Algèbres de von Neumann, correction d'erreur quantique et gravitation

Elliott Gesteau

sous la direction de Matilde Marcolli

1 Introduction

Les algèbres de von Neumann fournissent un cadre mathématique idéal pour étudier la mécanique quantique des systèmes ayant un nombre infini de degrés de liberté. En particulier, elles sont des outils puissants pour axiomatiser la théorie quantique des champs en espace-temps plat ou courbe [1], ainsi que pour étudier des quantités entropiques en information quantique [2].

La recherche d'une théorie quantique incorporant la force de gravité de manière cohérente est depuis maintenant près d'un siècle un des plus grands objectifs de la physique théorique. Aujourd'hui, la meilleure candidate pour une telle description est sans doute la théorie des cordes [3], dont la formulation mathématique est encore très mal comprise. Ces cinq dernières années, les tous derniers développements dans ce domaine ont fait surgir des notions venant de domaines physiques et mathématiques jusqu'ici assez déconnectés des théories de gravitation. En particulier, il s'avère de plus en plus clair que des quantités entropiques issues de l'information quantique [4], ainsi que des résultats relatifs aux codes correcteurs d'erreurs quantiques [5], jouent un rôle très important dans l'émergence de l'espace-temps.

Comme il existe un nombre infini de degrés de liberté dans la plupart des théories de gravité quantique, l'étude de ces nouveaux liens nécessite le recours à l'analyse fonctionnelle, et en particulier, aux algèbres d'opérateurs. L'enjeu principal de ce texte est donc de fournir une brève introduction aux éléments de théorie des algèbres de von Neumann nécessaires à la description de l'émergence de l'espace-temps en gravité quantique. La priorité sera donnée aux notions étroitement liées de flot modulaire et d'espérance conditionnelle, qui jouent toutes deux un rôle clé. Une fois ces notions introduites, on les reliera aux développements récents en gravité quantique, plus précisément dans le cadre de la correspondance AdS/CFT [6], et présentera quelques pistes de recherche dans ce nouveau domaine à l'interface entre les algèbres d'opérateurs, la physique des hautes énergies, et l'information quantique.

2 Algèbres de von Neumann

2.1 Topologies sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

La plupart des objets qui apparaîtront dans ce texte seront des opérateurs bornés sur des espaces de Hilbert. Par conséquent, si l'on souhaite faire de l'analyse avec ces opérateurs, il est important de commencer par fournir quelques notions à propos des différentes topologies sur l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. En plus de la topologie engendrée par la norme, deux autres topologies seront utiles dans la suite de ce texte.

Définition 2.1. La topologie faible des opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est engendrée par la base d'ouverts de la forme

$$\mathcal{N}(O, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \varepsilon) = \{P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \forall i, j \quad |\langle \eta_j, (P - O)\xi_i \rangle| < \epsilon\}.$$

Définition 2.2. La topologie forte des opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est engendrée par la base d'ouverts de la forme

$$\mathcal{N}(O, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \varepsilon) := \{P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \|(P - O)\xi_i\| < \varepsilon\}.$$

On note enfin que la topologie de la norme est plus fine que la topologie forte des opérateurs, qui est elle-même plus fine que la topologie faible des opérateurs.

2.2 Définition et premières propriétés des algèbres de von Neumann

On commence par donner la définition d'une algèbre de von Neumann.

Définition 2.3. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Une algèbre de von Neumann $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une algèbre d'opérateurs bornés qui contient l'identité, est stable par conjugaison Hermitienne, et est fermée pour la topologie faible des opérateurs.

Une notion primordiale dans la théorie des algèbres de von Neumann est la notion de commutant :

Définition 2.4. Soit M une algèbre de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le commutant de M est défini par

$$M' := \{O' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \forall O \in M, \quad O'O = OO'\}.$$

La définition précédente d'une algèbre de von Neumann a en fait d'autres équivalents, qui sont parfois extrêmement utiles. En particulier, on a le théorème suivant : [1]

Théorème 2.5. *[7] Soit M une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, stable par conjugaison Hermitienne et contenant l'identité. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
(i) M est fermée pour la topologie forte des opérateurs.
(ii) $M = M''$.
(iii) M est une algèbre de von Neumann.

En particulier, l'affirmation (ii) signifie que M est son propre *bicommutant* : c'est le théorème du bicommutant de von Neumann.

1. Il est important de mentionner qu'il existe une autre définition d'une algèbre de von Neumann qui n'implique pas d'espace de Hilbert, grâce à la notion de prédual. Néanmoins, on se restreindra dans ce texte à cette définition concrète avec un espace de Hilbert, parce qu'elle est sans doute plus intuitive pour une première introduction.

2.3 Deux cas particuliers

Pour aiguiser son intuition sur les algèbres de von Neumann, il est souvent utile de se référer à deux cas particuliers : le cas d'un espace de Hilbert de dimension finie et le cas commutatif.

Dans le cas de la dimension finie, les algèbres de von Neumann peuvent être classifiées très simplement. On a le résultat suivant, qui montre que les algèbres de von Neumann de dimension finie sont des sommes directes d'algèbres de matrices :

Théorème 2.6. *[7] Soit M une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert de dimension finie. Alors, M est isomorphe à une algèbre de la forme*

$$\bigoplus_{i=1}^{k} M_i(\mathbb{C}).$$

Toutes les algèbres de cette forme sont des algèbres de von Neumann.

