

Introduction au domaine de Recherche

Théorie d'Ornstein-Zernike dans les modèles de mécanique statistique et limites d'échelles browniennes en régime sous-critique.

Lucas D'Alimonte, sous la direction de Ioan Manolescu

Contents

1	Introduction	1
2	La théorie d'Ornstein-Zernike	2
2.1	Le modèle de la marche aléatoire auto-évitante	2
2.2	Le problème d'Ornstein-Zernike	3
2.3	Un aperçu de la preuve : la structure de renouvellement cachée.	4
3	Un point de vue géométrique : limite d'échelles de longues interfaces	5
4	Généralisations, conjectures	6
4.1	Le problème à plusieurs interfaces	7
4.2	Limites d'échelles dans les autres régimes	8

1 Introduction

L'étude rigoureuse des modèles probabilistes issus de la physique statistique prend naissance durant la période de l'après-guerre, avec la résolution par Onsager du modèle d'Ising en dimension 2 en 1944, et l'introduction par Broadbent et Hammersley du modèle de la *percolation de Bernoulli* en 1957. D'autres modèles, d'étude plus compliquée, tels que la FK-percolation (1969) ou le modèle de Potts, voient le jour quelques années plus tard. Mais l'âge d'or de l'étude de ces modèles se situe dans la décennie des années 80, avec des avancées notables et une étude systématique entreprise par des mathématiciens tels que Harry Kesten ou Michael Aizenman.

Ces modèles, possédant évidemment des spécificités qui leurs sont propres, sont étudiés par les physiciens pour modéliser des propriétés des matériaux telles que le ferromagnétisme chez les métaux (pour le modèle d'Ising), la porosité des minéraux

(la percolation) ou encore les comportement d'interfaces chez les polymères (pour la marche aléatoire auto-évitante). Une des particularités notables de ces modèles - qui leur confère à la fois un extraordinaire intérêt mathématique et un charme certain - est d'exhiber une *transition de phase*. Ainsi, en faisant varier continûment un paramètre physique, la plupart du temps la température du système, on observe subitement un changement de comportement drastique à l'échelle macroscopique : présence d'une magnétisation spontanée pour le modèle d'Ising ou percolation pour le modèle de Bernoulli par exemple.

Ainsi, ces modèles exhibent trois régimes distincts, en fonction du paramètre précédemment évoqué : les régimes sous-critique, sur-critique, et critique (lorsque le paramètre est exactement égal au paramètre de changement de phase). Si les deux premiers régimes sont relativement bien connus et étudiés, l'étude du régime critique demeure encore très incomplète, et constitue assurément l'un des plus grands défis de la physique statistique et mathématique, même pour les modèles les plus simples, tels que la percolation de Bernoulli.

Cette Introduction au domaine de recherche présente en quelques pages la théorie d'Ornstein-Zernike, une étude rigoureuse du comportement asymptotique des fonctions de corrélations en régime sous-critique.

2 La théorie d'Ornstein-Zernike

2.1 Le modèle de la marche aléatoire auto-évitante

Dans toute la suite de cette Introduction au domaine de Recherche, on se placera dans le contexte du modèle de la marche aléatoire auto-évitante, et on expliquera comment les résultats peuvent s'adapter aux autres modèles.

On fixe $d \geq 2$ un entier, et on se place sur le réseau hypercubique de dimension d , $(\mathbb{Z}^d, E(\mathbb{Z}^d))$ où les arêtes du réseau sont les couples de points (x, y) tels que $\|x - y\|_2 = 1$.

Définition 2.1. Soit N un entier. Une marche auto-évitante ω de longueur N est une suite de points de \mathbb{Z}^d , $(\omega(0), \dots, \omega(N))$ tels que pour tout $0 \leq i \leq N - 1$, $\|\omega(i + 1) - \omega(i)\|_2 = 1$, et :

$$\forall 0 \leq i \neq j \leq N, \omega(i) \neq \omega(j).$$

L'ensemble des marches auto-évitanes de longueur N issues de 0 sera noté SAW_N . La longueur N de ω sera notée $|\omega|$

L'objet de notre étude est la **fonction de corrélation à 2 points**.

