

INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE : EQUATIONS D'EULER INCOMPRESSIBLE ET DÉPLACEMENT DES OBJETS IMMERGÉS

FLORENT NOISETTE

CONTENTS

1. Euler 2D	2
1.1. Définitions	2
1.2. Cas imperméable	3
1.3. Cas perméable	3
2. Objet immergé	4
2.1. Définitions	4
2.2. Contrôle de l'objet par le flot	4
3. Euler frontière libre : the water waves problem	7
3.1. Définitions et caractère bien posé	7
3.2. Généralisations : des objets immergés dans les vagues.	8
References	10

ABSTRACT. Je vais parler ici d'objets immergés dans un fluide idéal incompressible, de leur modélisation, et surtout de l'étude des équations associées en mathématique. C'est un sujet qui est à la fois intéressant d'un point de vue théorique, et d'un point de vue pratique, puisqu'on peut le lier par exemple à l'accumulation des sédiments, aux centrales d'électricité marine, ou encore aux déplacements de molécules dans le sang.

1. EULER 2D

1.1. **Définitions.** On se place dans un domaine Ω régulier et borné de \mathbb{R}^2 . On note Γ sa frontière.

La majorité de ce qui suit s'appuie sur le modèle d'Euler pour les fluides incompressibles. Ces fluides, supposés sans frottements, sont décrits par leur *vélocité*, notée u , ainsi que leur *pression*, que l'on note p . On peut montrer que les fonctions u et p vérifient les équations suivantes (voir par exemple : [2]) :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \\ (2) \quad & \operatorname{div} u = 0, \\ (3) \quad & u|_{t=0} = u_0 \end{aligned}$$

que l'on appelle les équations d'Euler incompressibles. La fonction f est appelée *terme source* de l'équation et la fonction u_0 est appelée la *donnée initiale*.

Comme tout problème lié à la physique, il y a trois questions fondamentales qui se pose pour les équations d'Euler :

- l'*existence* d'une solution et la régularité de cette dernière
- l'*unicité* des solutions avec une régularité donnée
- le caractère *bien-posé* du problème : continuité des solutions en fonctions de la donnée initiale, du terme source et potentiellement des données à la frontière

Il est assez clair que le caractère bien posé d'une équation nécessite existence et unicité des solutions, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Il est intéressant de remarquer que l'on connaît le Laplacien de la pression à un temps donné en fonction de la vélocité à ce temps. En particulier, si on impose des conditions aux bord du domaine adéquates, on est capable de retrouver la pression comme solution d'un problème de Poisson. L'idée derrière est de voir la pression comme le multiplicateur de lagrange associé à u qui vérifie l'équation (1) sous la contrainte (2).

On note ω le *tourbillon* (ou *vorticité*) de u . En prenant le tourbillon de l'équation d'Euler (1), on obtient :

$$(4) \quad \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \operatorname{curl} f.$$

Or on peut retrouver u à partir de ω à t fixé : c'est le problème de Biot-Savard. Remarquons aussi qu'en dimension 3, il y a aussi un terme dit de *stretching* dans l'équation vérifiée par le tourbillon. Ce terme complique énormément les calculs et rend l'équation en question bien plus difficile à étudier (voir par exemple : [2, 15]).

Remarque. La plupart du temps, les fonctions que l'on regarde n'ont pas la régularité nécessaire pour définir les différents termes des équations que l'on traite ici. On travaille dans ce cas avec une version faible des équations. Il faut donc en particulier faire attention au fait que certaines conditions sont imposées au sens fort et d'autres au sens faible.

1.2. Cas imperméable. Comme mentionné précédemment, pour pouvoir résoudre le problème de Cauchy (1)-(3), il faut imposer des conditions au bord à la vitesse. La condition la plus simple qu'on puisse prendre est :

$$(5) \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Cette condition, dite d'*imperméabilité*, correspond à la contrainte physique que le fluide ne rentre pas ou ne sort pas du domaine Ω .