Pour décrire les algèbres de von Neumann commutatives, on a aussi un théorème de structure, déjà plus subtil :

Théorème 2.7. *[7] Soit M une algèbre de von Neumann commutative sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Alors, il existe un espace topologique séparé Ω à base dénombrable d'ouverts, et une mesure positive borélienne finie et régulière μ tels que M est isomorphe à $L^\infty(\Omega, \mu)$. Toutes les algèbres de cette forme sont des algèbres de von Neumann.*

Ainsi, une algèbre de von Neumann commutative est une algèbre de fonctions sur un espace mesuré. Ce parallèle entre les algèbres de von Neumann et la théorie de la mesure est fondamental, et on verra au cours de ce texte qu'il est possible de construire une théorie de l'intégration non commutative grâce aux algèbres de von Neumann.

3 Théorie modulaire de Tomita–Takesaki

Cette section se spécialise maintenant sur un thème plus précis, qui est la théorie modulaire de Tomita-Takesaki. Cette théorie, apparue dans les années 1960, a révolutionné notre compréhension des algèbres de von Neumann, et a notamment permis à Alain Connes de classifier les algèbres de von Neumann hyperfinies dans sa thèse de doctorat. Elle a également de nombreuses applications en théorie quantique des champs algébrique et en information quantique, dont certaines apparaîtront dans la suite de ce texte.

3.1 Etats sur les algèbres de von Neumann

Nous venons de voir que les algèbres de von Neumann commutatives sont des algèbres de fonctions sur des espaces mesurés. Il est donc tentant, par analogie, de tenter de construire une théorie de la mesure non commutative sur les algèbres de von Neumann. Les objets les plus importants de cette théorie sont les états, qui sont les analogues des mesures de probabilité.

Définition 3.1. Soit M une algèbre de von Neumann. Un état ω sur M est une forme linéaire continue sur M qui vérifie :
(i) $\|\omega\| = 1$.

(ii)$\forall A \in M, \quad \omega(A^*A) \geq 0$.
On dit qu'un état ω est fidèle si pour $A \in M$,

$$\omega(A^*A) = 0 => A = 0,$$

et que ω est normal s'il est continu pour la topologie faible-*.

En particulier, on note qu'en dimension finie, tout état est normal puisque la topologie de la norme coïncide avec la topologie faible-*. De plus, un raisonnement élémentaire d'algèbre linéaire montre que tout état est alors de la forme $\mathrm{Tr}(\rho\cdot)$, où ρ est une matrice hermitienne positive de trace 1, souvent appelée matrice densité. Dans le cas commutatif, si une mesure de probabilité ν est absolument continue par rapport à la mesure μ, alors sous les hypothèses du théorème de classification des algèbres de von Neumann commutatives, $\int d\nu$ définit un état normal sur l'algèbre $L^\infty(\Omega, \mu)$.

En mécanique quantique, l'interprétation d'un état ω sur une algèbre d'observables M est qu'il donne la valeur moyenne d'une observable $O \in M$.

Il est également important de remarquer que si M agit sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tout vecteur $x \in \mathcal{H}$ définit un état normal sur M, par la formule

$$\omega(A) = \langle x, Ax \rangle .$$

Ainsi, il est usuel d'identifier les vecteurs de $\mathcal{H}$ à des états sur M.

Deux propriétés de vecteurs sont utiles dans le cas de la théorie de Tomita-Takesaki :

Définition 3.2. Soit M une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $x \in \mathcal{H}$. On dit que x est cyclique pour M si

$$\{Ax, A \in M\}$$

est dense dans $\mathcal{H}$. On dit que x est séparant pour M si pour $A \in M$:

$$Ax = 0 => A = 0.$$

Notons enfin qu'un vecteur séparant induit un état fidèle sur M.

3.2 Le théorème de Tomita–Takesaki

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour comprendre le théorème de Tomita-Takesaki. Soit M une algèbre de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et supposons de plus qu'il existe un vecteur $\Omega \in \mathcal{H}$ qui soit cyclique et séparant pour M. On définit l'opérateur anti-linéaire non-borné S_0 sur le sous-espace dense (comme Ω est cyclique)

$$\{A\Omega, A \in M\},$$

par

$$S_0 A\Omega := A^*\Omega.$$

On peut alors montrer que S_0 se prolonge en un opérateur anti-linéaire fermé S sur tout $\mathcal{H}$. Il suit que S admet une décomposition polaire de la forme

$$S = J\Delta^{\frac{1}{2}},$$

où J est une isométrie anti-linéaire, et Δ est un opérateur auto-adjoint (non nécessairement borné !) Δ est appelé opérateur modulaire de Ω, et J conjugaison modulaire relative à Ω.