Définition 2.2. Soit $\beta > 0$: on définit, pour tout point $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$G_\beta(x) = \sum_{\omega: 0 \rightarrow x} e^{-\beta|\omega|},$$

où la somme porte sur l'ensemble des marches autoévitanes reliant 0 à x .

Un argument combinatoire - dit argument de Peierls dans le modèle d'Ising - montre l'existence d'un paramètre critique $\beta_c \in]0, \infty[$, dépendant uniquement de la dimension, tel que :

- Si $\beta > \beta_c$, alors pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $G_\beta(x) < \infty$ (phase sous-critique),
- Si $\beta < \beta_c$, alors pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $G_\beta(x) = \infty$ (phase surcritique).

En phase sous-critique, la phase qui nous intéressera dans cette étude, on peut alors naturellement définir une mesure de probabilité - la mesure de Gibbs associée - sur l'ensemble des marches auto-évitantes issues de 0. Ainsi, on définit la mesure suivante :

Définition 2.3. Soit $\beta > \beta_c$. On note \mathbb{P}_β la mesure de probabilité sur l'ensemble des marches autoévitantes telle que pour toute marche ω ,

$$\mathbb{P}_\beta(\omega) \propto e^{-\beta|\omega|}. \quad (2.1)$$

Remarque 2.4. A la lumière de cette définition, $G_\beta(x)$ prend un sens plus probabiliste : il s'agit à une constante multiplicative près de la probabilité que 0 soit relié à x par une marche aléatoire auto-évitante tirée selon \mathbb{P}_β . Ainsi, on comprend sa dénomination de *fonction de corrélation*. L'analogue dans les modèles de référence de physique statistique serait par exemple $\mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow x]$ en percolation de Bernoulli, ou $\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle$ dans le modèle d'Ising.

2.2 Le problème d'Ornstein-Zernike

Un des problèmes fondamentaux dans l'étude de tels modèles est l'étude de la décroissance des corrélations. Autrement dit, quel est le comportement de $G_\beta(x)$ (ou des quantités analogues introduites précédemment) lorsque $\|x\|_2 \rightarrow \infty$? On va voir dans un premier temps que ces quantités décroissent toujours au moins exponentiellement en la norme, puis on expliquera le théorème d'Ornstein-Zernike qui permet d'avoir une asymptotique bien plus précise que cette décroissance exponentielle.

Proposition 2.5 (Existence de la longueur de corrélation). *Soit $\beta > \beta_c$. Pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ (la sphère unité de \mathbb{R}^d), la limite suivante existe, et est finie et non nulle (on désigne par $\lfloor nx \rfloor$ le point dont les coordonnées sont les parties entières de celles de nx):*

$$\tau(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log G_\beta(\lfloor nx \rfloor).$$

On l'appelle la longueur de corrélation inverse. De plus, il existe $C > 0$ telle que l'inégalité suivante soit vérifiée pour tout n suffisamment grand :

$$e^{-n\tau(x)} \leq G_\beta(nx) \leq Ce^{-n\tau(x)}.$$

La preuve de cette proposition repose sur un argument classique en théorie des probabilités et en combinatoire, à savoir le lemme de Fekete (ou lemme sous-additif). En effet, un argument de concaténation donne immédiatement :

$$G_\beta(\lfloor (n+m)x \rfloor) \geq G_\beta(\lfloor nx \rfloor)G_\beta(\lfloor mx \rfloor).$$

Le lemme sous-additif peut alors s'appliquer pour conclure à l'existence de cette limite. Les inégalités énoncées s'obtiennent comme conséquence du lemme sous-additif et de majorations combinatoires.

Ainsi à ce stade nous avons établi la décroissance exponentielle des corrélations dans le modèle de la marche aléatoire auto-évitante. Le théorème d'Ornstein-Zernike permet d'affiner cette estimation, pour obtenir un équivalent de $G_\beta(x)$ lorsque $\|x\|_2 \rightarrow \infty$.