On intègre l'équation (1) contre u sur Ω et puis on effectue des intégrations par partie. Avec la condition d'imperméabilité, les termes de bords disparaissent, et on se retrouve avec l'égalité d'énergie suivante :

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |u|^2 \right) = 0$$

Comme l'équation n'est pas linéaire, cela n'assure pas immédiatement l'unicité et le caractère bien posé, mais avec des manipulations similaires, on peut trouver une inégalité de type Gronwall sur la norme L^2 d'une différence de solution et conclure (voir [18]).

1.3. Cas perméable. Si maintenant on prescrit que $u \cdot n = \gamma$ sur Γ où γ est une fonction qui est négative sur une partie Γ_{in} , nulle sur Γ_0 et positive sur Γ_{out} . On dit alors que le fluide *entre dans le domaine* en Γ_{in} et *sort du domaine* en Γ_{out} . L'équation

$$(7) \quad \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \text{curl} f.$$

est une équation de transport. La vorticité est transportée par le flux du fluide. Or il y a du fluide qui rentre dans le domaine. On doit donc prescrire la vorticité de ce dernier sur Γ_{in} pour esp er avoir un problème bien-posé (voir [3]). Sous ces hypothèses, Yudovich a montré en 1964 dans [20] que le problème de Cauchy associé aux équations d'Euler a une unique solution quand la donnée initiale a une vorticité Hölder et que la fonction γ est $C^{1,\alpha}$. Sa preuve s'appuie sur des estimées elliptiques, que l'on trouve par exemple dans [17], [19].

L'existence d'une solution a été généralisée à d'autres classes de solutions, y compris celle des solutions à vorticité bornée (voir [1, 4, 5, 16]).

Papin et Weigant ont montré en 2014 dans [13] que dans le cadre d'un domaine carré, il y a unic it  des solutions à vorticité bornée. Pour mon mémoire de M2, j'ai généralisé leur article   n'importe quelle géométrie de domaine (article en cours de rédaction). Dans les deux preuves, l'idée est de trouver des fonctions test intelligentes contre lesquels on peut multiplier l'équation (4) de manière à compenser les termes qui sortent des intégrations par partie.

2. OBJET IMMERGÉ

2.1. Définitions. Le problème de l'objet immergé consiste à étudier l'influence du flot d'un fluide sur un objet S qui se déplace dans le fluide. On fait l'hypothèse dans ce qui suit que l'objet dont on parle est indéformable, de *masse* m et de *moment* J . L'étude du mouvement de cet objet passe par l'étude des équations d'Euler dans un domaine dont une partie du bord est mobile et se déplace en respectant les forces de pression du fluide.

Comme notre solide est indéformable, sa position ne dépend que de deux paramètres : la position h de son *centre de gravité* et l'angle θ par rapport à la *position de référence*. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, on obtient les équations que vérifient les quantités h et θ :

$$(8) \quad m \frac{d^2 h}{dt^2} = \int_{\partial S} p n,$$

$$(9) \quad J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \int_{\partial S} p (h(t) - x)^\perp \cdot n.$$

Le fluide vérifie les équations d'Euler :

$$(10) \quad \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f,$$

$$(11) \quad \operatorname{div} u = 0,$$

$$(12) \quad u|_{t=0} = u_0,$$

ainsi que les conditions aux frontières suivantes :

$$(13) \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$(14) \quad u \cdot n = u_S \cdot n \text{ sur } \partial S.$$

Ici $u_S(t, x)$ représente la vitesse à l'instant t du point du solide qui se trouve en x à l'instant t .

On peut suivre la preuve de Yudovich pour prouver l'existence de solution faible de ce problème à partir du moment où l'on suppose $\omega_0 \in L^\infty$ (voir annexe [8]). De plus, si le temps d'existence T d'une solution ainsi créée est fini, alors l'objet touche le bord du domaine au temps T :

$$d(S, \partial\Omega) \xrightarrow[t \rightarrow T^-]{} 0.$$

Il a été prouvé dans [8] que l'on a unicité de du problème de Cauchy associé. Les théorèmes d'existence et d'unicité ont aussi été prouvé dans [9] dans le cas où l'on regarde non plus un domaine borné, mais $\Omega = \mathbb{R}^2$. La preuve de l'unicité est en fait assez similaire à celle d'Euler imperméable : on établit une équation de conservation de l'énergie d'une solution, puis on montre que l'on a une inégalité similaire quand on a deux solutions. Ensuite on peut conclure par un argument à la Gronwall.

