REPRÉSENTATION EN COURANT ALÉATOIRE DU MODÈLE D'ISING

ROMAIN PANIS
SOUS LA DIRECTION DE HUGO DUMINIL-COPIN

Contents

1. Introduction

Afin d'étudier les quantités thermodynamiques apparaissant dans l'étude de modèles de spin comme le modèle d'Ising, les mathématiciens ont cherché à exprimer certaines de ces quantités à partir de représentations géométriques. Dans cette perspective, Aizenman a introduit dans [2] la représentation en courant aléatoire qui lie le modèle d'Ising à un système dual de courants aléatoires. Avec cette nouvelle vision, de nombreux problèmes se réduisent désormais à des questions de percolation liées à ces systèmes de courants aléatoires. Parmi les avancées majeures effectuées dans la compréhension du modèle d'Ising en utilisant ces idées, on trouve : le problème de la trivialité des limites d'échelle du modèle d'Ising [2,4], la sharpness de la transition de phase du modèle d'Ising [6,9], la continuité de la magnétisation [5], le calcul de l'exposant critique de la susceptibilité en dimension $d \geq 5$ [2], etc. Nous nous intéressons en particulier à la question de la trivialité du modèle d'Ising en dimension $d = 4$ récemment traitée par Aizeman et Duminil-Copin [4] en présentant certaines questions qui complètent l'étude. Nous terminons enfin cette présentation par diverses questions ouvertes liées à la représentation en courants aléatoires, qui seront l'objet de recherches futures.

2. La représentation en courant aléatoire du modèle d'Ising

Nous commençons par définir le modèle d'Ising dans son cadre le plus simple en rappelant certaines propriétés essentielles.

2.1. **Le modèle d'Ising.** Soit $d \geq 2$. Dans ce qui suit, $G = (V(G), E(G))$ est un sous-graphe[1] fini du réseau $\mathbb{Z}^d$ avec $E(G) := \{\{x,y\} \,|\, x, y \in G \text{ et } x \sim y\}$ où la notation $x \sim y$ signifie que x et y sont voisins dans $\mathbb{Z}^d$. On définit le modèle d'Ising ferromagnétique sur G de la manière suivante : soient $J = (J_{x,y})_{\{x,y\}\in E(G)} \in (\mathbb{R}^+)^{E(G)}$, $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$; pour $\sigma = \{\sigma_x\}_{x\in G} \in \{\pm 1\}^G$, on introduit le Hamiltonien

$$H_{G,J,h}(\sigma) := \sum_{\{x,y\}\in E(G)} J_{x,y}\sigma_x\sigma_y - h\sum_{x\in G}\sigma_x, \tag{2.1}$$

auquel on associe la mesure de Gibbs en volume fini à température inverse β notée $\langle\cdot\rangle_{G,J,h,\beta}$, qui est la mesure de probabilité sous laquelle pour tout $F : \{\pm1\}^G \to \mathbb{R}$,

$$\langle F\rangle_{G,J,h,\beta} := \frac{1}{Z(G,J,h,\beta)}\sum_{\sigma\in\{\pm1\}^G} F(\sigma)\exp\left(-\beta H_{G,J,h}(\sigma)\right)$$

où

$$Z(G,J,h,\beta) = \sum_{\sigma\in\{\pm1\}^G}\exp\left(-\beta H_{G,J,h}(\sigma)\right)$$

est la fonction de partition du modèle. On construit ainsi le modèle d'Ising avec *conditions au bord libres.* On peut de la même manière construire le modèle d'Ising sur G avec *conditions au bord positives* en imaginant que les spins de G interagissent aussi avec leurs voisins hors de G et que l'on a affecté à tous les éléments de $\mathbb{Z}^d \setminus G$ un spin $+1$. Cela revient essentiellement à changer le Hamiltonien dans (2.1) par

$$H^+_{G,J,h}(\sigma) := \sum_{\{x,y\}\in E(G)} J_{x,y}\sigma_x\sigma_y - h\sum_{x\in G}\sigma_x - \sum_{x\sim y,\, x\in G,\, y\notin G} J_{x,y}\sigma_x. \tag{2.2}$$

La mesure obtenue est alors notée $\langle\cdot\rangle^+_{G,J,h,\beta}$. Dans ce qui suit on notera les mesures de Gibbs en omettant de mentionner J et h, et on fixera $h = 0$ (sauf mention explicite du contraire). Pour simplifier on supposera aussi que $J_{x,y} = J\mathbb{1}_{|x-y|_1=1}$ où $J \geq 0$.
Il est possible d'obtenir des versions en volume infini des mesures précédentes (par exemple en utilisant le couplage avec le modèle de FK-percolation [1]), on les note respectivement $\langle\cdot\rangle_\beta$ et $\langle\cdot\rangle^+_\beta$. Une des particularités du modèle d'Ising est qu'il présente un phénomène de transition de phase pour ce qui est de la valeur moyenne du spin de l'origine. Plus précisément, Peierls a démontré qu'en dimension $d \geq 2$, si

$$\beta_c := \inf\{\beta > 0,\ \langle\sigma_0\rangle^+_\beta > 0\},$$

alors $\beta_c \in (0,\infty)$. On rappelle aussi le résultat suivant :

Théorème 2.1 (Existence et finitude de la longueur de corrélation)**.** *On considère un modèle d'Ising ferromagnétique, invariant par translation et à plus proches voisins sur $\mathbb{Z}^d$. La limite suivante existe et appartient à $(0,\infty)$,*

$$\xi(\beta) = \left(\lim_{n\to+\infty} -\frac{\log\langle\sigma_0\sigma_{ne_1}\rangle}{n}\right)^{-1}.$$

De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$\langle\sigma_0\sigma_{ne_1}\rangle \leq \exp\left(-\frac{n}{\xi(\beta)}\right).$$

[1] On identifiera G et $V(G)$.

