Conjecture d'Artin sur les fonctions L

Xavier Davoust

Octobre 2022

Introduction

Nous chercherons dans cette Introduction au Domaine de Recherche à présenter l'origine et l'intérêt des fonctions L dont la conjecture d'Artin fait l'objet, puis à développer les différents résultats obtenus dans la démonstration de cas particuliers de cette conjecture.

I. Préliminaires

Symbole d'Artin et loi de réciprocité

Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{P}$ l'un des idéaux premiers de $\mathbb{L}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Notons $\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}$ et $\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}$ respectivement les groupes de décomposition et d'inertie associés à $\mathfrak{P}$.

Alors le groupe de Galois de l'extension de corps résiduels $\mathrm{Gal}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ est engendré par l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^{N(\mathfrak{p})}$ où $N(\mathfrak{p}) = N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) = \#(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$. De plus, il y a un isomorphisme entre $\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}/\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}$ et $\mathrm{Gal}(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. On peut donc relever le Frobenius par un élément de G modulo $\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}$ qu'on note $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{P}}\right)$. Comme le groupe de décomposition, celui d'inertie et le Frobenius, cet élément de G est indépendant à conjugaison près du choix de $\mathfrak{P}$. On appelle cette classe de conjugaison *symbole d'Artin de* $\mathfrak{p}$ *en* $\mathbb{L}$ et on la note $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{p}}\right)$. Plus généralement, pour $I = \prod(\mathfrak{p}_i)^{n_i}$, on pose $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{I}\right) = \prod \left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{p}_i}\right)^{n_i}$.

Si l'extension est abélienne, cette classe de conjugaison est réduite à un unique élément parfaitement déterminé par $\mathfrak{p}$. En notant $C_{\mathbb{K}}$ le groupe de classes d'idéaux de

$\mathbb{K}$ (c'est-à-dire le quotient du groupe des idéaux fractionnaires par celui des idéaux principaux), on peut alors établir un isomorphisme entre un certain quotient $C_{\mathbb{K}}/H$ et le groupe de Galois G. En effet, si H contient tous les premiers ramifiés (qui sont en nombre fini), alors on peut associer à tout élément de $C_{\mathbb{K}}/H$ son symbole d'Artin qui se trouvera alors dans G (puisque pour $\mathfrak{p}$ non ramifié, $\mathcal{I}_{\mathfrak{P}} = 1$).

Sur le même principe, et grâce à un passage par les corps locaux, on peut établir un isomorphisme entre un quotient du groupe de classes des idèles et le groupe de Galois G :

$$\phi_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} : \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})/\mathbb{K}^{\times} N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{L}})) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$$

où on définit la norme sur les idèles composante par composante : $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}((b_w)) = (\prod_{w|v} N_{\mathbb{L}_w/\mathbb{K}_v}(b_v))_v$.

C'est la loi de réciprocité d'Artin.

II. Différentes fonctions L

Fonction ζ de Riemann

Afin de mieux comprendre la répartition des nombres premiers, Georg Friedrich Bernhard Riemann créa sa fameuse fonction ζ, définie sur l'ensemble des complexes de partie réelle strictement supérieure à 1 par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Celle-ci peut être étendue en une fonction méromorphe dont le seul pôle est en 1. La fonction ainsi définie s'annule en tous les entiers pairs strictement négatifs ; ce sont les zéros triviaux. Mais on sait aussi qu'elle admet une infinité de zéros dans la bande critique $\Re z \in]0, 1[$; ce sont les zéros non triviaux. L'hypothèse de Riemann, qui à ce jour n'est toujours pas démontrée, affirme que tous les zéros non triviaux de la fonction ζ sont situés sur la droite d'équation $\Re z = \frac{1}{2}$.

Grâce au théorème fondamental de l'arithmétique, la fonction ζ de Riemann se factorise en produit eulérien (c'est-à-dire en produit infini indexé sur les nombres premiers) :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Riemann a l'idée de compléter la fonction ζ avec le facteur $\gamma(s) = \pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$. La fonction complétée $\Lambda(s) = \gamma(s)\zeta(s)$ vérifie alors l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$$

Fonctions L de Dirichlet

Une série est dite de Dirichlet si elle est de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

où $s \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeur dans $\mathbb{C}$. Si elle converge pour un s_0 donné, alors elle converge pour tout s tel que $\Re s \geq \Re s_0$.

La fonction ζ de Riemann est donc un cas particulier de série de Dirichlet. Afin d'obtenir un produit eulérien et une équation fonctionnelle, on considère les séries de Dirichlet définie par des caractères de Dirichlet. Un caractère sur un groupe fini G est simplement un morphisme de groupe vers $\mathbb{C}^*$. Un caractère de Dirichlet modulo n est un caractère sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ qu'on étend à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par la valeur 0 puis à $\mathbb{Z}$ tout entier par la surjection canonique. On le dit *principal* s'il vaut 1 sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. On remarque qu'un caractère de Dirichlet modulo n en induit un modulo m si m est un multiple de n, par composition avec la projection de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. On qualifie de primitif tout caractère de Dirichlet qui n'est induit par aucun autre caractère.