Le théorème de Tomita–Takesaki est alors le suivant : [2]

Théorème 3.3. *[8] Soit M une algèbre de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ contenant un vecteur Ω cyclique et séparant pour M. Alors, $J\Omega = \Delta\Omega = \Omega$, et*

$$JMJ = M',$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Delta^{it} M \Delta^{-it} = M.$$

Ce théorème est le résultat central de ce texte, et a mené à des résultats extrêmement puissants comme la classification des algèbres de von Neumann hyperfinies par Alain Connes et Uffe Haagerup. Il est convient donc de formuler plusieurs remarques importantes.

D'abord, le théorème de Tomita–Takesaki donne des informations très importantes sur les algèbres de von Neumann : en particulier, sous les hypothèses du théorème, elles sont isomorphes à leur commutant. Ensuite, il nous fournit un groupe à un paramètre canonique d'automorphismes de l'algèbre de von Neumann, appelé flot modulaire. Notons que si Δ et les opérateurs de M commutaient, ce groupe serait trivial, donc l'existence de ce groupe à un paramètre est un effet purement quantique.

Une subtilité retient néanmoins l'attention : l'opérateur Δ est défini d'une manière qui dépend du vecteur Ω. Cependant, Connes a formulé un résultat remarquable [9] : si Δ et Δ' sont deux opérateurs modulaires associés à deux vecteurs cycliques et séparants Ω et Ω', alors il existe une famille d'opérateurs unitaires $[D\Omega' : D\Omega]_t$ *appartenant à* M tel que pour $A \in M$:

$$[D\Omega' : D\Omega]_t \Delta^{it} A \Delta^{-it} [D\Omega' : D\Omega]_t^{-1} = \Delta'^{it} A \Delta'^{-it}.$$

Ce résultat est très puissant, et montre que les flots modulaires de deux vecteurs cycliques et séparants ne diffèrent que par un automorphisme *intérieur* de l'algèbre. L'opérateur $[D\Omega' : D\Omega]_t$ est appelé cocycle de Connes, et peut être interprété comme une dérivée de Radon-Nikodym non-commutative entre deux états.

Un dernier point important est que l'interprétation physique du flot modulaire est très naturelle : en effet, on peut montrer que le flot modulaire d'un état Ω vérifie la condition KMS à température $\frac{1}{2\pi}$: pour $A, B \in M$, il existe une fonction F_{AB} continue et bornée sur la bande fermée $\{0 \leq \mathrm{Im}z \leq 2\pi\}$ et holomorphe sur la bande ouverte $\{0 < \mathrm{Im}z < 2\pi\}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{AB}(t) = \langle \Omega, A\Delta^{it} B \Delta^{-it} \Omega \rangle,$$

et

$$F_{AB}(t + i2\pi) = \langle \Omega, \Delta^{it} B \Delta^{-it} A\Omega \rangle.$$

En physique, cette condition un peu obscure signifie que Ω est à l'équilibre thermique par rapport à son flot modulaire. Le théorème de Tomita–Takesaki fournit donc une manière systématique de construire un "flot temporel" pour lequel un état donné (représenté par un vecteur cyclique séparant) est à l'équilibre thermique ! C'est la principale idée de l'hypothèse du temps thermique [10] de Connes et Rovelli, dans la lignée de laquelle l'approche à la gravité quantique étudiée dans ce texte s'inscrit.

2. Pour définir une puissance imaginaire de Δ, il est nécessaire d'utiliser le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints non bornés.

3.3 Espérances conditionnelles et inclusions suffisantes

Parfois, il est intéressant de projeter une algèbre de von Neumann sur une sous-algèbre. En probabilités classiques, ce rôle est joué par les espérances conditionnelles, qui projettent des variables aléatoires sur des variables aléatoires mesurables pour des sous-tribus. Il s'avère qu'une notion analogue d'espérance conditionnelle existe sur les algèbres de von Neumann, et est axiomatisée de la manière suivante :

Définition 3.4. Soient $N \subset M$ deux algèbres de von Neumann. Une espérance conditionnelle de M vers N est une application linéaire positive $E : M \longrightarrow N$ qui vérifie les axiomes suivants :
(i)$E(Id) = Id$,
(ii)Pour $A, B \in N$ et $C \in M$, $E(ACB) = AE(C)B$.
Si pour toute forme linéaire l sur M continue pour la topologie faible-*, $l \circ E$ est continue pour la topologie faible-*, on dit que E est normale. Si pour $A \in M$,

$$E(A^*A) = 0 => A = 0,$$

on dit que E est fidèle.

Les espérances conditionnelles sont fondamentales dans la théorie des algèbres de von Neumann, et sont à la source de nombreux résultats importants. L'un des aspects les plus frappants des espérances conditionnelles est qu'elles sont étroitement liées au flot modulaire par le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de Takesaki :

Théorème 3.5. *[2] Soit M une algèbre de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, N une sous-algèbre de von Neumann de M, et $\varphi \in \mathcal{H}$ un vecteur cyclique et séparant pour M. On identifie φ à l'état normal et fidèle qu'il induit sur M. Soit Δ l'opérateur modulaire de φ par rapport à M. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) Il existe une espérance conditionnelle normale fidèle $E : M \longrightarrow N$, telle que $\varphi \circ E = \varphi$.
(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta^{it} N \Delta^{-it} = N$. Dans le cas où ces deux conditions sont réalisées, on dit que l'inclusion $N \subset M$ est suffisante pour l'état φ.