2.2. **Représentation en courant aléatoire et Switching Lemma.** Dans ce qui suit on note pour $A \subset G$,

$$\langle \sigma_A \rangle_{G,\beta} := \left\langle \prod_{x\in A} \sigma_x \right\rangle_{G,\beta}.$$

Définition 2.2. Un *courant* (ou *configuration de courant*) $\mathbf{n}$ sur G est une fonction à valeurs dans les entiers naturels et définie sur l'ensemble $E(G)$. On note Ω_G l'ensemble des courants G. L'ensemble des *sources* de $\mathbf{n}$, noté $\partial\mathbf{n}$, est défini par

$$\partial\mathbf{n} := \left\{ x \in G\,,\ \sum_{y\in G,\, x\sim y} \mathbf{n}_{x,y} \text{ is odd} \right\}. \tag{2.3}$$

On pose aussi $w_\beta(\mathbf{n}) := \prod_{\{x,y\}\in E(G)} \dfrac{(\beta J_{x,y})^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!}$

Remarque 2.3. Il est facile de vérifier que pour un courant $\mathbf{n}$ tel que $\partial\mathbf{n} = \{x, y\}$ avec x et y dans G, les sources x et y sont *reliées* en ce sens qu'il existe un chemin de x à y dans G tel que pour toute arête e sur ce chemin on ait $\mathbf{n}_e > 0$. Ceci permet de voir que de tels courants sont essentiellement la donnée d'une marche entre les sources et de boucles sans sources. Ces idées sont expliquées avec précision par le biais de la *backbone representation* introduite par Aizeman et Fernandez dans [6].

Il est possible de développer les fonctions de corrélation du modèle d'Ising de telle sorte à établir un lien avec les courants sur G et les poids $w_\beta(\mathbf{n})$. En effet, en utilisant le fait que

$$\exp(\beta J_{x,y}\sigma_x\sigma_y) = \sum_{\mathbf{n}_{x,y}\geq 0} \frac{(\beta J_{x,y}\sigma_x\sigma_y)^{\mathbf{n}_{x,y}}}{\mathbf{n}_{x,y}!},$$

on obtient

$$Z(G,\beta) = \sum_{\mathbf{n}\in\Omega_G} w_\beta(\mathbf{n}) \sum_{\sigma\in\{\pm1\}^G} \prod_{x\in G} \sigma_x^{\sum_{y\in G}\mathbf{n}_{x,y}}.$$

La symétrie $-\sigma \leftrightarrow \sigma$ donne que

$$\sum_{\sigma\in\{\pm1\}^G} \prod_{x\in G} \sigma_x^{\sum_{y\in G}\mathbf{n}_{x,y}} = 2^{|G|}\mathbb{1}_{\{\partial\mathbf{n}=\emptyset\}},$$

ce qui permet d'obtenir

$$Z(G,\beta) = 2^{|G|} \sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_\beta(n). \tag{2.4}$$

Plus généralement, les fonctions de corrélation du modèle d'Ising sont données, pour $A \subset G$, par

$$\langle \sigma_A \rangle_{G,\beta} = \frac{\sum_{\partial\mathbf{n}=A} w_\beta(n)}{\sum_{\partial\mathbf{n}=\emptyset} w_\beta(n)}. \tag{2.5}$$

Remarque 2.4. En particulier, on retrouve l'une des inégalités de Griffiths :

$$\langle \sigma_A \rangle_{G,\beta} \geq 0.$$

Notons aussi que si $|A|$ est impair, alors il n'existe aucun courant $\mathbf{n}$ tel que $\partial\mathbf{n} = A$ et donc on obtient l'identité triviale

$$\langle \sigma_A \rangle_{G,\beta} = 0.$$

On note que dans l'écriture (2.5) les sommes au numérateur et au dénominateur ne portent pas sur les mêmes ensembles de courant. En particulier, on ne voit pas encore comment lier les fonctions de corrélations du modèle d'Ising à des probabilités portant sur des courants aléatoires. L'outil suivant est un grand pas dans cette direction et constitue la principale force de la représentation en courant aléatoire. Il permet en effet de *switcher* les sources dans des situations où l'on travaille avec la somme de deux courants.

Notons que si $\mathbf{n}$ est un courant défini sur un sous-ensemble $H \subset G$, on peut l'étendre en un courant sur G en posant $\mathbf{n}_e = 0$ pour tout $e \in E(G) \setminus E(H)$. L'extension à G est toujours notée $\mathbf{n}$. De plus, si $\mathbf{n} \in \Omega_G$, on peut considérer sa restriction aux arêtes $e \in E(H)$. On la note $\mathbf{n}_{|H}$.

Lemme 2.5 (Switching lemma [2])**.** *Soit $H \subset G$. Pour tout $A \subset G, B \subset H$ et toute application F à valeurs réelles définie sur l'ensemble des courants sur G,*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_G:\, \partial \mathbf{n}_1 = A \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_H:\, \partial \mathbf{n}_1 = B}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{n}_1 \in \Omega_G:\, \partial \mathbf{n}_1 = A \Delta B \\ \mathbf{n}_2 \in \Omega_H:\, \partial \mathbf{n}_1 = \emptyset}} F(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) w_\beta(\mathbf{n}_1) w_\beta(\mathbf{n}_2) \mathbb{1}_{(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)_{|H} \in \mathcal{F}_B^H}$$

où $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est la différence symétrique ensembliste et $\mathcal{F}_B^H$ est un sous-ensemble de Ω_H défini par

$$\mathcal{F}_B^H = \{\mathbf{n} \in \Omega_H \,,\, \exists \mathbf{m} \leq \mathbf{n} \,,\, \partial \mathbf{m} = B\}.$$

Ce lemme constitue l'outil principal de la représentation en courant aléatoire ce qui justifie le désir de travailler avec des paires de courants plutôt qu'avec de simples courants. Avant de voir les premières conséquences de ce lemme, il est utile de voir que le cadre précédent se généralise sans peine à d'autres mesures de Gibbs en volume fini et notamment à $\langle \cdot \rangle^+_{G,\beta}$.

