $V^M \int \Pi(T_1) \dots \Pi(T_r)(h_{N_1}^M)_{l_1}, \dots, (h_{N_s}^M)_{l_s}$ et l'on a

$$\Pi([T_1, \dots, T_q, \downarrow^{\mathbf{k}}, \dots, \downarrow^{\mathbf{k}}]_{(k,M)}^2) = V^M \int \Pi(T_1) \dots \Pi(T_r)(h_{N_1}^M)_{l_1}, \dots, (h_{N_s}^M)_{l_s}.$$

On construit alors par induction les arbres jusqu'à ne plus pouvoir en former de taille plus petite que D .

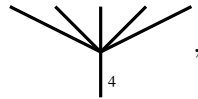
Ensuite, pour construire le reste il faut réinjecter les développements des y_N dans l'équation puis simplifier les termes qui s'annulent, on obtient alors une équation en z_M que l'on peut résoudre.

Maintenant afin de faire comprendre comment on construit les arbres on donne un exemple illustratif plutôt que d'introduire tout le formalisme.

On veut tenter de construire l'arbre associé à la suite d'itération

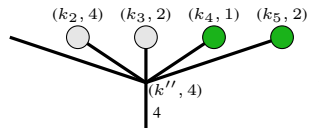
$$V^4 \int \left(\left[\int V^2 (f_2)_{k_{11}} (f_2)_{k_{12}} (f_1)_{k_{13}} \right] (f_4)_{k_2} (f_2)_{k_3} (h_1^4)_{k_4} (h_2^4)_{k_5} \right).$$

Pour cela, observons d'abord que l'on a un terme $V^4 \int (\cdot)_1 (\cdot)_2 (\cdot)_3 (\cdot)_4 (\cdot)_5$, ainsi on voudra d'abord former la base suivante



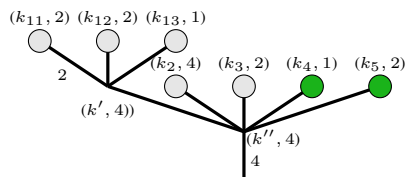
où l'on a mis un 4 pour encoder l'opération V^4 et un 5-enracinement pour dire que l'on réalise un 5-produit dans l'intégrale.

Ensuite, il y a des feuilles faciles à repérer : ce sont les $(f_{N_i})_{k_i}$ et les $(h_{N_i}^4)_{k_i}$ qui forment deux types de feuilles, blanches pour les premières, vertes pour les secondes. On les ajoute donc à l'arbre en prenant soin de les décorer de leurs fréquence et bande fréquentielle :



avec $k'' = k_2 + k_3 + k_4 + k_5$. On pourra remarquer que la bande fréquentielle du nœud détermine la bande fréquentielle des racines vertes.

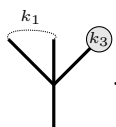
Il ne reste plus qu'à former la dernière opération entre crochets. On obtient alors l'arbre final qui suit



où l'on a posé $k' = k_{11} + k_{12} + k_{13}$. Quelques spécificités de ces arbres est, tout d'abord, que l'on ne peut pas avoir deux fois de suite un branchement simple i.e. il n'y a que la racine qui peut avoir un seul enfant. D'autre part, c'est le nombre d'enfant d'un nœud qui détermine combien d'entrées le produit va prendre. Si on préfère positionner sur un q -enracinement une bande fréquentielle permettant d'encoder la troncature en basses fréquences temporelles des restes h_N^M plutôt que de le faire sur les feuilles, c'est pour rendre les feuilles moins inhomogènes qu'elle ne le sont déjà. De même, les nœuds intérieurs ne nécessitent pas la décoration

fréquence (comme k' et k'' par exemple) car celle-ci se retrouve en lisant les feuilles.

Afin de pouvoir retrouver les objets de l'article, il s'ensuit des points techniques. Les arbres vont avoir vocation à être sommés et pour des raisons analytiques, on souhaite que chacune des fréquences apparaissant dans l'arbre que l'on somme n'apparaisse qu'une fois. Bien sur ce n'est pas possible seulement comme cela. On veut alors apparier les branches des arbres via un lien sur les feuilles signifiant que l'on considère leur fréquence égale. La représentation graphique (sans aucune décoration autre que les fréquences des feuilles) est la suivante :



Ce dernier point pourrait être mis en lien avec les appariements effectués pour les structures de régularité.

References

- [1] Bjoern Bringmann, Yu Deng, Andrea R Nahmod, and Haitian Yue. Invariant gibbs measures for the three dimensional cubic nonlinear wave equation. *Inventiones mathematicae*, 236(3):1133–1411, 2024.
- [2] Ch Brouder. Trees, renormalization and differential equations. *BIT Numerical Mathematics*, 44(3):425–438, 2004.
- [3] Yvain Bruned, Martin Hairer, and Lorenzo Zambotti. Algebraic renormalisation of regularity structures. *Inventiones mathematicae*, 215:1039–1156, 2019.
- [4] Yvain Bruned and Katharina Schratz. Resonance-based schemes for dispersive equations via decorated trees. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 10, page e2. Cambridge University Press, 2022.
- [5] John C Butcher. Coefficients for the study of runge-kutta integration processes. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 3(2):185–201, 1963.
- [6] Arthur Cayley. Xxviii. on the theory of the analytical forms called trees. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 13(85):172–176, 1857.
- [7] Yu Deng, Andrea R Nahmod, and Haitian Yue. Random tensors, propagation of randomness, and nonlinear dispersive equations. *Inventiones mathematicae*, 228(2):539–686, 2022.
- [8] Massimiliano Gubinelli. Ramification of rough paths. *Journal of Differential Equations*, 248(4):693–721, 2010.
- [9] Ernst Hairer and Gerhard Wanner. On the butcher group and general multi-value methods. 1974.
- [10] Martin Hairer. Solving the kpz equation. *Annals of mathematics*, pages 559–664, 2013.
- [11] Martin Hairer. A theory of regularity structures. *Inventiones mathematicae*, 198(2):269–504, 2014.
- [12] RH Merson. An operational method for the study of integration processes. (*No Title*), 1957.