Théorème 2.6 (Ornstein-Zernike). *Soit $d \geq 2$ un entier, et $\beta > \beta_c$. Il existe deux fonctions $\psi, \tau : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$, analytiques et bornées loin de 0 telles que, uniformément en n ,*

$$G_\beta(\lfloor nx \rfloor) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{2\pi n^{d-1}}} e^{-n\tau(x)} (1 + o(1))$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Remarque 2.7. Ce théorème a été démontré pour la première fois dans une version incomplète par Chayes et Chayes en 1986, et par Ioffe dans la forme énoncée en 1998. Comme expliqué précédemment, le théorème reste vrai pour la percolation de Bernoulli et pour le modèle d'Ising en remplaçant $G_\beta(x)$ par $\mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow x]$ ou $\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle$.

2.3 Un aperçu de la preuve : la structure de renouvellement cachée.

On va donner un aperçu de la preuve, car la technique est extrêmement robuste et peut s'adapter aux autres modèles. Il s'agit en fait de coupler l'ensemble de certains points d'une longue marche aléatoire auto-évitante avec une "vraie" marche aléatoire orientée, processus dont l'étude est bien plus aisée.

Le théorème fondamental, qui permet la dérivation des estimations d'Ornstein-Zernike, est un théorème de représentation des corrélations en fonction de la probabilité d'un certain événement pour une marche aléatoire orientée.

Par simplicité et pour éviter des complications techniques inutiles dans ce document, on se place dans le cas où $x = \vec{e}_1$, c'est-à-dire dans le cas de la formule d'Ornstein-Zernike. Par ailleurs, dans un souci de rigueur, le théorème suivant fait intervenir une *fonction de corrélation cylindrique* $B_\beta(x)$, qu'on ne définira pas rigoureusement. Le seul fait important est que B_β et G_β ont le même comportement asymptotique, donc l'étude de G_β est équivalente à celle de B_β .

Théorème 2.8. *Il existe une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ telle que si X_1, X_2, \dots est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi ν , et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est la marche aléatoire associée, on ait l'égalité suivante pour tout $(n, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{d-1}$:*

$$e^{n\tau(\vec{e}_1)} B_\beta(n\vec{e}_1) = \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}, S_k = n\vec{e}_1).$$

Ce théorème repose sur l'idée suivante : prenons une marche aléatoire auto-évitante conditionnée à relier 0 à $n\vec{e}_1$. On va définir la notion de points de renouvellement de cette marche, et montrer que la loi du processus de ces points de renouvellement est la loi d'une certaine marche aléatoire orientée.

Définition 2.9. Soit ω une marche auto-évitante de longueur N . On appelle **point de renouvellement** tout indice $0 \leq i \leq N$ tel que :

$$\forall k \leq i, \omega_1(k) \leq \omega_1(i) \text{ et } \forall j > i, \omega_1(i) < \omega_1(j).$$

De plus une marche aléatoire ne possédant pas de point de renouvellement sera appelée **irréductible**.

Remarque 2.10. Prenons une marche auto-évitante issue de 0. Il est facile de voir qu'une telle marche peut être décomposée de manière unique comme la concaténation d'un certain nombre de marches auto-évitantes irréductibles. En ce sens, ces dernières jouent un rôle analogue à des "facteurs premiers" pour les marches auto-évitantes.

Ce processus des points de renouvellement est crucial dans l'étude des marches aléatoires auto-évitantes car on peut démontrer que c'est un processus Markovien à accroissements stationnaires et indépendants, autrement dit une marche aléatoire dirigée dans la direction \vec{e}_1 .

Une fois qu'on a ce théorème de représentation, le dernier ingrédient pour obtenir le théorème d'Ornstein-Zernike est d'obtenir des estimations pour les quantités

$$\mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}, S_k = n\vec{e}_1)$$

apparaissant dans le théorème de représentation en marche aléatoire.