L'idée est d'ajouter un *ghost* g au graphe G de spin fixé $\sigma_g = 1$. En notant $G_g = G \cup \{g\}$, et en posant pour $x \in G$,

$$J_{x,g} := \sum_{x \sim y,\, y \notin G} J_{x,y},$$

et pour $\mathbf{n} \in \Omega_{G_g}$,

$$w_\beta(\mathbf{n}) = \prod_{e \in E(G_g)} \frac{(\beta J_e)^{\mathbf{n}_e}}{\mathbf{n}_e!},$$

le calcul précédent permet d'obtenir que pour $A \subset G$,

$$\langle \sigma_A \rangle^+_{G,\beta} = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_{G_g},\, \partial \mathbf{n} \cap G = A} w_\beta(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{n} \in \Omega_{G_g},\, \partial \mathbf{n} \cap G = \emptyset} w_\beta(\mathbf{n})}.$$

Nous définissons aussi une mesure de probabilité sur l'ensemble des courants sur G de sources prescrites.

Définition 2.6 (Mesure de probabilité sur l'ensemble des courants)**.** Soit $A \subset G$, on introduit la mesure de probabilité suivante sur l'ensemble Ω_G définie pour un courant $\mathbf{n}$ par

$$\mathbb{P}^A_{G,\beta}(\mathbf{n}) = \frac{2^{|G|} w_\beta(\mathbf{n}) \mathbb{1}_{\partial \mathbf{n} = A}}{\langle \sigma_A \rangle_{G,\beta} Z(G,\beta)}.$$

Si $A_1, \ldots, A_n \subset G$, on adopte la notation suivante

$$\mathbb{P}^{A_1,\ldots,A_n}_{G,\beta} := \mathbb{P}^{A_1}_{G,\beta} \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}^{A_n}_{G,\beta}.$$

À un courant $\mathbf{n}$ sur G on peut associer une configuration de percolation $\widehat{\mathbf{n}}$ en déclarant une arête e ouverte si $\mathbf{n}_e > 0$ et fermée autrement. On peut alors voir la mesure de probabilité précédente comme une mesure de percolation sur G (il suffit de prendre la mesure image par $\mathbf{n} \mapsto \widehat{\mathbf{n}}$). Motivés par cette analogie, on note désormais $\mathbf{C}_{\mathbf{n}}(x)$ le cluster de x dans $\widehat{\mathbf{n}}$. Toutes ces définitions s'étendent sans peine à la mesure $\langle \cdot \rangle^+_{G,\beta}$.

La proposition suivante permet de faire le lien entre les fonctions de corrélation du modèle d'Ising et les mesures de probabilité introduites précédemment.

Proposition 2.7. *Soit G un sous-graphe fini de $\mathbb{Z}^d$. Soit $\beta \geq 0$.*

(*i*) *Pour $A, B \subset G$,*

$$\frac{\langle \sigma_A \rangle_{G,\beta} \langle \sigma_B \rangle_{G,\beta}}{\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{G,\beta}} = \mathbb{P}^{A\Delta B,\emptyset}_{G,\beta}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \in \mathcal{F}_B) \tag{2.6}$$

et en particulier pour $x, y, u \in G$,

$$\frac{\langle \sigma_x \sigma_u \rangle_{G,\beta} \langle \sigma_u \sigma_y \rangle_{G,\beta}}{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{G,\beta}} = \mathbb{P}^{\{x,y\},\emptyset}_{G,\beta}(u \in \mathbf{C}_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}(x)). \tag{2.7}$$

(*ii*) *Pour $A, B \subset G_g$,*

$$\frac{\langle \sigma_A \rangle^+_{G,\beta} \langle \sigma_B \rangle^+_{G,\beta}}{\langle \sigma_A \sigma_B \rangle^+_{G,\beta}} = \mathbb{P}^{A\Delta B,\emptyset}_{G,\beta}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \in \mathcal{F}_B) \tag{2.8}$$

et pour $x, y \in G_g$,

$$\frac{\langle \sigma_x \rangle^+_{G,\beta} \langle \sigma_y \rangle^+_{G,\beta}}{\langle \sigma_x \sigma_y \rangle^+_{G,\beta}} = \mathbb{P}^{\{x,y\},\emptyset}_{G,\beta}(g \in \mathbf{C}_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}(x)). \tag{2.9}$$

(*iii*) *Pour $x, y \in G$,*

$$(\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{G,\beta})^2 = \mathbb{P}^{\emptyset,\emptyset}_{G,\beta}(y \in \mathbf{C}_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}(x)). \tag{2.10}$$

*En particulier, cette formule donne une interprétation du "**bubble diagram**" $B_{G,\beta}(\cdot)$ du modèle d'Ising défini pour $u \in G$, par*

$$B_{G,\beta}(u) := \sum_{x \in G} (\langle \sigma_u \sigma_x \rangle_{G,\beta})^2.$$

On obtient alors que

$$B_{G,\beta}(u) = \mathbb{E}^{\emptyset,\emptyset}_{G,\beta}\left[\#\mathbf{C}_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}(u)\right].$$

Remarque 2.8. Une question naturelle à ce stade est de se demander si ces résultats s'étendent au cas de volumes infinis. En utilisant les résultats développés dans [5], il est possible de construire les limites faibles des mesures $\mathbb{P}^A_{G,\beta}$ lorsque $G \nearrow \mathbb{Z}^d$. Par conséquent, les énoncés précédents restent valides avec $G = \mathbb{Z}^d$. Nous omettrons la mention de $\mathbb{Z}^d$ lorsque nous travaillerons en volume infini. Par exemple, pour $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ finies,

$$\frac{\langle \sigma_A \rangle_\beta \langle \sigma_B \rangle_\beta}{\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\beta} = \mathbb{P}^{A\Delta B,\emptyset}_{\beta}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \in \mathcal{F}_B)$$

où $\mathbb{P}^{A\Delta B,\emptyset}_{\beta}$ est la limite faible de la suite de mesures $\mathbb{P}^{A\Delta B,\emptyset}_{G,\beta}$ lorsque $G \nearrow \mathbb{Z}^d$.