L'interprétation de ce résultat est intéressante : on peut caractériser les états normaux fidèles préservés par une espérance conditionnelle $M \longrightarrow N$ normale fidèle par le fait que leur flot modulaire laisse N invariante. En termes physiques, on interprète l'existence d'une telle espérance conditionnelle comme une condition de correction d'erreur quantique. En effet, cette espérance conditionnelle nous apprend que la projection d'un opérateur de M sur N n'altère absolument pas l'évaluation par φ : l'erreur liée à la projection est corrigée. Dans la fin de ce texte, le lien entre le théorème de Takesaki et la correction d'erreur quantique apparaîtra de manière encore plus explicite dans le modèle de gravité quantique que nous étudierons.

4 Un modèle pour la gravité quantique

Dans le reste de ce texte, on illustre la pertinence des notions d'espérance conditionnelle et de flot modulaire pour étudier la limite semi-classique de théories de gravité quantique. Pour cela, après avoir introduit quelques idées qualitatives venues de la physique, on présente un modèle mathématique qui décrit certains aspects de l'émergence de l'espace-temps dans la correspondance AdS/CFT. On montrera ensuite les limites de ce modèle, et formulera quelques questions ouvertes qui constituent la continuation naturelle de ce travail.

4.1 Quelques idées issues de la physique

On commence par présenter quelques idées de la théorie quantique des champs, de la théorie des cordes, et de la correspondance AdS/CFT pour introduire notre modèle. La théorie quantique des champs est une théorie qui parvient à modéliser l'interaction électromagnétique et les interactions nucléaires forte et faible (mais pas la gravité) avec une précision impressionnante. Il existe plusieurs systèmes axiomatiques pour la théorie quantique des champs, on se focalisera ici sur les axiomes de Haag–Kastler [1], qui fondent la théorie quantique des champs algébrique et peuvent être exprimés grâce aux algèbres de von Neumann.

On n'énonce pas les axiomes de Haag–Kastler dans leur totalité par souci de concision, et on se restreint uniquement à ceux qui seront utiles dans la suite de ce texte. Tout d'abord, une théorie quantique des champs est définie par l'*axiome de localité*, comme un filet $\{M_i\}$ d'algèbres de von Neumann associées à une famille de sous-ensembles [3] $\{O_i\}$ d'une variété Lorentzienne, en imposant

$$O_i \subset O_j => M_i \subset M_j.$$

Autrement dit, une théorie quantique des champs est définie sur un espace-temps fixé, sur lequel il est possible de parler d'événements localisés avec une précision arbitraire dans l'espace et dans le temps. Les algèbres de von Neumann associées aux sous-ensembles définissent les observables locales de la théorie.

Un autre axiome important est l'*axiome de causalité*. Si la séparation entre A et B est de genre espace, on impose que les algèbres M_A et M_B commutent, puisqu'elles ne peuvent pas s'influencer. Une version plus forte de l'axiome de causalité est la *dualité de Haag* : le si $\bar{A}$ est le complément causal d'un sous-ensemble causalement complet [4], alors $M_{\bar{A}} = M'_A$. La dualité de Haag est souvent vérifiée, et nous supposerons sa validité dans la suite de ce texte.

C'est la notion de localité, et d'espace-temps fixe, qui disparaît en gravité quantique, et notamment en théorie des cordes, où les objets fondamentaux sont étendus, et ne sont donc pas localisables comme les particules ponctuelles de la théorie des champs. Si l'espace-temps devient lui-même quantique, il n'est plus défini comme une structure différentielle pré-existante, mais est également soumis à ses propres fluctuations. Ainsi, en gravité quantique, il n'est plus possible de parler de "la position x à l'instant t", et la théorie est par essence non-locale. Néanmoins, il est souhaitable de retrouver la notion d'espace-temps dans une certaine limite semi-classique de la théorie, puisque la théorie quantique des champs en espace-temps courbe décrit parfaitement les observations à des échelles où les fluctuations quantiques de la gravité peuvent être négligées. Un problème important est donc de décrire comment une théorie quantique des champs effective sur un espace-temps fixe peut émerger comme une limite semi-classique d'une théorie complète de gravité quantique.

En théorie des cordes, décrire l'émergence d'un espace-temps sur lequel est définie une théorie quantique des champs est un problème très difficile, et peu de progrès ont pu être réalisés avant la découverte de la correspondance AdS/CFT [6] en 1997 par Juan Maldacena. Comme nous l'avons vu, la théorie des cordes est une théorie très difficile à formuler rigoureusement mathématiquement. La conjecture de Maldacena, si elle n'est pas encore prouvée en toute rigueur, a été corroborée par un nombre impressionnants de calculs, et stipule que dans le cas

3. La définition de ces sous-ensembles peut varier selon les situations. Dans l'espace-temps Minkowski, on choisit souvent les ouverts.

