Introduction au domaine de recherche : Equations Différentielles Stochastiques (EDS) non-linéaires au sens de McKean et Vlasov

yoan.tardy

May 2019

Table des matières

1 Introduction

L'étude des équations différentielles stochastiques est un outil important dans la compréhension de nombreux phénomènes physique, en cela qu'il s'agit grossièrement parlant d'équations différentielles dans laquelle on peut faire intervenir l'aléa comme paramètre du système, permettant la prise en compte de l'agitation thermique dans certains cas par exemple. Cela dit, ce type d'équation ne sert pas uniquement à tirer des conclusions dans des problèmes intrinsèquement aléatoires, elles permmettent de manière non triviale d'apporter un éclairage sur l'étude de problèmes purement déterministes. C'est ce que nous allons voir à travers cette introduction au domaine des EDS non linéaires au sens de McKean et Vlasov, équations qui jouent dans de bons cas l'analogue stochastique de certaines EDP mettant en jeu un phénomène de diffusion, avec l'avantage d'un point de vue probabiliste permettant certains raisonnements plus intuitifs. Nous verrons plus précisément l'exemple de l'équation de Keller-Segel, EDP modélisant le phénomène biologique de chimiotaxie, c'est à dire le phénomène par lequel plusieurs bactéries dirigent leur mouvements en fonction de certaines espèces chimiques présentent dans leur environnement.

2 Brève introduction aux intégrales stochastiques et aux EDS

2.1 Intégrale stochastique et formule d'Ito

L'obstacle majeur pour définir une EDS est de pouvoir donner formellement un sens à la dérivée du mouvement brownien (ou d'une martingale), ou de manière équivalente donner un sens à l'intégration d'une fonction contre un mouvement brownien (ou une martingale), ce qui paraît absurde dans un premier temps étant donné que le mouvement brownien est presque sûrement non dérivable en tout point. On introduit alors l'intégrale d'une fonction contre une martingale par la première idée naturelle : on fait converger une somme de Riemann. Cela marche pour des fonctions simples dites en escalier, puis cet espace de fonction est assez riche pour pouvoir étendre la définition d'intégrale stochastique par densité dans L^2 et de récupérer une grande partie des résultats intuitifs des intégrales comme la relation de Chasles ou la linéarité par exemple.

La seule condition additionnelle par rapport au cas déterministe que nous n'allons pas étudier en profondeur est qu'il faut que l'intégrande soit "adapté" à la variable par rapport à laquelle on intégre, c'est-à-dire, si on pose $\mathscr{F}_t = \sigma(M_s, s \leq t)$, alors H est adapté à la filtration $\mathscr{F}_t$ si $\forall t \geq 0, H_t$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

Si on prend M une martingale et H un processus adapté à la filtration de M, on note alors l'intégrale de H contre M :

$$\int_0^t H_s dM_s$$

Maintenant que l'on a définit une intégrale stochastique, on aimerait qu'elle vérifie une version du théorème fondamental de l'analyse.

Définissons maintenant le crochet d'une martingale M.

Lemme : Si M, N sont des martingales continues bornées, si l'on prend $0 \leq t_1^n \leq ... \leq t_{p_n}^n$ une suite de subdivision de $[0, T]$ dont le pas tend vers 0, alors la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} (M_{t_{i+1}^n \wedge t} - M_{t_i^n \wedge t})(N_{t_{i+1}^n \wedge t} - N_{t_i^n \wedge t})$$

existe dans L^2 et définit pour $t \leq T$ un processus croissant, continu, adapté, noté $< M, N >$.

On défini alors le crochet d'une martingale M par :

$$< M > := < M, M >$$

Définition : Une semi martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique tel qu'il existe une martingale $(M_t)_{t\geq 0}$et un processus à variation finie $(V_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$X_t = M_t + V_t$$

Avec les mêmes notations, on définit $< X >:=< M >$.

Lemme d'Itô : Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et X_t une semi-martingale. Alors,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_x)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X >_s$$

Il s'agit de l'analogue stochastique d'une formule de Taylor, la différence avec le cas déterministe est l'ajout d'un processus à variation fini faisant intervenir le crochet de la partie martingale de X, il est intéressant de noter que s'il n'y a plus de martingale on retrouve alors la formule dans le cas déterministe.