3. Quelques résultats fondamentaux

Dans cette section, nous présentons certains résultats fondamentaux ayant pu être obtenu avec l'aide de la représentation en courant aléatoire.

3.1. **Sharpness de la transition de phase du modèle d'Ising.** Le résultat qui suit a d'abord été démontré par Aizenman, Barsky and Fernandez [3]. Une seconde preuve, plus récente et plus courte, due à Duminil-Copin and Tassion [9], repose elle aussi sur la représentation en courant aléatoire. Soit $\|.\|$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^d$. Dans cette partie, on considère un modèle d'Ising légèrement plus général dans lequel deux spins peuvent interagir sans forcément être voisins dans $\mathbb{Z}^d$.

Théorème 3.1 (Sharpness de la transition de phase pour certains modèles d'Ising [3,9])**.** *On considère un modèle d'Ising invariant par translation*[2]*, ferromagnétique, de constantes de couplage* $J = (J_{x,y})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$.

(*i*) *Pour* $\beta > \beta_c$,

$$\langle\sigma_0\rangle_\beta^+ \geq \sqrt{\frac{\beta^2-\beta_c^2}{\beta^2}}.$$

(*ii*) *Pour* $\beta < \beta_c$*, la susceptibilité est finie, ce qui signifie que*

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\langle\sigma_0\sigma_x\rangle_\beta^+ < \infty.$$

(*iii*) *Si on suppose de plus que l'interaction est à portée finie, ce qui se traduit par l'existence de* $R > 0$*, tel que* $J_{x,y} = 0$ *si* $\|x-y\| > R$*; alors pour tout* $\beta < \beta_c$*, il existe* $c = c(\beta) > 0$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\langle\sigma_0\sigma_x\rangle_\beta \leq \exp(-c\|x\|).$$

La preuve est très similaire à celle utilisée pour démontrer la sharpness de la transition de phase dans le cas de la percolation de Bernoulli (voir [9]). En particulier, elle est amorcée par l'introduction d'une quantité du même genre. Pour $\beta > 0$ et un sous-ensemble fini S de $\mathbb{Z}^d$, on définit

$$\varphi_\beta(S) := \sum_{x\in S}\sum_{y\notin S}\tanh(\beta J_{x,y})\langle\sigma_0\sigma_x\rangle_{S,\beta}.$$

On définit de même,

$$\tilde{\beta}_c := \sup\left\{\beta \geq 0,\ \varphi_\beta(S) < 1 \text{ pour un } S \subset \mathbb{Z}^d \text{ contenant } 0\right\}.$$

L'objectif est alors d'établir que (*i*), (*ii*) et (*iii*) sont satisfaites avec $\tilde{\beta}_c$ à la place de β_c ce qui donne facilement que $\beta_c = \tilde{\beta}_c$. Plus précisément, on procède en deux étapes :

- La quantité $\varphi_\beta(S)$ apparait naturellement dans la dérivée d'une version en volume fini de $\langle\sigma_0\rangle_{\beta,h}^+$. On commence alors par obtenir une version en volume fini de l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\langle\sigma_0\rangle_{\beta,h}^2 \geq \frac{2}{\beta}\cdot\inf_{0\in S}\varphi_\beta(S)\cdot\left(1-\langle\sigma_0\rangle_{\beta,h}^2\right), \tag{3.1}$$

  ce qui implique immédiatement que $\beta > \tilde{\beta}_c$,

$$\langle\sigma_0\rangle_{\beta,h} \geq \sqrt{\frac{\beta^2-\tilde{\beta}_c^2}{\beta^2}},$$

  et donne que $\beta_c \leq \tilde{\beta}_c$.
- On prouve ensuite (*ii*) et (*iii*) en utilisant une version améliorée de l'inégalité de Simon-Lieb [12, 13].

[2]Ce qui signifie que $J_{x,y} = J_{0,x-y}$ pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

3.2. **Continuité de la magnétisation.** Le résultat qui suit est dû à Aizenman, Duminil-Copin et Sidoravicius [5]. Il permet de répondre à la question de la continuité de la transition de phase du modèle d'Ising.

Théorème 3.2. *Soit $d \geq 1$. On considère un modèle d'Ising invariant par translation, ferromagnétique, localement fini*[3] *et apériodique*[4] *sur $\mathbb{Z}^d$ de constantes de couplage $(J_{x,y})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$. Si*

$$\lim_{\|x-y\|\to\infty} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\beta_c} = 0,$$

alors

$$\langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta_c} = 0.$$

On peut reformuler ce résultat de la manière suivante : dès que la mesure de Gibbs critique du modèle d'Ising avec conditions au bord libres ne présente pas d'ordre à longue portée, alors il en est de même pour la mesure de Gibbs avec conditions au bord positives. En fait, dans ce cas on a aussi que $\langle \cdot \rangle_{\beta_c} = \langle \cdot \rangle^+_{\beta_c}$. Cette propriété est connue pour être fausse dans des modèles de Potts généraux avec $q > 4$ (voir [7]) étant donné que dans ce cas la transition de phase est discontinue. Dans le cas du modèle d'Ising avec interaction entre plus proches voisins sur $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 3$, on peut conclure que la transition de phase est continue étant donné que l'on dispose de la borne infra-rouge (voir [11]) qui donne l'existence, pour $\beta \leq \beta_c$, de $C = C(\beta) > 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$,

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta \leq \frac{C}{\|x-y\|^{d-2}}.$$

Corollaire 3.3. *Pour $d \geq 3$, la transition de phase du modèle d'Ising avec interaction entre plus proches voisins sur $\mathbb{Z}^d$ est continue.*