Cet ingrédient est le théorème central limite local, qui nous permet d'obtenir des équivalents Gaussiens de telles probabilités :

Proposition 2.11. Soit ν une loi de probabilité sur \mathbb{R}^d possédant un moment exponentiel, et telle que $\nu(\vec{e}_1) > 0$ et soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire dont les incréments sont indépendants de loi ν . Alors il existe $C > 0$ telle que lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}, S_k = n\vec{e}_1) = \frac{C}{\sqrt{(2\pi n)^{d-1}}} (1 + o(1)).$$

Remarque 2.12. La constante C apparaissant dans la proposition précédente est explicite et peut se calculer en fonction de l'espérance de ν ainsi que du déterminant de sa matrice de covariance.

Le théorème d'Ornstein-Zernike - dans sa version locale $x = \vec{e}_1$ - s'obtient alors comme conséquence de ces estimations.

3 Un point de vue géométrique : limite d'échelles de longues interfaces

On s'intéresse à un pendant géométrique du problème d'Ornstein-Zernike : donnons-nous, en régime sous-critique, une marche aléatoire conditionnée à atteindre un point distant, par exemple $n\vec{e}_1$. Rappelons-nous que c'est un événement extrêmement improbable sur lequel on conditionne, car en régime sous-critique les marches typiques ont une longueur majorée par une constante avec une probabilité exponentiellement grande. Ce type de considérations provient de la physique statistique, et peut servir

par exemple à modéliser un polymère dans un solvant. La question qui nous intéresse est la suivante : quelle est la forme typique d'une telle interface ? Lors de notre travail de M2, nous avons démontré qu'avec une renormalisation de l'ordre de n dans la direction \vec{e}_1 et de l'ordre de \sqrt{n} dans les autres directions, la limite d'échelle qui apparaît est le **pont brownien** entre 0 et 1. Ainsi, on observe typiquement une courbe qui présente des fluctuations d'ordre \sqrt{n} autour de la géodésique reliant 0 à $n\vec{e}_1$. Le théorème démontré en toute généralité est le suivant :

Théorème 3.1. *Soit $d \geq 2$ une dimension et $\beta > \beta_c$. Soit (ω^n) une suite de variables aléatoires de loi $\mathbb{P}_\beta(\bullet | 0 \rightarrow n\vec{e}_1)$ (on conditionne chaque ω^n à relier 0 à $n\vec{e}_1$). Alors il existe $\mu > 0, C > 0$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ tels que :*

$$\left[\frac{1}{n} \omega_1^n(\lfloor \frac{Cnt}{\mu} \rfloor), \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_2^n(\lfloor \frac{Cnt}{\mu} \rfloor), \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_d^n(\lfloor \frac{Cnt}{\mu} \rfloor) \right]_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (t \rightarrow \mu t, M \times B_t^{d-1})_{0 \leq t \leq 1},$$

où on a écrit notre processus dans les d coordonnées de la base canonique de \mathbb{R}^d , et où B^{d-1} désigne le processus du pont Brownien dans \mathbb{R}^{d-1} . La convergence est la convergence faible dans l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^d , équipé de la topologie de la convergence uniforme.

Remarque 3.2. Il est crucial de noter que la première coordonnée ne joue pas le même rôle que les $d-1$ autres : ainsi, la première coordonnée spatiale jouera le rôle du temps dans la limite d'échelle, tandis que les $d-1$ autres jouent le rôle de coordonnées spatiales. Le théorème a été écrit dans la direction \vec{e}_1 par souci de simplicité, mais il s'adapte sans peine dans le cas d'une direction quelconque $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, à un changement de base près.

Encore une fois l'ingrédient principal dans la démonstration de ce théorème est le théorème 2.8, dans une forme légèrement plus forte : on peut démontrer l'existence d'un couplage entre le processus des points de renouvellement précédemment évoqué, et la marche aléatoire considérée. Ainsi, il s'agit de montrer la convergence d'une marche aléatoire orientée, conditionnée à toucher un point lointain et convenablement renormalisée vers un pont Brownien. Il s'agit donc d'une version conditionnelle et un peu plus complexe du théorème de Donsker !