4. Le complément causal d'un ensemble est l'ensemble des points qui ont une séparation de genre espace avec tous les points de l'ensemble. Un espace est dit causalement complet s'il est le complément causal de son complément causal.

d'une théorie des cordes définie à l'intérieur d'un espace-temps asymptotiquement anti-deSitter (AdS), il existe une formulation équivalente de la théorie comme une théorie conforme des champs (qui est un cas particulier de théorie quantique des champs) sur le bord à l'infini de l'espace-temps. Ce résultat est très surprenant, car il révèle qu'au moins dans certains cas, la structure apparemment inextricablement compliquée de la théorie des cordes peut être comprise au moyen d'une théorie bien plus simple et bien mieux comprise, qui peut en particulier être décrite grâce aux axiomes de Haag–Kastler.

La correspondance AdS/CFT s'est révélée être un outil extrêmement fructueux, en particulier pour mieux comprendre l'émergence de l'espace-temps en théorie des cordes. On ne présentera qu'un des nombreux résultats de ce domaine dans ce texte : la *reconstruction des coins d'intrication* [5]. En termes physiques, la reconstruction des coins d'intrication stipule que si la théorie des cordes est dans un état où l'espace-temps a émergé, c'est-à-dire où la théorie conforme des champs sur le bord encode un état d'une théorie quantique des champs effective sur un espace-temps fixe à l'intérieur, alors chaque région du bord d'une hypersurface de genre espace de cet espace-temps est duale à une région de l'intérieur, appelée son *coin d'intrication*[5], dans le sens où tous les opérateurs locaux dans le coin d'intrication peuvent être reconstruits sur cette région. Le coin d'intrication vérifie notamment la propriété de complémentarité : le coin d'intrication du complémentaire d'une région du bord correspond au complémentaire du coin d'intrication de cette région.

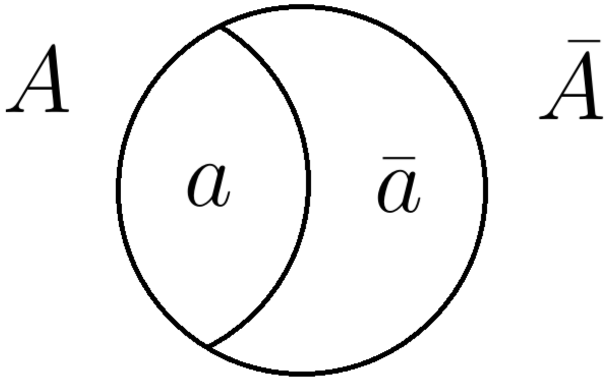
4.2 Un modèle pour la reconstruction des coins d'intrication

Nous avons maintenant le contexte physique pour présenter un modèle mathématique décrivant la reconstruction des coins d'intrication dans la correspondance AdS/CFT. La théorie conforme des champs sur le bord (qui, selon la correspondance AdS/CFT, est une description équivalente de la théorie des cordes à l'intérieur) est une théorie quantique des champs ordinaire, donc peut être décrite par un filet d'algèbres de von Neumann sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{phys}$. La plupart des vecteurs de $\mathcal{H}_{phys}$ représentent des états qui ne sont pas duaux à un état d'une théorie quantique des champs en espace-temps courbe à l'intérieur, mais au contraire à un état compliqué de la théorie des cordes où l'espace-temps n'est pas bien défini. Néanmoins, pour certains états très particuliers, ceux de la limite semi-classique, la physique de l'intérieur est décrite par une théorie quantique des champs sur un espace-temps émergent fixe. On modélise l'espace de ces états par un espace de Hilbert que l'on notera $\mathcal{H}_{code}$, et qui s'injecte dans $\mathcal{H}_{phys}$ par une isométrie $u : \mathcal{H}_{code} \longrightarrow \mathcal{H}_{phys}$. Considérons maintenant une hypersurface de genre espace de l'espace-temps émergent en question, représentée sur la figure 1. On peut en diviser le bord en deux parties, A et $\bar{A}$. On associe à A une algèbre de von Neumann M_A agissant sur $\mathcal{H}_{phys}$, et par dualité de Haag, l'algèbre de von Neumann associée à $\bar{A}$ est M_A'.[6] Dans l'espace-temps émergent, on note alors a le coin d'intrication de A, et $\bar{a}$ son complémentaire, qui est le coin d'intrication de $\bar{A}$ par complémentarité. On associe à ces coins d'intrication les algèbres M_a et M_a' agissant sur $\mathcal{H}_{code}$, toujours par dualité de Haag. La propriété de reconstruction des coins d'intrication prend alors la forme rigoureuse suivante :

5. Le coin d'intrication est défini grâce à une prescription géométrique que l'on ne détaillera pas ici.

6. On pourra s'inquiéter du fait qu'un ouvert d'une hypersurface de genre espace n'est pas un ouvert de toute la variété Lorentzienne. Néanmoins il est possible d'associer des algèbres de von Neumann à ces régions à partir de celles définies par les axiomes de Haag-Kastler. Cette construction étant néanmoins un peu technique, le plus simple ici est sans doute de directement considérer les définitions de ce paragraphe comme des axiomes de Haag–Kastler pour les hypersurfaces.