3.3. **Étude de la susceptibilité.** Il est possible de calculer l'exposant critique de la susceptibilité en dimension $d \geq 5$. On se place dans le cadre du modèle d'Ising de plus proches voisins avec interactions invariantes par translation. Aizenman a démontré dans [2] que l'exposant critique de la susceptibilité valait 1. On rappelle que la susceptibilité $\chi(\beta)$ est définie pour $\beta \leq \beta_c$ par

$$\chi(\beta) := \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_\beta.$$

On dispose alors du résultat suivant

Théorème 3.4 (Exposant critique de la susceptibilité)**.** *Soit $d \geq 5$. Il existe $c = c(d), C = C(d) \in (0, \infty)$ telles que $\beta < \beta_c$,*

$$\frac{c}{\beta_c - \beta} \leq \chi(\beta) \leq \frac{C}{\beta_c - \beta}.$$

4. Trivialité du modèle d'Ising

4.1. **Motivation.** Dans cette section on suppose que l'on travaille avec un modèle d'Ising à plus proches voisins, ferromagnétique. Pour simplifier on suppose aussi que les constantes de couplages satisfont $J_{x,y} = J \cdot \mathbb{1}_{\{\|x-y\|_1=1\}}$ pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$.
La question de savoir si les limites d'échelle (dans un sens à préciser) du modèle d'Ising se comportent de manière triviale - ce qui signifie qu'elles se comportent comme un processus Gaussien généralisé, ou non - est depuis la fin du 20ème siècle d'un intérêt majeur pour les mathématiciens et pour les physiciens théoriciens. Dans la perspective

[3] Ce qui signifie que $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} J_{0,x} < \infty$.
[4] Ce qui signifie que pour $x \in \mathbb{Z}^d$, il existe $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_m = x$ tels que $J_{x_0,x_1}, \ldots, J_{x_{m-1},x_m} > 0$.

du mathématicien, il est intéressant de pouvoir traiter de telles questions sans disposer de solution exacte du modèle en dimension $d \geq 3$. Du point de vue du physicien, de telles questions sont fondamentales lorsqu'il s'agit de chercher à créer des champs (non-triviaux) sur $\mathbb{R}^d$. Dès lors, les cas les plus importants devraient être ceux des dimensions 3 et 4 qui disposent d'une interprétation physique claire[5]. Le cas des dimensions $d \geq 5$ a été traité par Aizenman [2] et Fröhlich [10] en 1982 dans des publications indépendantes. L'étude de la dimension critique $d = 4$ a été récemment réalisée par Aizenman et Duminil-Copin [4]. Il a donc été obtenu que les limites d'échelle du modèle d'Ising se comportent trivialement en dimension $d \geq 4$. On s'attend à ce que ce résultat ne soit plus vrai en dimension 3. Dans ce qui suit on note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$.
Commençons par expliquer ce que l'on entend par "limites d'échelle du modèle d'Ising". On commence donc par observer le problème du point de vue du mathématicien.

Définition 4.1. Soient $\beta > 0$ et $L \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, on définit pour $\sigma \in \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}^d}$,

$$T_{f,L,\beta}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_L(\beta)}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f\left(\frac{x}{L}\right) \sigma_x$$

où

$$\Sigma_L(\beta) := \left\langle \left(\sum_{x \in \Lambda_L} \sigma_x \right)^2 \right\rangle_\beta = \sum_{x,y \in \Lambda_L} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_\beta,$$

avec $\Lambda_L = [-L, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$.

Remarque 4.2. On remarque que si $f = \mathbb{1}_{[-L,L]^d}$,

$$\left\langle T_{f,L,\beta}(\sigma)^2 \right\rangle_\beta = 1$$

et plus généralement $f > 0$,

$$\left\langle T_{f,L,\beta}(\sigma)^2 \right\rangle_\beta \asymp_f 1$$

ce qui signifie que cette quantité se comporte comme une constante bornée loin de 0 et ∞ qui ne dépend que de f. Ceci indique aussi que la renormalisation choisie est la plus à même de fournir des limites intéressantes.

On dispose des asymptotiques suivantes pour le moment exponentiel de $T_{f,L,\beta}(\sigma)$ qui impliquent immédiatement le caractère Gaussien (à la limite) de ces variables aléatoires.

Théorème 4.3 (Trivialité du modèle d'Ising en dimension $d \geq 5$, Aizenman [2], Fröhlich [10])**.** *Soit $d \geq 5$. Il existe $C(d), \alpha(d) > 0$ telles que pour tout $\beta \leq \beta_c$, $L \leq \xi(\beta)$, $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et $z \in \mathbb{R}$,*

$$\left| \langle \exp\left(z T_{f,L,\beta}(\sigma)\right) \rangle_\beta - \exp\left(\frac{z^2}{2} \left\langle T_{f,L,\beta}(\sigma)^2 \right\rangle_\beta \right) \right| \leq \exp\left(\frac{z^2}{2} \left\langle T_{f,L,\beta}(\sigma)^2 \right\rangle_\beta \right) \frac{C \|f\|_\infty^4 r_f^\alpha z^4}{L^{d-4}}$$

où $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$ et $r_f = \max\{\max\{r \geq 0,\ \exists x \in \mathbb{R}^d,\ |x| = r,\ f(x) \neq 0\}, 1\}$.

Remarque 4.4. On rappelle que $\xi(\beta_c) = \infty$. En utilisant le résultat ci-dessus,

$$\langle \exp\left(z T_{f,L,\beta_c}(\sigma)\right) \rangle_{\beta_c} \xrightarrow[L \to \infty]{} \exp\left(\frac{z^2}{2} \left\langle T_{f,L,\beta_c}(\sigma)^2 \right\rangle_{\beta_c} \right).$$

[5]Pour la dimension $d = 4$, il s'agit de *l'espace de Minkowski* qui dispose de $3 + 1$ dimensions pour l'espace et le temps.

On remarque immédiatement que le résultat précédent n'est pas concluant en dimension 4. Le théorème suivant, obtenu dans [4], résout ce problème en ajoutant une correction logarithmique.