Une fois ce travail effectué il reste à montrer que la marche aléatoire "se concentre" autour de ses points de renouvellement, mais c'est une conséquence de la décroissance exponentielle en régime sous-critique.

Ce théorème ne figurait pas à notre connaissance dans la littérature (même si le résultat est évoqué dans plusieurs articles), et constitue donc le résultat principal de notre travail de M2. Il implique que les interfaces en régime sous-critique appartiennent à la classe d'universalité gaussienne, et de plus il peut probablement s'adapter sans trop de difficultés au cas d'une interface sous-critique dans le modèle d'Ising ou en percolation de Bernoulli.

4 Généralisations, conjectures

On présente ici plusieurs conjectures et généralisations, afin de mettre ce travail dans la perspective de recherche actuelle.

4.1 Le problème à plusieurs interfaces

Une première généralisation naturelle est de construire un problème à plusieurs interfaces au lieu d'une seule.

Ainsi, considérons un système de m marches aléatoires auto-évitantes, conditionnées à relier 0 à $n\vec{e}_1$ et à ne pas s'intersecter. Quelle est la forme typique d'un tel système, et peut-on avoir des estimations sur sa fonction de corrélation ? Nous avons formulé la conjecture naturelle que la limite d'échelle d'un tel système est *la pastèque brownienne* - nommée ainsi par Alan Hammond : un système de m ponts browniens conditionnés à ne pas s'intersecter. La difficulté dans un tel résultat est d'établir un couplage entre le processus des points de régénération de ces m marches, et un système de m marches aléatoires conditionnées à ne pas s'intersecter (un résultat analogue au théorème 2.8). Dans le cas particulier de 2 marches, des calculs de probabilités de non-intersection de marches aléatoires nous ont conduit à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 4.1. Soient x_1, x_2 deux points de $\{0\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$. On définit la *fonction de corrélation modifiée à 4 points* par :

$$\tilde{G}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\substack{\omega^1: x_1 \rightarrow x_2 \\ \omega^2: x_3 \rightarrow x_4 \\ \omega^1 \cap \omega^2 = \emptyset}} e^{-\beta(|\omega^1| + |\omega^2|)}.$$

Alors il existe $c, C > 0$ tels qu'on dispose de l'estimation suivante :

$$\frac{c}{f(n)} e^{-2n\tau_\beta(\vec{e}_1)} \leq \tilde{G}(x_1, x_2, x_1 + n\vec{e}_1, x_2 + n\vec{e}_1) \leq \frac{C}{f(n)} e^{-2n\tau_\beta(\vec{e}_1)},$$

avec

$$f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{si } d = 2 \\ (n \log n)^2 & \text{si } d = 3 \\ n^{d-1} & \text{si } d \geq 4. \end{cases}$$

Remarque 4.2. Considérons un instant la fonction de corrélation obtenue en relâchant la contrainte de non-intersection dans la somme définissant \tilde{G} : elle se factorise naturellement comme un produit $G(x_2 - x_1)G(x_4 - x_3)$. Ainsi, si on voulait obtenir son comportement asymptotique lorsque $\|x_2\|_2, \|x_4\|_2 \rightarrow \infty$, on obtiendrait le carré de l'estimée d'Ornstein-Zernike. Cette conjecture présente plusieurs éléments intéressants : le premier aspect est que l'exposant qui régit la décroissance exponentielle est le même que si on considérait des systèmes de marches en relâchant la condition de non-intersection, c'est à dire $2\tau(\vec{e}_1)$. Nous n'avons pas connaissance d'une preuve simple de ce résultat qui semble pourtant plus facile. Le second aspect intéressant de cette conjecture est que le comportement d'un tel système est très dépendant de la dimension considérée. Ainsi, en dimension supérieure à 4, la fonction \tilde{G} se comporte comme G^2 , ce qui signifie que la contrainte de non-intersection ne change pas asymptotiquement le comportement du système. On pouvait s'y attendre car en dimension supérieure à 4, deux marches aléatoires dirigées du type de celles considérées ne s'intersectent pas presque sûrement.