FIGURE 1 – Un schéma du modèle. Le disque représente une hypersurface de genre espace de l'espace-temps asymptotiquement AdS émergent. On divise la frontière en deux régions A et $\bar{A}$, auxquelles on associe les algèbres de von Neumann M_A et M'_A. Les coins d'intrication de A et $\bar{A}$ sont nommés a et $\bar{a}$, et on leur associe les algèbres de von Neumann M_a et M'_a.



Propriété 4.1. *On dit que la propriété de reconstruction des coins d'intrication est vérifiée si*

$$\forall O \in M_a, \forall O' \in M'_a, \exists \tilde{O} \in M_A, \exists \tilde{O}' \in M'_A, uO = \tilde{O}u, uO' = \tilde{O}'u, uO^* = \tilde{O}^*u, uO'^* = \tilde{O}'^*u,$$

et $O \mapsto \tilde{O}$ est un morphisme d'algèbres injectif, qui envoie l'identité sur l'identité.

Notons que cette propriété peut être comprise comme une propriété de *correction d'erreur quantique* : tout opérateur local O agissant sur le coin d'intrication a de la région A peut être reconstruit par un opérateur local agissant uniquement sur A. En particulier, si l'information sur $\bar{A}$ est effacée ou altérée, ce qui correspond à une erreur, il est toujours possible de reconstruire l'opérateur agissant sur le coin d'intrication de a. La reconstruction des coins d'intrication nous apprend donc que l'espace-temps agit comme un code correcteur d'erreur quantique !

4.3 Lien avec la théorie modulaire

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que le flot modulaire et les espérances conditionnelles se cachent derrière la propriété de reconstruction des coins d'intrication. En effet, si l'on reprend les notations précédentes, montrons le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Si $O \in M_A$, alors $u^*Ou \in M_a$.*

Démonstration. Soit $O' \in M'_a$. Pour $x, y \in \mathcal{H}_a$, on a

$$\langle x, u^*OuO'y \rangle = \langle x, u^*\tilde{O}'Ouy \rangle = \langle \tilde{O}'^*ux, Ouy \rangle = \langle uO'^*x, Ouy \rangle = \langle x, O'u^*Ouy \rangle .$$

Donc $u^*Ou \in M''_a = M_a$ comme M_a est une algèbre de von Neumann. □

On en déduit que l'application

$$\Phi \colon \begin{array}{l} M_A \to \widetilde{M_a} \\ O \mapsto \widetilde{u^*Ou} \end{array}$$

est bien définie, et il n'est pas difficile de vérifier qu'elle est positive et vérifie
(i)$\Phi(Id) = Id$, et

(ii)Pour $A, B \in \widetilde{M_a}$ et $C \in M_A$, $\Phi(ACB) = A\Phi(C)B$.

On peut donc conclure que Φ est une espérance conditionnelle ! De plus si Φ est normale et fidèle et l'image de $\mathcal{H}_{code}$ par u contient un vecteur séparant pour M_A [7], nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de Takesaki, et de conclure que $\widetilde{M_a}$ est stable sous l'action du flot modulaire de tout vecteur cyclique séparant de la forme ux, où $x \in \mathcal{H}_{code}$.

Il est amusant de remarquer que ce résultat a été dérivé de manière indépendante en physique théorique, et est connu sous le nom de *théorème JLMS* [11]. La leçon à tirer est que dans la limite semi-classique de la correspondance AdS/CFT, le flot modulaire préserve les théories effectives des champs sur des espaces-temps émergents.

Dès lors, il est intéressant de proposer un premier formalisme pour décrire les espaces-temps (ou au-moins les hypersurfaces de genre espace) émergents dans la correspondance AdS/CFT : pour chaque ouvert U_i d'une hypersurface de genre espace du bord sur lequel la théorie conforme des champs est définie, on définit un triplet $\{M_i, N_i, E_i\}$ d'algèbres de von Neumann $N_i \subset M_i$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{phys}$ et d'espérances conditionnelles normales fidèles $E_i : M_i \to N_i$. On interprète les M_i comme les algèbres d'observables locales de la théorie conforme des champs, les N_i comme les algèbres d'observables locales dans les coins d'intrications de l'espace-temps émergent, et les E_i comme l'application Φ définie précédemment. On suppose de plus que si $M_1 \subset M_2$, alors la restriction de E_2 à M_1 est E_1. L'espace des états correspondant à une théorie quantique des champs fixée sur un espace-temps émergent dans la théorie des cordes duale correspond alors à un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}_{phys}$, dont les éléments induisent des états sur les M_i invariants sous l'actions des espérances conditionnelles E_i. De manière assez surprenante, cette structure a été introduite en théorie quantique des champs algébrique dans un contexte différent, et est connue sous le nom de *filet de Longo-Rehren*. Nous verrons plus loin que le filet de Longo-Rehren ne peut pas exactement décrire la correspondance AdS/CFT. Néanmoins, il en capture des aspects essentiels.

4.4 Flot modulaire et géométrie

Nous avons montré que dans la correspondance AdS/CFT, le flot modulaire des états semi-classiques de la théorie conforme des champs laisse stables les algèbres d'observables correspondant à des champs quantiques sur un espace-temps émergent dans la théorie des cordes duale. Nous allons maintenant voir que le flot modulaire a une signification géométrique bien précise en théorie quantique des champs. En effet, dans une théorie quantique des champs, le flot modulaire implémente l'action d'une symétrie de Lorentz.