Théorème 4.5 (Trivialité du modèle d'Ising en dimension $d = 4$, Aizenman, Duminil–Copin [4])**.** *Soit $d = 4$. Il existe $c, C, \alpha > 0$ telles que $\beta \leq \beta_c$, $L \leq \xi(\beta)$, $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et $z \in \mathbb{R}$,*

$$\left| \langle \exp\left(zT_{f,L,\beta}(\sigma)\right)\rangle_\beta - \exp\left(\frac{z^2}{2}\langle T_{f,L,\beta}(\sigma)^2\rangle_\beta\right)\right| \leq \exp\left(\frac{z^2}{2}\langle T_{f,L,\beta}(\sigma)^2\rangle_\beta\right)\frac{C\|f\|_\infty^4 r_f^\alpha z^4}{(\log L)^c}.$$

On donne maintenant une justification rapide de ces questions dans la perspective du physicien et plus précisément dans le domaine de la théorie constructive quantique des champs. Pour plus d'informations sur le sujet, on recommande de se référer à l'article de Aizenman et Duminil-Copin [4] et aux références s'y trouvant.
L'objectif majeur du programme de la théorie constructive des champs est de construire des champs aléatoires Φ sur $\mathbb{R}^d$ tels que pour $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}$,

$$\langle F(\Phi)\rangle \approx \frac{1}{\text{Norm}} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}^d}} F(\Phi)\exp(-H(\Phi)) \prod_{x\in\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\Phi(x) \tag{4.1}$$

où l'hamiltonien H est de la forme

$$H(\Phi) = (\Phi, A\Phi) + \int_{\mathbb{R}^d} P(\Phi(x))\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

où le premier terme est une forme quadratique (typiquement $\Phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\Phi(x)|^2\,\mathrm{d}x$) et P est un polynôme. Bien sûr, de nombreux problèmes de convergence et de bonne définition apparaissent dans les équations (4.1) et (4.2). Une manière de résoudre ces problèmes consiste à commencer par discrétiser le modèle, puis à calculer les limites (si elles existent). On souhaiterait appliquer les formules précédentes à la classe de fonctionnelles F donnée par les $T_f(\Phi)$, définies pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ par

$$T_f(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x.$$

Les valeurs moyennes des produits de telles fonctionnelles prennent la forme

$$\left\langle \prod_{j=1}^n T_{f_j}(\Phi)\right\rangle := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n S_n(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j)$$

où les fonctions S_n sont appelées les *fonctions de Schwinger* de la théorie de champ Euclidien correspondante. Parmi toutes les classes de champs Euclidiens, l'exemple le plus simple est donné par celle des champs Gaussiens, où H contient seulement le terme quadratique. Ces champs ont la particularité d'avoir une structure entièrement déterminée par la fonction à deux points S_2. La fonction à $2n$-points S_{2n} est alors obtenue par la loi de Wick,

$$S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_\pi \prod_{j=1}^n S_2(x_{\pi(2j-1)}, x_{\pi(2j)}) \tag{4.3}$$

où π parcourt toutes les partitions par paires de $\{1, \ldots, 2n\}$. L'interprétation en théorie des champs de (4.3) est l'absence d'interaction, ce qui explique que de tels champs sont souvent qualifiés de *triviaux*.
Si l'on revient à un cadre plus général, pour des champs vérifiant

$$S_{2n+1} \equiv 0,$$

pour $n \geq 1$, si on introduit

$$\mathcal{G}_n[S_2](x_1, \ldots, x_{2n}) := \sum_{\pi} \prod_{j=1}^{n} S_2(x_{\pi(2j-1)}, x_{\pi(2j)}), \tag{4.4}$$

la *Gaussiennité* d'un champ est mesurée par les différences

$$S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) - \mathcal{G}_n[S_2](x_1, \ldots, x_{2n}). \tag{4.5}$$

Exemple 4.6. Choisissons $P \equiv 0$. Prenons $\Lambda = [-1,1]^d$ et $\delta > 0$. Pour $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}$, on pose

$$\left\langle F\left(\varphi^\delta\right)\right\rangle_\Lambda^\delta := \frac{1}{\text{Norm}} \int_{\mathbb{R}^{\Lambda\cap\delta\mathbb{Z}^d}} F\left(\varphi^\delta\right) \exp\left(-\delta^{d-2}\sum_{x\sim y}\left(\varphi_x^\delta - \varphi_y^\delta\right)^2\right) \prod_{x\in\Lambda\cap\delta\mathbb{Z}^d} \mathrm{d}\varphi_x^\delta.$$

On remarque que dans ce cas l'ensemble $\Lambda \cap \delta\mathbb{Z}^d$ est fini de telle sorte qu'il n'y a aucun problème de convergence. Dès lors, il est connu que, lorsque $\delta \to 0$, φ^δ converge vers le GFF (champ libre Gaussien) Φ avec

$$T_f(\Phi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x \sim \mathcal{N}\left(0, \iint_{x,y\in\mathbb{R}^d} f(x)f(y)G(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

Exemple 4.7. On peut aussi choisir P de la forme

$$P(x) = bx^2 + \lambda x^4.$$

On définit alors un champ aléatoire $\varphi = \varphi^{\delta,\lambda,b,\beta}$ comme ci-dessus avec pour hamiltonien,

$$H(\varphi) = -\beta\sum_{x\sim y}\left(\varphi_x^\delta - \varphi_y^\delta\right)^2 + \sum_x (b\varphi_x^2 + \lambda\varphi_x^4).$$

Dans ce cadre là, on peut reformuler les résultats précédents.

Théorème 4.8 (Aizenman, Duminil-Copin [4])**.** *Pour $d \geq 4$, toute limite convergente de $\varphi^{\delta_n,\lambda_n,b_n,\beta_n}$ est nécessairement un processus Gaussien généralisé. Autrement dit, les quantités associées comme dans l'équation (4.4) tendent vers 0 lorsque $n \to \infty$.*

4.2. **Trivialité du modèle d'Ising en dimension $d \geq 4$.** On présente dans cette partie les arguments majeurs permettant d'obtenir la trivialité du modèle d'Ising au sens des théorèmes 4.3 et 4.5.