On peut élargir cette formule aux dimensions suppérieurs : si $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $X^1, ...X^d$ d semi-martingales, alors en posant $X = (X^1, ..., X^d)$ on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{1\leq i,j\leq d} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s)d < X^i, X^j >_s$$

2.2 EDS

On peut alors définir ce qu'est une EDS. On dit qu'il y a existence faible pour $E_x(\sigma, b)$ où σ et b sont deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans respectivement $\mathbb{R}^{n^2}$ et $\mathbb{R}^n$ si il existe un univers de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{\mathbb{P}})$, un mouvement brownien $\tilde{B} = (\tilde{B}^1, ..., \tilde{B}^n)$ de dimension n et un processus aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$X^i(t) = x + \int_0^t \sum_{j=1}^n \sigma(X(s))_{i,j} d\tilde{B}^j_s + \int_0^t b^i(X(s))ds$$

La partie intégrale déterministe à droite de l'équation s'appelle traditionnellement le "drift".

On dit qu'il y a existence forte pour $E_x(\sigma, b)$ si l'on peut trouver un processus vérifiant l'équation ci-dessus pour n'importe quel univers de probabilité et n'importe quel mouvement brownien fixés à l'avance

On dit qu'il y a unicité faible pour $E_x(\sigma, b)$ si pour toute solution faible X, Y de $E_x(\sigma, b)$, X et Y ont la même loi.

On dit qu'il y a unicité forte (ou trajectorielle) si pour toute solutions X, Y données sur un même espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$ avec un même mouvement brownien, on a $X = Y$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Notons l'existence du théorème suivant qui a son équivalent dans le cas déterministe :

L'EDS $E_x(\sigma, b)$ où σ et b sont bornés et lipschitzienne admets l'existence forte et l'unicité trajectorielle.

La preuve est essentiellement la même que dans le cas déterministe, il s'agit d'un argument de point fixe.

3 Equations Différentielles Stochastiques non linéaires

3.1 Généralités et lien avec les EDP

Nous allons ici nous intéresser à un type d'EDS, non linéaires dans le sens où l'équation fait intervenir la loi du processus. On peut les décrire grossièrement comme les équations de la forme

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \int \sigma(X(s), u)\mu_t(du)dB_s + \int_0^t b(X(s), u)\mu_t(du)ds \tag{1}$$

où, pour $t \geq 0$, μ_t est la loi de $X(t)$. nous intéresserons au cas où σ est constant égal à $\sqrt{2}$ (restriction qui correspond à regarder un phénomène de diffusion). On regarde alors l'équation :

$$X(t) = X(0) + \sqrt{2}B_t + \int_0^t b(X(s), u)\mu_t(du)ds \tag{2}$$

où $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bornée et lipschitzienne.

On peut associer à cette équation un générateur naturel :

$$L = \Delta + b.\nabla \tag{3}$$

En effet, par quelques manipulations formelles, on a par la formule d'Ito puis en passant à l'espérance pour f C^2 :

$$\mathbb{E}(f(X(t))) = \mathbb{E}(\int_0^t \int Lf(X(s))ds) \tag{4}$$

et donc, en supposant que μ_t a une densité pour tout t dérivable par rapport au temps :

$$\int f(x)\mu_t(dx) = \int_0^t \int Lf(x)\mu_s(dx)ds \tag{5}$$

et donc, en dérivant par rapport à t :

$$\int f(x)\frac{\partial \mu_t}{\partial t}dx = \int Lf(x)\mu_t dx \tag{6}$$

Ainsi, en faisant des intégrations par parties, et en posant pour f C^2 : $L^* = \Delta f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b^i}{\partial x_i} f + b.\nabla f$, on obtient,

$$\int f(x)\frac{\partial \mu_t}{\partial t}dx = \int f(x)L^*\mu_t dx \tag{7}$$

et ce, pour tout f régulière, on peut donc en déduire formellement que

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = L^*\mu_t \tag{8}$$

On remarque alors que la densité de la loi de la solution de l'EDS vérifie une EDP dont les coefficients sont naturellement reliés à ceux de l'EDS, on voit ici le lien entre ces deux domaines alors que la partie EDP ne contient à priori pas de problèmatique faisant intervenir de l'aléatoire. On peut être donc amené pour obtenir des résultats d'existence ou d'unicité à résoudre les questions d'existence ou d'uncité pour l'équivalent stochastique de l'équation. Nous allons étudier maintenant une méthode pour résoudre ces questions.