2.2. Contrôle de l'objet par le flot. Pour le problème de l'objet immergé, on peut aussi étudier le cas où l'on autorise le fluide à traverser la frontière extérieure. Dans ce cas, certains problèmes physiquement intéressants peuvent être étudiés. Par exemple peut-on se demander à quel point on peut contrôler la trajectoire en jouant sur le flux de fluide entrant et sortant. La réponse est que l'on peut parfaitement contrôler la trajectoire d'un ou de plusieurs objets en influant les flux entrant et sortants du domaine.

Fixons une partie connexe de mesure de surface non-nulle Γ_c de $\Gamma = \partial\Omega$. On sépare Γ_c en deux parties : celle où l'on peut faire entrer le flot $\Gamma_{C,in}$ et celle d'où l'on peut le faire sortir $\Gamma_{C,out}$. On note \mathbf{C} l'ensemble des fonctions de contrôle :

$$\mathbf{C} = \{g \in C_0^\infty(\Gamma_c, \mathbb{R}); \int_{\Gamma_c} g = 0, g|_{\Gamma_{C,in}} \leq 0, g|_{\Gamma_{C,out}} \geq 0\}.$$

Notons qu'ajouter la condition d'intégrale nulle à nos fonctions de contrôle est nécessaire car les fluides considérés sont incompressibles.

On note $q(t) = (h(t), \theta(t)) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur de position de l'objet. Pour $\delta > 0$ fixé, on note \mathcal{Q}_δ l'ensemble des positions de l'objet tel que l'objet est à distance au moins δ du bord du domaine :

$$(15) \quad \mathcal{Q}_\delta = \{q \in \mathbb{R}^3; d(S(q), \partial\Omega) \geq \delta\}.$$

On note γ la *circulation du fluide* autour de l'objet :

$$(16) \quad \gamma = \int_{\partial S(t)} u \cdot \tau.$$

On peut remarquer que γ est constant en temps (car aucun flux ne traverse l'objet).

Comme le domaine change avec le temps, on a besoin d'une dernière notation pour exprimer les résultats sur ce problème. On note $\mathcal{B}(q, r)$ l'ensemble des fonctions L^∞ du domaine associé à l'objet en position q dont la norme est plus petite que r .

Le théorème suivant a été montré dans [7] :

Theorem 2.1. *Soit $\delta > 0$ fixé.*

On peut trouver un sous espace vectoriel \mathbb{E} de dimension finie de \mathbf{C} , tel que pour tout $T > 0$, $r_\omega > 0$ et K sous ensemble compact de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, il existe une fonction de contrôle \mathcal{C} qui vérifie

$$(17) \quad \mathcal{C} \in \text{Lip} \left(\bigcup_{q \in \mathcal{Q}_\delta} (\{q\} \times K \times \mathcal{B}(q, r_\omega)); \mathbb{E} \right),$$

et telle que pour toute trajectoire $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Q}_\delta)$ et toute valeur de γ qui vérifient que le triplet (q', q'', γ) reste dans K , alors les deux résultats suivants sont vérifiés :

- *Pour toute vorticité initiale $\omega_0 \in \mathcal{B}(q_0, r_\omega)$, il existe une fonction $u \in LTT(T) \cap \bigcap_{p>1} C^0([0, T], W^{1,p})$ avec $\text{curl} u_0 = \omega_0$ et telle que le couple (q, u) vérifie : les équations d'Euler incompressible (1)-(2) ainsi que les équations associées au principe fondamental de la dynamique (8)-(9), a pour circulation γ autour de S et les conditions aux frontières suivantes :*

$$(18) \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_c,$$

$$(19) \quad u \cdot n = g := \mathcal{C}(q, q', q'', \gamma, \omega) \text{ sur } \Gamma_c,$$

$$(20) \quad u \cdot n = u_S \text{ sur } \partial S.$$

- *A condition initiale et fonction de contrôle \mathcal{C} fixées, la trajectoire q est unique.*

On peut donc contrôler le flux du fluide pour influencer sur la trajectoire (ainsi que la vitesse) d'un ou de plusieurs objets. Un tel contrôle pourrait s'avérer utile dans la pratique. Imaginons que l'on veuille répartir de nombreux objets dans une cavité, par exemple des médicaments que l'on veut voir agir sur toute la surface de la cavité en question.