On rappelle que l'on dispose déjà de $S_{2n+1} \equiv 0$. La première étape consiste à observer que l'on dispose d'un contrôle simple sur (4.5). Le résultat suivant est dû à Aizenman [2], il réduit l'étude de (4.5) à celle U_4^β, la fonction d'Ursell à 4 points, définie pour $x, y, z, t \in \mathbb{Z}^d$ par

$$U_4^\beta(x,y,z,t) := S_4(x,y,z,t) - \mathcal{G}_2[S_2](x,y,z,t)$$

Dans ce qui suit on écrit $\mathcal{G}_{2n}$ plutôt que $\mathcal{G}_{2n}[S_2]$.

Théorème 4.9. *On considère un modèle d'Ising à plus proches voisins ferromagnétique sur $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 2$. Soit $n \geq 2$, on pose pour $x_1, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\mathcal{R}_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n}) := \sum_{1\leq i<j<k<\ell\leq 2n} |U_4^\beta(x_i,x_j,x_k,x_\ell)|\mathcal{G}_{2n-4}(\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,\widehat{x_k},\ldots,\widehat{x_\ell},\ldots)$$

où la notation $\widehat{u}$ indique que le sommet u est omis. Alors,

$$|S_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n}) - \mathcal{G}_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n})| \leq \frac{3}{2}\mathcal{R}_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n}). \tag{4.6}$$

Le résultat précédent suggère qu'il suffit d'obtenir un bon contrôle sur U_4^β pour conclure. Ceci motive les résultats qui suivent.

Proposition 4.10. *On dispose de l'identité suivante.*

$$U_4^\beta(1,2,3,4) = -2\langle\sigma_1\sigma_2\rangle_\beta\langle\sigma_3\sigma_4\rangle_\beta\mathbb{P}_\beta^{\{1,2\},\{3,4\}}(1,2,3,4 \in \mathbf{C}_{\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}}(1)). \tag{4.7}$$

Avec cette écriture, on peut déduire une heuristique de preuve des théorèmes 4.3 et 4.5. La preuve d'Aizenman repose sur l'obtention de la "tree diagram bound" énoncée ci-après qui est obtenue en utilisant des idées issues de la théorie des marches aléatoires et de la théorie de la percolation. Le contrôle de la fonction d'Ursell à 4 points est donné par le contrôle de la probabilité d'intersection de deux courants aléatoires indépendants de sources prescrites. En haute dimension (typiquement $d > 4$), on s'attend à ce que ces courants aléatoires se comportent essentiellement comme le chemin qui lie leurs sources. La théorie développée dans la "backbone representation" [6] permet de comparer ces chemins à des marches aléatoire indépendantes. Il est alors bien connu que deux marches aléatoires indépendantes en dimension $d > 4$ s'intersectent dans une boîte donnée avec très petite probabilité. Évidemment, cette analyse donne seulement une intuition de la manière dont on va obtenir le résultat, et il faut rester prudent car les objets manipulés ne sont pas exactement des marches aléatoires. En dimension 4, on s'attend donc à ce que le résultat soit bien plus complexe : cette dimension est critique du point de vue de l'intersection de marches aléatoires indépendantes. Ce premier résultat permet de conclure dans le cas des dimensions $d \geq 5$.

Proposition 4.11 ("Tree diagram bound" [2])**.**

$$0 \leq -U_4^\beta(1,2,3,4) \leq 2\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\langle\sigma_1\sigma_y\rangle_\beta\langle\sigma_2\sigma_y\rangle_\beta\langle\sigma_3\sigma_y\rangle_\beta\langle\sigma_4\sigma_y\rangle_\beta.$$

Dans le cas de la dimension 4, cette borne est modifiée pour obtenir le résultat suivant.

Proposition 4.12 ("Improved tree diagram bound" [4])**.** *Pour le modèle d'Ising à plus proches voisins, ferromagnétique en dimension $d = 4$, il existe $c \in (0,1), C > 0$ tels que pour tout $\beta \leq \beta_c$, pour tous $L \leq \xi(\beta)$ et $x, y, z, t \in \mathbb{Z}^4$ à une distance au moins L les uns des autres,*

$$0 \leq -U_4^\beta(x,y,z,t) \leq \frac{C}{B_L(\beta)^c}\sum_{u\in\mathbb{Z}^4}\langle\sigma_u\sigma_x\rangle_\beta\langle\sigma_u\sigma_y\rangle_\beta\langle\sigma_u\sigma_z\rangle_\beta\langle\sigma_u\sigma_t\rangle_\beta, \tag{4.8}$$

où $B_L(\beta)$ est le "bubble diagram" tronqué à distance L défini par

$$B_L(\beta) := \sum_{x\in\Lambda_L}\left(\langle\sigma_0\sigma_x\rangle_\beta\right)^2.$$

4.3. **Conjectures.**

4.3.1. *Le cas de la dimension 3.* En dimension 3, on conjecture que les limites d'échelle du modèle d'Ising ne sont pas Gaussiennes. Une manière d'obtenir le résultat consisterait à démontrer que deux courants aléatoires indépendants en dimension 3 s'intersectent avec grande probabilité (ce qui serait en accord avec le comportement attendu pour des marches aléatoires).

Conjecture 4.13. Il existe $c > 0$ tel que, pour tous $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}^3$,

$$\mathbb{P}_{\beta_c}^{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}}(x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbf{C}_{\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}}(x_1)) \geq c.$$

4.3.2. *Trivialité en régime sur-critique.* Pour $x \in \mathbb{Z}$, on

$$\sigma_x^t := \sigma_x - m(\beta)$$

où

$$m(\beta) = \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+.$$

On peut se demander si les limites d'échelles du champ $(\sigma_x^t)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ se comportent comme des champs Gaussiens ou non. Plus précisément, on définit pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, $L \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\beta > \beta_c$,

$$T_{f,L,\beta}^t(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_L^t(\beta)}} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f\left(\frac{x}{L}\right) \sigma_x^t$$

où

$$\Sigma_L^t(\beta) := \left\langle \left(\sum_{x\in\Lambda_L} \sigma_x^t \right)^2 \right\rangle_\beta^+ = \sum_{x,y\in\Lambda_L} \left\langle \sigma_x^t \sigma_y^t \right\rangle_\beta^+.$$