4.2 Limites d'échelles dans les autres régimes

Dans une volonté d'inscrire notre travail dans une perspective de recherche actuelle, présentons ici une conjecture due à Duminil-Copin, Kozma et Yadin.

Donnons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine simplement connexe, et deux points marqués $a, b \in \partial\Omega$ (on pourra trouver le terme de "Domaine de Dobrushin" dans la littérature). Pour tout $\delta > 0$, on considère la version discrétisée de notre domaine $\Omega_\delta = \Omega \cap \delta\mathbb{Z}^d$, et a_δ, b_δ les deux points de Ω_δ les plus proches (pour la norme euclidienne) de a et b . Comme le nombre de marches auto-évitantes reliant a_δ à b_δ dans Ω_δ est fini (on travaille avec un domaine de volume fini), la loi définie par l'équation (2.1) est maintenant définie **pour toute** valeur de $\beta > 0$. L'idée est donc de tirer une suite de marches auto-évitantes ω_δ selon cette loi, conditionnellement au fait de relier a_δ et b_δ , et d'étudier l'éventuelle limite d'échelle lorsque $\delta \rightarrow 0$. Evidemment, le comportement dépend de d et de la valeur de β . Passons en revue les différents comportements, démontrés ou conjecturés.

- Lorsque $\beta > \beta_c$ (le régime sous-critique). Le travail effectué précédemment montre que dans la limite $\delta \rightarrow 0$, la courbe limite obtenue est déterministe : il s'agit simplement de la géodésique pour la norme euclidienne reliant a à b . De plus, ce résultat est valable pour toute dimension $d \geq 2$, et on a également démontré que les fluctuations autour de cette géodésique sont d'ordre $\sqrt{\delta}$.
- Lorsque $\beta < \beta_c$ (le régime surcritique). Il est conjecturé que ω_δ devient "space-filling" lorsque $\delta \rightarrow 0$, au sens suivant :

$$\forall U \subset \Omega \text{ ouvert, } \mathbb{P}_\beta [\omega^\delta \cap U = \emptyset] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Ce résultat a été démontré par Duminil-Copin, Kozma et Yadin en dimension $d = 2$ ([[DCKY11](#)]). Une conjecture plus forte est que le modèle planaire (en dimension 2 donc) possède une limite d'échelle connue sous le nom de **SLE(8)**, une courbe aléatoire caractérisée par une équation différentielle stochastique.

En dimensions supérieures, il n'est pas clair qu'une limite d'échelle existe (ni même quel sens précis donner à cette assertion).

- Lorsque $\beta = \beta_c$. Il s'agit de loin du cas le plus difficile et d'un des résultats les plus convoités dans l'étude des marches aléatoires auto-évitantes : presque rien n'est connu sur le cas critique. Les comportements conjecturés varient selon la dimension considérée
 - En dimension $d = 2$, ω^δ est supposée converger vers le processus **SLE($\frac{8}{3}$)**. Le résultat le plus avancé (voir [[LSW02](#)]), est le suivant : *si la limite d'échelle existe et est conformément invariante*, alors c'est bien **SLE($\frac{8}{3}$)**. La difficulté principale est de démontrer l'invariance conforme du modèle.
 - La dimension $d = 3$ (physiquement la plus intéressante) est un vaste mystère : aucun candidat clair ne se dégage pour être la limite d'échelle du modèle, et les exposants de renormalisation ne sont pas connus.

- En dimension $d \geq 4$, la limite d'échelle devrait être le pont Brownien entre a et b . Ce résultat a été démontré en dimension $d \geq 5$ depuis les travaux de Hara et Slade sur la technique de la "Lace expansion" (voir [HS92], [BS85]). Le cas de la dimension $d = 4$, bien plus difficile, reste ouvert, même si de gros progrès ont été réalisés récemment en utilisant la technique dite du "groupe de renormalisation".

Cette série de conjectures est à ce jour un des principaux buts des mathématicien-ne-s travaillant sur ces modèles de physique statistique. En effet, les processus SLE sont relativement bien connus et étudiés. La dérivation des convergences présentées ci-dessus aurait alors pour conséquence immédiate la possibilité de réaliser des calculs exacts sur les modèles discrets - et par exemple la dérivation de tous les *exposants critiques* du modèle, un pas supplémentaire vers le phénomène d'universalité décrit par les physiciens.