Imaginons encore que l'on veuille réunir tous les objets dans le but de les expulser du domaine. En théorie, d'après le Théorème 2.1, il est possible de contrôler les trajectoires d'un groupe d'objet pour obtenir un tel résultat. Ceci dit la construction de \mathcal{C} mise en place dans [7] n'est pas utilisable en pratique car elle demande une mesure globale de ω .

Un problème ouvert : Un problème qui reste ouvert dans ce cadre, c'est l'unicité de la fonction u pour une condition initiale fixée et une trajectoire de l'objet fixé. En effet, on avait mentionnée l'unicité en question dans le cadre d'une frontière extérieure imperméable, mais tout comme dans le cas d'Euler 2D, de nouvelles difficultés apparaissent dans le cadre perméable. Ceci dit, on pourrait espérer qu'en combinant les techniques utilisées pour prouver l'unicité de l'objet immergé dans le cadre imperméable et celles utilisées pour prouver l'unicité pour Euler perméable, on obtienne l'unicité dans le cas général de l'objet immergé.

3. EULER FRONTIÈRE LIBRE : THE WATER WAVES PROBLEM

Dans cette section, à moins de mention contraire, on se place en dimension 3.

3.1. Définitions et caractère bien posé. Si on se place dans le modèle physique de l'océanographie, l'équation d'Euler a un défaut majeur : elle est trop volumineuse à rentrer dans un ordinateur. Le fait que l'on est en $3D$ ainsi que la précision de maille nécessaire pour faire tourner un programme d'élément fini empêche sa réalisation. Par exemple si l'on cherche à étudier la vague d'un tsunami, on a des ondes qui font de l'ordre de 20 km à 150 km de long. Mais on ne peut pas prendre un maillage de l'ordre du km , car la vague d'un tsunami fait entre 10 cm et 1 m de haut. Il vient donc la nécessité d'obtenir de nouveaux modèles, qui, tout en respectant la physique du modèle, sont d'une complexité algorithmique moindre. Un certain nombre de ces modèles (Boussinesq, KdV, Green-Naghdi) s'obtiennent en considérant les comportements asymptotiques de l'équation des vagues.

Cette équation s'obtient en ajoutant la contrainte que le flux du fluide est irrotationnel :

$$(21) \quad \text{curl } u = 0,$$

ainsi que des conditions aux limites appropriées. On se place dans le cas où le terme source correspond à la gravité : $f = -ge_z$.

Comme on étudie les vagues, et non plus les mouvements d'un liquide dans un domaine donné, le domaine évolue maintenant avec le temps en fonction des mouvements du fluide. On note $\Omega(t)$ le domaine au temps t . On suppose qu'il existe deux fonctions $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\zeta : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que la frontière de Ω se compose des deux parties suivantes :

$$\Gamma_{surf} := \{(X, \zeta(t, X)); X \in \mathbb{R}^2\} \text{ et } \Gamma_b := \{(X, b(X)); X \in \mathbb{R}^2\}$$

On appelle Γ_{surf} la *surface libre* et Γ_b le *fond* de l'océan. L'hypothèse que le fond de l'océan est imperméable se réécrit :

$$(22) \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_b.$$

L'hypothèse que les vagues évoluent avec le mouvement du fluide se réécrit :

$$(23) \quad \partial_t \zeta - \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} (u \cdot n) = 0 \text{ sur } \Gamma_{surf}.$$

Maintenant, en utilisant le fait que u est irrotationnel, on peut l'écrire comme le gradient d'une fonction harmonique Φ :

$$(24) \quad u = \nabla \Phi \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(25) \quad \Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Les conditions aux limites se réécrivent alors :

$$(26) \quad \partial_n \Phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b,$$

$$(27) \quad \partial_t \zeta - \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \partial_n \Phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{surf}.$$