Comme pour le cas sous-critique, on se demande si les variables $T_{f,L,\beta}^t(\sigma)$ adoptent un comportement Gaussien lorsque le paramètre L varie. On peut d'ailleurs introduire une longueur de corrélation en régime sur-critique $\xi(\beta)$ pour $\beta > \beta_c$ (voir [8]), ce qui permet de formuler la conjecture suivante :

Conjecture 4.14. Soit $d \geq 4$. Il existe $C(f,z,d) > 0$ et $\varphi_d : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\varphi_d(u) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tels que pour tout $\beta \geq \beta_c$, $L \leq \xi(\beta)$, $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et $z \in \mathbb{R}$,

$$\left| \left\langle \exp\left(z T_{f,L,\beta}^t(\sigma) \right) \right\rangle_\beta^+ - \exp\left(\frac{z^2}{2} \langle T_{f,L,\beta}^t(\sigma)^2 \rangle_\beta^+ \right) \right| \leq C(f,z,d)\varphi_d(L).$$

Il y a de nombreuses difficultés techniques supplémentaires par rapport au cas sous-critique. Déjà, on ne dispose plus de l'annulation des fonctions de Schwinger d'ordre impair. Plus précisément, on doit obtenir un contrôle des quantités

$$S_{2n+1}(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = \left\langle \sigma_{x_1}^t \ldots \sigma_{x_{2n+1}}^t \right\rangle_\beta^+.$$

De plus, on ne dispose pas (a priori) d'un résultat du même genre que 4.9, ce qui rend l'étude plus technique.

5. Quelques questions ouvertes

Question 5.1. Dans [5], les auteurs ont démontré que la mesure de percolation $\mathbf{P}_\beta$ (qui n'est autre que la mesure image de $\mathbb{P}_\beta^\emptyset \otimes \mathbb{P}_\beta^{\emptyset,+}$ par l'application $\mathbf{n} \mapsto \widehat{\mathbf{n}}$), obtenue à partir d'un système de deux courants indépendants sans sources (l'un construit avec conditions aux bord libres et l'autre avec conditions au bord positives), présente un phénomène de transition de phase à β_c pour l'existence d'une composante connexe infinie. Est-ce que la mesure de percolation $\mathbf{P}_\beta^\#$ (avec $\# \in \{\text{free}, +\}$), qui n'est autre que la mesure image de $\mathbb{P}_\beta^\emptyset$ ou $\mathbb{P}_\beta^{\emptyset,+}$ par l'application $\mathbf{n} \mapsto \widehat{\mathbf{n}}$, présente elle aussi un phénomène de transition de phase ? Si la réponse est positive, la transition de phase a-t-elle lieu à β_c ?

Question 5.2. On peut se poser des questions sur la géométrie de la composante connexe infinie du modèle de percolation construit avec la mesure $\mathbf{P}_\beta$ (si elle existe). Par exemple, pour $\beta > \beta_c$, est-ce que l'unique composante connexe infinie a une extrémité $\mathbf{P}_\beta$-presque sûrement ?

Question 5.3. Plusieurs inégalités de corrélation disponibles pour le modèle d'Ising (inégalités de Griffiths) peuvent être obtenues en utilisant la représentation en courant aléatoire avec l'exception notable de l'inégalité FKG. On peut se demander si, à l'instar du modèle de FK-percolation, la représentation en courant aléatoire dispose de certaines propriétés de monotonie. Par exemple, étant donnés $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ finis, l'application

$$\beta \mapsto \mathbb{P}_\beta^{\emptyset,\emptyset}\left(A \overset{\widehat{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}}{\leftrightarrow} B\right)$$

est-elle croissante ?[6] ?

Question 5.4. On a vu que l'on pouvait obtenir la valeur de l'exposant critique de la susceptibilité pour les grandes dimensions ($d \geq 5$). En dimension $d = 4$, on s'attend à avoir encore un exposant égal à 1 avec une correction logarithmique. Est-il possible de déterminer cette correction ?

References

[1] *Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction.* Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

[2] Michael Aizenman. Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models. part I and II. *Communications in Mathematical Physics*, 1982.

[3] Michael Aizenman, Daniel Barsky, and Roberto Fernandez. The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *Journal of statistical physics*, 1987.

[4] Michael Aizenman and Hugo Duminil-Copin. Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and ϕ_4^4 models. 2019.

[5] Michael Aizenman, Hugo Duminil-Copin, and Vladas Sidoravicius. Random currents and continuity of Ising model's spontaneous magnetization. *arXiv:1311.1937*, 2013.

[6] Michael Aizenman and Roberto Fernandez. On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional Ising models. *Journal of statistical physics*, 1986.

[7] Hugo Duminil-Copin, Maxime Gagnebin, Matan Harel, Ioan Manolescu, and Vincent Tassion. Discontinuity of the phase transition for the planar random-cluster and Potts models with q>4. *arXiv:1611.09877*, 2016.

[8] Hugo Duminil-Copin, Subhajit Goswami, and Aran Raoufi. Exponential decay of truncated correlations for the Ising model in any dimension for all but the critical temperature. *arXiv:1808.00439*, 2019.

[9] Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model. 2018.

[10] Jürg Fröhlich. On the triviality of $\lambda\phi_d^4$ theories and the approach to the critical point in $d_{(-)} > 4$ dimensions. *Nuclear Physics B, Volume 200, Issue 2, Pages 281-296*, 1982.

[11] Jürg Fröhlich, Barry Simon, and Thomas Spencer. Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking. *Communications in Mathematical Physics Volume 50, Number 1, 79-95.*, 1976.

[12] Elliott H. Lieb. A refinement of Simon's correlation inequality. *Commun.Math. Phys. 77, 127-135*, 1980.

[13] Barry Simon. Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets. *Commun.Math. Phys. 77, 111–126*, 1980.

[6]Notons que c'est bien le cas lorsque $A = \{x\}$ and $B = \{y\}$.