Plus précisément, soit Mink $= \mathbb{R}^{3,1}$ l'espace-temps de Minkowski, de métrique $diag(-1, 1, 1, 1)$, et un filet $\{M_i\}$ d'algèbres de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, définissant une théorie quantique des champs sur Mink. On définit l'espace de Rindler

$$W := \{(t, x, y, z) \in \text{Mink}, \quad x > |t|.\}$$

Cet espace correspond à la portion de l'espace de Minkowski accessible aux observateurs uni-

7. Des arguments de théorie des champs peuvent montrer que c'est en effet le cas en utilisant un résultat connu sous le nom de théorème de Reeh-Schlieder, et la théorie des représentations standard des algèbres de von Neumann.

formément accélérés. On définit aussi la transformation de Lorentz

$$\Lambda(s) := \begin{bmatrix} \mathrm{ch}s & \mathrm{sh}s & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}s & \mathrm{ch}s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les axiomes de la théorie quantique des champs en espace-temps plat nous apprennent qu'il existe un groupe à un paramètre $U(s) := e^{iKs}$, où K est un opérateur auto-adjoint non borné, d'opérateurs unitaires tels que si $M(R)$ est une algèbre de von Neumann d'observables locales associées à une région R, alors

$$U(s)^* M(R) U(s) = M(\Lambda(s)R),$$

et qu'il existe un vecteur "de vide" Ω qui est cyclique séparant pour l'algèbre $M(W)$. On a alors le théorème de Bisognano–Wichmann [1] : [8]

Théorème 4.3. $\Delta(W) = e^{-2\pi K}$*, où* $\Delta(W)$ *est l'opérateur modulaire associé au vecteur* Ω *pour l'algèbre de von Neumann* $M(W)$*.*

Ce théorème est remarquable : il montre que pour certaines régions de l'espace-temps de Minkowski (les espaces de Rindler), le flot modulaire contient des informations purement géométriques, puisqu'il implémente l'action d'une transformation de Lorentz ! Dans le contexte de la correspondance AdS/CFT, le flot modulaire stabilise l'algèbres observables de la théorie quantique des champs sur l'espace-temps émergent, on peut espérer que le flot modulaire de la théorie conforme des champs de la frontière nous donnera aussi des informations rigoureuses sur la géométrie émergente de l'espace-temps asymptotiquement AdS dual. En particulier, la précédente propriété de reconstruction des coins d'intrication ne fait référence qu'à des hypersurfaces de genre espace, mais le flot modulaire de Bisognano–Wichmann encodant un boost de Lorentz, on peut imaginer qu'il est le bon objet à considérer pour construire des variétés Lorentziennes à partir de ces hypersurfaces.

5 Perspectives

Dans ce texte, nous avons vu que la théorie des algèbres de von Neumann, et plus particulièrement la théorie modulaire de Tomita–Takesaki, est un outil puissant pour décrire l'émergence de l'espace-temps dans les modèles de gravité quantique, et en particulier dans le cadre de la correspondance AdS/CFT.

La meilleure description mathématique actuelle de la structure d'un espace-temps émergent dans la correspondance AdS/CFT s'appuie sur la notion de filet de Longo-Rehren : un filet de triplets de la forme $\{M_i, N_i, E_i\}$, associés à des sous-ensembles de la théorie conforme des champs, tels que $N_i \subset M_i$ soit une inclusion d'algèbres de von Neumann, et les E_i soient des espérances conditionnelles normales fidèles de restrictions convenables. Les M_i correspondent aux algèbres locales d'observables de la théorie conforme des champs sur le bord de l'espace-temps émergent, et les N_i correspondent aux observables d'une théorie quantique des champs effective sur un espace-temps émergent. Les états correspondant à cette théorie émergente sont

8. Ce théorème encode le phénomène physique connu sous le nom d'effet Unruh.

laissés invariants par les espérances conditionnelles E_i, et par le théorème de Takesaki, leurs flots modulaires stabilisent les algèbres N_i.

Ce modèle du filet de Longo–Rehren est très intéressant, mais ne répond pas à toutes les questions. En particulier, on aimerait comprendre non seulement la structure des algèbres d'observables d'une théorie quantique des champs sur un espace-temps émergent, mais aussi la structure géométrique intrinsèque de cet espace-temps. Pour cela, plusieurs directions semblent prometteuses. Premièrement, l'origine historique de la notion de reconstruction des coins d'intrication provient d'une formule prouvée au niveau de rigueur de la physique théorique : la formule de Ryu–Takayanagi. Cette formule stipule que l'aire de la surface qui délimite un coin d'intrication pour une région peut être calculée à partir d'une entropie régulée associée à l'état correspondant dans la théorie conforme des champs. L'obtention d'une telle entropie régulée dans notre contexte pourrait permettre de définir un opérateur d'aire dans l'algèbre de von Neumann correspondante, et donc de nous donner des informations sur la géométrie émergente. De premières idées à ce sujet ont été très récemment formulées par Faulkner dans [15]. Une autre piste prometteuse qui a été mentionnée à la fin de la section précédente consiste à exploiter la stabilité des algèbres N_i sous l'action des flots modulaires pour obtenir des informations sur la dynamique de l'espace-temps émergent. Certains progrès dans cette direction ont été très récemment réalisés [14]. Le but ultime serait de parvenir à montrer que la géométrie de tout espace-temps émergent vérifie l'équation d'Einstein, uniquement par des arguments d'algèbres d'opérateurs.