3.2 Méthode d'interaction de champs moyens

On considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$, le système de particules :

$$X^{i,N}(t) = X^{i,N}(0) + \sqrt{2}B_t^{i,N} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b(X^{i,N}, X^{j,N}) \tag{9}$$

où B est un mouvement brownien de dimension N. Etant donné que b est lipschitzienne, on a existence forte et unicité trajectorielle pour ce système d'équation.

Ainsi, on pose pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{X^{i,N}}$$

L'objectif est alors de montrer que la suite μ_N est tendue, car en général une limite d'une sous suite de $(\mu_N)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation non linéaire au moins dans un sens faible. En effet, si $f_1, ..., f_k, f$ sont assez régulières, on a pour tout $N \geq 1$, et $t_1 < ... < t_k < s < t$:

$$\int\int f_1(z_{t_1})...f_k(z_{t_k})(f(z_t) - f(z_s) - \int_s^t b(z_u, \tilde{z}_u).\nabla f(z_u)du - \int_s^t \Delta f(z_u)du)\mu_N(dz)\mu_N(d\tilde{z})$$
$$\to \int\int f_1(z_{t_1})...f_k(z_{t_k})(f(z_t) - f(z_s) - \int_s^t b(z_u, \tilde{z}_u).\nabla f(z_u)du - \int_s^t \Delta f(z_u)du)\mu(dz)\mu(d\tilde{z})$$

lorsque N tend vers l'infini.

Or,

$\mathbb{E}\left[\int\int f_1(z_{t_1})...f_k(z_{t_k})(f(z_t) - f(z_s) - \int_s^t b(z_u, \tilde{z}_u).\nabla f(z_u)du - \int_s^t \Delta f(z_u)du)\mu_N(dz)\mu_N(d\tilde{z})\right] = 0$

et donc, formellement encore, on a donc

$$\int\int f_1(z_{t_1})...f_k(z_{t_k})(f(z_t) - f(z_s) - \int_s^t b(z_u, \tilde{z}_u).\nabla f(z_u)du - \int_s^t \Delta f(z_u)du)\mu(dz)\mu(d\tilde{z}) = 0$$

De là, $f(X(t)) - \int_0^t \int b(X(s), z_s).\nabla f(X(s))\mu(dz)ds - \int_0^t \Delta f(X(s))ds$ est une martingale et ce pour tout f régulière, par le problème de martingale, X est solution de l'équation linéaire, d'où l'existence.

4 Exemple de l'équation de Keller-Segel

Nous allons introduire dans cette partie des résultats obtenus à partir des méthodes évoquées ici dans le cas de l'équation de Keller-Segel :

$$\partial_t f = \Delta_x f + \chi \mathrm{div}_x((K \star f_t)(x) f_t(x)) \tag{10}$$

Le symbole $\star$ désigne la convolée entre deux fonctions et $K(x) = -\frac{x}{\|x\|^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $K(0) = 0$. Cette équation modélise le déplacement par exemple de bactéries qui sécrètent des phéromones en se déplaçant qui attire les autres bactéries, l'attractivité du concentré chimique est d'autant plus intense que le paramètre χ est grand.

Les calculs des parties précédentes dans ce contexte indiquent que l'équation stochastique associée est la suivante :

$$X(t) = X(0) + \chi \int_0^t (K \star f_s)(X(s)) ds \tag{11}$$

Nous pouvons alors considérer l'équation associée à N particules :

$$X^{i,N}(t) = X^{i,N}(0) + \sqrt{2} B^i(t) + \frac{\chi}{N} \sum_{j=1}^{N} \int_0^t K(X^{i,N}(s) - X^{j,N}(s)) ds \tag{12}$$

pour $i = 1, ..., N$

On notera ici que la partie drift a une forte singularité en 0 et que donc les théorèmes d'existence et d'unicité classiques ne s'appliquent pas étant donné qu'ils recquièrent une condition de cointinuité lipschitz sur les coefficients. Cette singularité paraît de plus être une vraie difficulté, la quantité contenue dans K dans l'équation est appellée à tendre vers 0 car les particules sont appellées à s'attirer entre elles : la singularité à de fortes chances d'être visitée par le processus.