References

- [BDCGS12] Roland Bauerschmidt, Hugo Duminil-Copin, Jesse Goodman, and Gordon Slade. Lectures on self-avoiding walks. *Clay Mathematics Proceedings*, 15, 06 2012.
- [BS85] David Brydges and Thomas Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 97(1-2):125–148, 1985.
- [CC86] J. T. Chayes and L. Chayes. Ornstein-Zernike behavior for self-avoiding walks at all noncritical temperatures. *Comm. Math. Phys.*, 105(2):221–238, 1986.
- [CCC91] Massimo Campanino, J. Chayes, and L. Chayes. Gaussian fluctuations of connectivities in the subcritical regime of percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 88:269–341, 09 1991.
- [CIV03] Massimo Campanino, Dmitry Ioffe, and Yvan Velenik. Ornstein-Zernike theory for finite range ising models above t_c . *Probability Theory and Related Fields*, 125:305–349, 02 2003.
- [CIV04] Massimo Campanino, Dmitry Ioffe, and Yvan Velenik. Random path representation and sharp correlations asymptotics at high-temperatures. In *Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*, pages 29–52, Tokyo, Japan, 2004. Mathematical Society of Japan.
- [CIV06] Massimo Campanino, Dmitry Ioffe, and Yvan Velenik. Fluctuation theory of connectivities for subcritical random cluster models. *The Annals of Probability*, 36, 11 2006.
- [DCKY11] Hugo Duminil-Copin, Gady Kozma, and Ariel Yadin. Supercritical self-avoiding walks are space-filling. *Annales de l’institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, 50, 10 2011.
- [DS94] R. Dobrushin and S. Shlosman. Large and moderate deviations in the Ising model. *Advances Sov.Math.*, 20:91–219, 01 1994.
- [GI05] Lev Greenberg and Dmitry Ioffe. On an invariance principle for phase separation lines. *Annales de l’Institut Henri Poincaré*, 41(5):871 – 885, 2005.
- [Gil03] Florent Gillet. Asymptotic behaviour of watermelons. 2003.
- [Gre01] D.R. Grey. Renewal theory. In *Stochastic Processes: Theory and Methods*, volume 19 of *Handbook of Statistics*, pages 413 – 441. Elsevier, 2001.
- [Gri99] G.R. Grimmett. *Percolation*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer, 1999.
- [Ham] Alan Hammond. Brownian regularity for the airy line ensemble, and multi-polymer watermelons in brownian last passage percolation.

- [HS92] Takashi Hara and Gordon Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. i. the critical behaviour. *Comm. Math. Phys.*, 147(1):101–136, 1992.
- [Iof98] Dmitry Ioffe. Ornstein-Zernike behaviour and analyticity of shapes for self-avoiding walks on d . *Mark. Proc. Rel. Fields*, 4:323–350, 1998.
- [Kov04] Yevgeniy Kovchegov. The Brownian bridge asymptotics in the subcritical phase of Bernoulli bond percolation model. *Markov Processes and Related Fields*, 2, 01 2004.
- [Lig68] Thomas M. Liggett. An invariance principle for conditioned sums of independent random variables. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 18(6):559–570, 1968.
- [LSW02] Gregory Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. On the scaling limit of planar self-avoiding walk. *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot*, 2, 05 2002.
- [MS13] Neal Madras and Gordon Slade. The self-avoiding walk. 01 2013.
- [OV18] Sébastien Ott and Yvan Velenik. Asymptotics of even-even correlations in the Ising model. *Probability Theory and Related Fields*, 04 2018.
- [Smi07] Stanislav Smirnov. Towards conformal invariance of 2d lattice models. *International Congress of Mathematicians*, 2, 08 2007.
- [Sta71] A. J. Stam. Renewal theory in r dimensions ii. *Compositio Mathematica*, 23(1):1–13, 1971.