Un autre problème important est que la reconstruction des coins d'intrication n'est en réalité qu'approximative, et qu'on ne peut pas supposer qu'elle est réalisée de manière exacte sans tomber dans des contradictions physiques comme mathématiques [16]. Il est donc crucial de formuler une version "à ε près" des résultats présentés ici, ce qui s'avère être étonnamment subtil, notamment parce que les espérances conditionnelles réagissent assez mal avec l'approximation. En particulier, formuler une version approximative du théorème de Takesaki est un problème important, pour lequel quelques éléments de réponse peuvent être trouvés dans [17].

Enfin, on souhaiterait utiliser cette théorie pour décrire des situations concrètes, et physiquement de plus en plus réalistes. Il est donc également important d'appliquer les résultats précédents à des systèmes particuliers qui capturent des aspects de la correspondance AdS/CFT et de la gravité quantique. Un exemple est celui des réseaux de tenseurs, sur lequel j'ai travaillé cette année [18], [19]. Par la suite, appliquer ce formalisme à des modèles plus compliqués de théorie des cordes, notamment de matrices aléatoires comme dans [20] et [21] est un défi important, qui pourrait paver la voie vers un modèle de gravité quantique capable de décrire notre cosmologie.

J'espère poursuivre toutes ces directions de recherche dans ma thèse !

Références

[1] Haag, Rudolf. *Local Quantum Physics*, Springer Berlin, 1996.

[2] Ohya, Manasori et Petz, Dénes. *Quantum entropy and its use*, Springer Berlin, 2004.

[3] Polchinski, Joseph. *String theory*, Cambridge University Press, 2007.

[4] Ryu, Shinsei et Takayanagi, Tadashi. *Holographic Derivation of Entanglement Entropy from the anti de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence*, Physical Review Letters **96**, American Physical Society, 2006.

[5] Harlow, Daniel. *The Ryu–Takayanagi Formula from Quantum Error Correction*, Communications in Mathematical Physics **354**, Springer Science and Business Media LLC, 2006.

[6] Maldacena, Juan. *The large N limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, International Journal of Theoretical Physics **4**, Springer Science and Business Media LLC, 1999.

[7] Takesaki, Masamichi. *Theory of Operator Algebras I*, Springer Berlin, 2002.

[8] Takesaki, Masamichi. *Theory of Operator Algebras II*, Springer Berlin, 2003.

[9] Connes, Alain. *Une classification des facteurs de type III*, Annales Scientifiques de l'ENS, tome 6. 1973.

[10] Connes, Alain et Rovelli, Carlo. *Von Neumann Algebra Automorphisms and Time-Thermodynamics Relation in General Covariant Quantum Theories*, Classical and Quantum Gravity **11**, IOP Publishing, 1994.

[11] Jafferis, Daniel ; Lewkowycz, Aitor ; Maldacena, Juan ; Suh, Josephine. *Relative entropy equals bulk relative entropy*, Journal of High Energy Physics, World Scientific Pub Co Pte Lt, 1995.

[12] Longo, Roberto et Rehren, Karl-Henning. *Nets of Subfactors*, Reviews in Mathematical Physics **7**, IOP Publishing, 1994.

[13] Faulkner, Thomas. *The holographic map as a conditional expectation*, arxiv :2008.04810, 2020.

[14] Bousso, Raphael ; Chandrasekaran, Venkatesa ; Rath, Pratik ; Shahbazi-Moghaddam, Arvin. *Gravity dual of Connes cocycle flow*, arxiv :2007.00230, 2020.

[15] Faulkner, Thomas. *The holographic map as a conditional expectation*, arxiv :2008.04810, 2020.

[16] Penington, Geoffrey. *Entanglement Wedge Reconstruction and the Information Paradox*, arxiv :1905.08255, 2019.

[17] Faulkner, Thomas ; Hollands, Stefan ; Swingle, Brian ; Wang, Yixu. *Approximate recovery and relative entropy I. general von Neumann subalgebras*, arxiv :2006.08002, 2020.

[18] Gesteau, Elliott et Kang, Monica Jinwoo. *The infinite dimensional HaPPY code : entanglement wedge reconstruction and dynamics*, arxiv :2005.05971, 2020.

[19] Gesteau, Elliott et Kang, Monica Jinwoo. *Thermal states are vital : Entanglement Wedge Reconstruction from Operator-Pushing*, arxiv :2005.07189, 2020.

[20] Saad, Phil ; Shenker, Stephen ; Stanford, Douglas. *JT gravity as a matrix integral*, arxiv :1905.08255, 2020.

[21] Banks, Thomas ; Shenker, Stephen ; Fischler, Willy ; Susskind, Leonard. *M Theory As A Matrix Model : A Conjecture*, Physical Reviews D **55**, American Physical Society, 1997.