Il y a grossièrement 2 cas qui se distinguent : un cas sous-critique si $\chi \leq 4$ et sur-critique si $\chi \geq 4$. Dans le cas sous critiques, les particules ne s'attirent pas assez pour rentrer massivement en collision, on peut montrer que les collisions mettent en jeu au maximum 2 particules dans ce cas, et alors le drift est intégrable et on peut définir un processus solution comme nous le verrons juste après. Dans le cas sur-critique, les particules s'attirent plus et les collisions font intervenir plus de particules, et cela pose un problème dans la définition des solutions : c'était l'un des enjeux de ma préthèse.

4.1 Le cas sous-critique

L'idée est souvent la même face à ce genre d'équation, on éssaie de se ramener au cas où les coefficients sont lipschitziens pour pouvoir utiliser le théorème d'existence et d'unicité et espérer qu'on puisse définir une limite en un sens à définir qui aurait des chances d'être la solution de l'équation. Il y a une régularisation de l'équation naturelle ici, considèrons l'équation :

$$X^{\epsilon,l,i,N}(t) = X^{\epsilon,l,i,N}(0) + \sqrt{2} B_t^i - \chi \sum_{j=1}^{N} \int_0^t \frac{X^{\epsilon,l,i,N}(s) - X^{\epsilon,l,j,N}(s)}{\|X^{\epsilon,l,i,N}(s) - X^{\epsilon,l,j,N}(s)\|^2 + \epsilon} \phi_l(X^{\epsilon,l,N}(s)) ds \tag{13}$$

où $\phi_l(x_1, ..., x_N) = 0 \vee (2l(\min_{i,j,kdistincts} \|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_3\| + \|x_2 - x_2\|) - 1) \wedge 1$ qui vaut 1 si tous les triplets de particules sont au moins espacées de $\frac{1}{2l}$ et 0 si il existe un triplet de particules proches à $\frac{1}{4l}$ près. De plus, ϕ_l est une application lipschitzienne. Cette équation ayant ses coefficients lipschitiziens, elle admet une unique solution. L'idée est maintenant de faire tendre l vers l'infini et ϵ vers 0.

4.2 Le cas à 2 particules et unicité de la solution dans le cas sous-critique.

On s'intéresse maintenant à l'unicité dans le cas $N = 2$. Ce cas est particulièrement confortable car l'on remarque que $X^1 + X^2$ est un simple mouvement brownien indépendant de $D = X^1 - X^2$. Il suffit alors de prouver l'unicité pour le processus D qui vérifie une équation autonome :

$$D_t = D_0 + 2W_t - \frac{\chi}{2\pi} \int_0^t \frac{D_s}{\|D_s\|^2} ds$$

L'idée ici est que la norme et l'angle de ce processus se comportent comme des processus dont on connaît la loi.

La norme se calcule facilement via la formule d'Itô, si on pose $R_t = \frac{\|D_t\|^2}{4}$, alors,

$$R_t = R_0 + \int_0^t 2\sqrt{R_t} dW_s + (2 - \frac{\chi}{N})t$$

Ce qui est l'équation d'un processus d'un carré de Bessel de dimension $2 - \frac{\chi}{N}$, processus dont on connait la loi.

Il se trouve que la partie unitaire du processus est elle aussi connue, il s'agit moralement d'un mouvement brownien sur le cercle dont la vitesse de parcours du cercle augmente si R diminue.

L'unicité du cas à 2 particules est la clé pour traiter le problème de l'unicité dans le cas sous-critique, en effet la seule partie délicate dans le cas sous critique est de comprendre comment le système reste unique malgré les collisions qui visitent la singularité du drift, mais cette question est résolue dans le cas à 2 particules, il suffit de montrer rigoureusement qu'au voisinage d'une collision double, le processus se comporte comme un système comportant le problème à 2 particules et $N - 2$ browniens indépendants.