On peut trouver l'équation vérifiée par Φ en intégrant en espace celle vérifiée par u :

$$(28) \quad \partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + (P - P_{atm}) = -gz.$$

Ce qui va rendre cette formulation intéressante c'est que l'on peut retrouver Φ à partir de ses valeurs au bord, car elle est harmonique. De fait, si on note $\psi(X) := \Phi(X, \zeta(t, X))$, la fonction Φ sera l'unique solution du problème mixte suivant :

$$(29) \quad \Delta\Phi = 0 \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(30) \quad \partial_{\mathbf{n}}\Phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b,$$

$$(31) \quad \Phi = \psi \quad \text{sur } \Gamma_{surf}.$$

On note $G[\zeta, b]$ l'opérateur *Dirichlet vers Neumann* associé à ce problème :

$$(32) \quad G[\zeta, b] : \psi \mapsto \sqrt{1 + |\nabla\zeta|^2} \partial_{\mathbf{n}}\Phi.$$

On voit alors que ζ peut se calculer en fonction de ψ via :

$$(33) \quad \partial_t\zeta - G[\zeta, b]\psi = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Il reste à montrer que l'on peut calculer ψ en fonction de ζ pour obtenir un système couplé. Via la règle de la chaîne on obtient les équations suivantes.

$$\begin{aligned} (\partial_t\Phi)|_{z=\zeta} &= \partial_t\psi - (\partial_z\Phi)|_{z=\zeta} \partial_t\zeta, \\ (\nabla_X\Phi)|_{z=\zeta} &= \nabla\psi - (\partial_z\Phi)|_{z=\zeta} \nabla\zeta. \end{aligned}$$

Ensuite, grâce à la définition de $\partial_n\Phi$ et de $G[\zeta, b]$, on obtient :

$$(\partial_z\Phi)|_{z=\zeta} = \frac{G[\zeta, b]\psi + \nabla\zeta \cdot \nabla\psi}{1 + |\nabla\zeta|^2}.$$

En combinant ces trois égalités avec l'équation 28, on obtient l'équation d'évolution suivante pour le potentiel ψ :

$$(34) \quad \partial_t\psi + g\zeta + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{(G[\zeta, b]\psi + \nabla\zeta \cdot \nabla\psi)^2}{2(1 + |\nabla\zeta|^2)} = 0$$

Il a été montré dans [12] que le water waves problem est bien posé pour des temps courts. On trouvera aussi dans ce livre des modèles asymptotiques que l'on peut dériver à partir de ce problème.

3.2. Généralisations : des objets immergés dans les vagues. Dans ce paragraphe, on mentionne 3 problèmes ouverts liés à ce qui précède.

3.2.1. Objet fixe : caractère bien posé. Un premier problème que l'on peut se poser, c'est de changer la géométrie du domaine. Au lieu de travailler avec un domaine simplement connexe, on peut imposer qu'il y a un objet immobile dans le fluide. Montrer que les équations des vagues restent bien posée dans ce cadre est toujours un problème ouvert.

Il est aussi possible de se demander si l'on retrouve les équations des vagues sans objets quand la taille des objets fixes tend vers 0. Ce problème présenterait la difficulté supplémentaire que la vitesse normale est nulle dans les équations d'Euler au voisinage d'un objet fixe. Cette dernière ne se simplifie pas quand la taille de l'objet tend vers 0. Par conséquent il faudra probablement délimiter une couche limite (autour de l'objet) en dehors de laquelle l'approximation marche bien.

3.2.2. *Objet mouvant : caractère bien posé et étude du mouvement de l'objet.* Un second problème ouvert consiste en l'étude d'un objet mobile immergé et son influence sur l'équation des vagues. En particulier, on peut se demander si sa trajectoire s'apparente quand l'objet est petit à celle d'un traceur passif, c'est à dire d'une particule qui se déplace en suivant le flux du fluide mais sans l'influencer.

3.2.3. *Sédiments: influence de petit objets.* Un troisième et dernier problème est le *drift des sédiments*. Il a été montré dans [11] que expérimentalement, un petit objet va subir une dérive quand il est sous l'influence de vagues périodiques. Il pourrait être intéressant de regarder une multitude de petits objets dont la taille (ainsi que la masse) tend vers 0 et voir si (1) la présence de ces objets influe sur les vagues (2) les objets en questions subissent toujours une dérive.

REFERENCES

- [1] ALEKSEEV, G.V. On solvability of the nonhomogeneous boundary value problem for two-dimensional nonsteady equations of ideal fluid dynamics. *Dinamika Sploshnoy Sredy*, Novosibirsk, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Issue 24, (1976), pp. 15-35. [in Russian]
- [2] BERTOZZI, A.L., MJADA, A.L. *Vorticity and incompressible flow Cambridge texts in applied math* (2002).
- [3] Boyer, F. Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation *Differential equation vol.18 nr.8* (2005), pp. 891-934.
- [4] Bravin, M., Sueur, F. Existence of weak solutions to the two-dimensional incompressible Euler equations in the presence of sources and sinks, Preprint 2020.
- [5] Chemetov, N. V., Starovoitov, V. N. On a Motion of a Perfect Fluid in a Domain with Sources and Sinks. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*,4(2), (2002), pp. 128-144.
- [6] Glass, O. Some questions of control in fluid mechanics In *Control of Partial Differential Equations* Springer, Berlin, Heidelberg. (2012), pp. 131-206.
- [7] GLASS, O., KOLUMBAN, J., SUEUR, F. Remote trajectory tracking of rigid bodies immersed in a 2D perfect incompressible fluid Preprint 2019.
- [8] GLASS, O., SUEUR, F. Uniqueness results for weak solutions of two-dimensionnal fluid-solid systems *Arch. Rational Mech. Anal.* 218 (2015), pp.907-944.
- [9] GLASS, O., SUEUR, F. On the motion of a small body immersed in a two dimensionnal incompressible perfect fluid *Bull.soc.math.fr* (2014), pp.489-536.
- [10] HORNANDER, L. Inequalities between normal and tangential derivatives of harmonic functions *DOI* 10.1007/978 - 3 - 319 - 69850 - 2₆
- [11] HUPPERT, H., WEBBER, J. Stokes drift through corals preprint 2020.
- [12] LANNES, D. The water waves problem *Mathematical surveys and monographs* V.188. (2010)
- [13] PAPIN, A.A., WEIGANT, W.A. On the uniqueness of the solution of the flow problem with a given vortex. *Math. Notes*, Vol.96, No 6 (2014), pp. 820-826.
- [14] MAMONTOV, A. E. On the uniqueness of solutions to boundary value problems for non-stationary Euler equations. *New Directions in Mathematical Fluid Mechanics*, Birkhäuser Basel. (2009), pp. 281-299.
- [15] MARCHIORO, C., PULVIRENTI, M. *Mathematical theory of incompressible fluids* Springer Verlag (1994).
- [16] Uvarovskaya, M.I. Existence of solution for two-dimensional nonsteady problem of the flow of an ideal incompressible fluid through a given domain. *Vestnik of Novosibirsk State University, Mathematics, Mechanics and Informatics. Series, V. III, Issue 1.* (2003), pp. 3-11. [in Russian]
- [17] YUDOVICH, V.I. Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations, *Soviet Math. Dokl.*, V. 2, (1961), pp. 746-749. (previously in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, V. 138, 1961, No. 4, pp. 805-808).
- [18] YUDOVICH, V.I. Non-stationary flow of an ideal incompressible liquid. *Comput. Math. Math. Phys.*, V. 3, (1963), pp. 1407-1456. (previously in *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, (1963). V. 3, No. 6. pp. 1032-1066. [in Russian]).
- [19] YUDOVICH, V.I. Some bounds for solution of elliptic equations *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) V. 56 (1966). (previously in *Mat. Sb.*, 1962, V. 59, No. 101, pp. 229-244 [in Russian]).
- [20] YUDOVICH, V.I. A Two dimensional problem of unsteady flow of an ideal fluid across a given domain *Amer. Math. Soc. Translations*, V. 57, (1966), pp. 277-304. (previously in *Mat. Sb.*, 64 (1964), pp. 562-588 [in Russian]).