On peut définir, pour un caractère de Dirichlet χ, la fonction L de Dirichlet associée :

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Cette fonction se factorise en produit eulérien :

$$\prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

De plus, si χ est primitif, elle vérifie l'équation fonctionnelle suivant :

$$\Lambda(s,\chi) = (-i)^{\epsilon}\tau(\chi)n^{-s}\Lambda(1-s,\overline{\chi})$$

où $\Lambda(s,\chi) = \pi^{\frac{s+\epsilon}{2}}\Gamma(\frac{s+\epsilon}{2})L(s,\chi)$, ϵ est défini tel que $\chi(-1) = (-1)^\epsilon$ (donc vaut 0 ou 1), et $\tau(\chi)$ est la somme de Gauss de χ, c'est-à-dire $\sum_{m\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \chi(m)e^{2im\pi/n}$.

Toute fonction L de Dirichlet se prolonge en une fonction holomorphe si χ n'est pas principal et en une fonction méromorphe avec un unique pôle au point 1 sinon. L'hypothèse de Riemann généralisée affirme que les zéros d'une fonction L de Dirichlet dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1 sont tous de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

Ces fonctions L permirent à Dirichlet de démontrer son théorème de la progression arithmétique sur la répartition des nombres premiers, qui affirme que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout m premier avec n, il existe une infinité de nombres premiers congrus à m modulo n.

Fonctions ζ de Dedekind

Dedekind étendit l'idée de Riemann aux corps de nombres, en remplaçant les entiers naturels par les idéaux de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombre. On note pour tout idéal entier $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire tout idéal de son anneau des entiers $\mathcal{O}_\mathbb{K}$) :

$$N(\mathfrak{a}) = N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}_\mathbb{K}/\mathfrak{a})$$

On peut alors définir la fonction ζ de Dedekind associée à $\mathbb{K}$, qui se factorise en produit eulérien (grâce à la propriété de décomposition unique en produit de facteurs premiers des idéaux entiers) :

$$\zeta_\mathbb{K}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier non nul}} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

Elle vérifie elle aussi une équation fonctionnelle. En notant $[r_1, r_2]$ la signature de $\mathbb{K}$, $d_\mathbb{K}$ son discriminant, $\Lambda_\mathbb{K}(s) = |d_\mathbb{K}|^{\frac{s}{2}}\Gamma(s)^{r_1+r_2}\Gamma(s+1)^{r}_{2}\zeta(s)$, on a :

$$\Lambda_\mathbb{K}(s) = \Lambda_\mathbb{K}(1-s)$$

Une fonction ζ de Dedekind est prolongeable sur $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe avec un unique pôle simple en $s = 1$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mu_n)$ est un corps cyclotomique, alors sa fonction ζ se décompose en produit de fonctions L de Dirichlet :

$$\zeta(s) = \prod_{\chi} L(s,\chi)$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères primitifs modulo un diviseur de n. D'après le théorème de Kronecker-Weber, toute extension abélienne finie de $\mathbb{Q}$ est un sous-corps d'une extension cyclotomique. Sa fonction ζ s'écrit donc aussi comme produit de fonctions L de Dirichlet.

Fonctions L de Hecke

Il restait ensuite à créer pour les fonctions ζ de Dedekind l'analogue de ce qu'étaient les fonctions L de Dirichlet pour la fonction ζ de Riemann. Hecke a donc défini des caractères qui portent son nom sur les idéaux d'un corps de nombres. Deux définitions sont possibles. Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres.

Définition 1 *Un caractère de Hecke de $\mathbb{K}$ est un caractère continu unitaire du groupe de classes des idèles de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de $GL_1(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})/\mathbb{K}^{\times}$.*

En raison de la continuité du caractère de Hecke, et comme on peut trouver un voisinage de $\{1\}$ dans $\mathbb{C}$ qui ne contient pas d'autre sous-groupe de $\mathbb{C}$ que $\{1\}$, il existe un plus grand idéal $\mathfrak{m}$ tel que ce caractère annule toutes les idèles congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}$ (c'est-à-dire : dont les composantes v-adiques sont chacunes dans $1+\mathfrak{m}\mathcal{O}_v$). On parle alors de caractère de Hecke modulo $\mathfrak{m}$.

On peut également voir un caractère de Hecke comme un caractère sur les idéaux. Ceci permet de définir la fonctions L de Hecke associée au caractère χ :

$$L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux entiers de $\mathbb{K}$, et $\chi(\mathfrak{a}) = 0$ si $\mathfrak{a}$ n'est pas premier avec le module $\mathfrak{m}$ de χ. La fonction se factorise en produit eulérien :

$$L(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier non nul}} \frac{1}{1-\chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

Les fonctions de Hecke admettent un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec au plus deux pôles simples en 0 et en 1, et il existe une fonction $\epsilon(s,\chi)$ méromorphe sur $\mathbb{C}$ telle que :

$$L(s,\chi) = \epsilon(s,\chi)L(s,\chi^{-1})$$

Les fonctions L d'Artin

À propos des raisons qui ont conduit Artin à construire les fonctions que nous allons définir, on peut consulter [Tate].

Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G, ρ une représentation de G dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. La fonction d'Artin associée à ρ s'écrit :

$$L(s,\rho) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier}} \frac{1}{\det(1-\rho(\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{P}}\right))_{|V^{\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}}} N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

où pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $\mathbb{L}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}$ et $\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}$ sont respectivement les groupes de décomposition et d'inertie associés à $\mathfrak{P}$, $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{P}}\right)$ est le symbole d'Artin associé à $\mathfrak{P}$, et $V^{\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}}$ est le sous-espace de V stable sous l'action de $\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}$. On rappelle que $N(\mathfrak{p})$ est le cardinal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Comme l'extension est galoisienne, le choix de l'idéal premier au-dessus de $\mathfrak{p}$ ne change pas le groupe de conjugaison de $\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}$ et $\left(\frac{\mathbb{L}/\mathbb{K}}{\mathfrak{P}}\right)$ et laisse donc le déterminant inchangé ; la fonction est donc bien définie. Il est nécessaire de considérer la restriction de la représentation à $V^{\mathcal{I}_{\mathfrak{P}}}$ pour pouvoir prendre en compte les cas ramifiés (dans le cas non ramifié, $\mathcal{I}_{\mathfrak{P}} = 1$).

Notons χ_ρ le caractère associé à la représentation ρ : $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$. Une représentation étant déterminée à isomorphisme près par son caractère, la fonction $L(.,\rho)$ ne dépend que de χ_ρ.

Si le caractère est trivial, alors L est la fonction $\zeta_{\mathbb{K}}$ de Dedekind. Si χ_R est la représentation régulière de G, alors $L(s,\chi_R) = \zeta_{\mathbb{L}}(s)$. Enfin, si H est un sous-groupe de G, $\mathbb{M}$ est la sous-extension associée, et χ_{R_H} est la représentation régulière à gauche sur les fonctions de G/H vers $\mathbb{C}$, alors $L(s,\chi_{R_H} = \zeta_{\mathbb{M}}(s)$.

Si χ_1 et χ_2 sont les caractères respectifs de deux représentations ρ_1 et ρ_2, alors $L(s,\chi_1+\chi_2) = L(s,\chi_1) + L(s,\chi_2)$. Ceci permet d'étudier des fonctions L d'Artin associée à des caractères indépendamment des représentations. Par exemple, en reprenant les notations ci-dessus, $L(s,\chi_R - \chi_{R_H}) = \zeta_{\mathbb{L}}(s)/\zeta_{\mathbb{M}}(s)$. Lorsque H est un sous-groupe de G et χ est un caractère de H, on peut en induire un caractère de G que l'on note Indχ, et on a alors : $L(s,\chi) = L(s,\mathrm{Ind}\chi)$. Si H est distingué, et χ est un caractère du quotient G/H, alors on peut construire un caractère de G via la projection canonique de G dans G/H ; on le note Inflχ et on a : $L(s,\chi) = L(s,\mathrm{Infl}\chi)$.

La fonction d'Artin converge pour $s > 1$, mais son prolongement à l'ensemble des complexes fait l'objet d'une conjecture qui à ce jour n'a toujours pas été démontrée.

III. La conjecture d'Artin

Conjecture 1 *Toute fonction L d'Artin associée à une représentation non triviale admet un prolongement analytique à l'ensemble du plan complexe. Dans le cas d'une représentation triviale, elle est méromorphe et admet un unique pôle en 1.*

IV. Le cas abélien

Dans le cas où G est abélien, Artin réussit à prouver une équivalence entre ses fonctions L et des fonctions L de Hecke. C'est la réciprocité d'Artin (prouvée dans [Artin], qui consiste en un isomorphisme entre le groupe de Galois de l'extension abélienne et un quotient du groupe de classes des idèles. Cette bijection est une forme très générale de loi de réciprocité (donnant ainsi un complément de réponse au neuvième problème de Hilbert qui consistait à trouver la forme la plus générale des lois de réciprocités inaugurés par la loi quadratique démontrée par Gauss). Hecke ayant prouvé le caractère holomorphe de ses fonctions L (sous certaines conditions), cela permit à Artin de démontrer sa conjecture dans le cas d'une extension abélienne.

En particulier, pour toute représentation de G de dimension 1 (cas GL_1), la conjecture est vérifiée.

V. Méromorphicité

Artin montra trois ans plus tard que :

Théorème 1 *Toute représentation de groupe fini est combinaison linéaire à coefficients rationnels de caractères induits par des caractères de sous-groupes cycliques.*

Ce qui permet de voir toute fonction L d'Artin comme un produit de puissances rationnelles de fonctions L de Hecke (puisqu'un sous-groupe cyclique est abélien, on peut lui appliquer la loi de réciprocité évoquée ci-dessus), et donc, élevée à une certaine puissance, comme une fonction méromorphe.

Brauer alla plus loin avec le théorème suivant (cf [Brauer]) :

Théorème 2 *Toute représentation de groupe fini est combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères induits par des caractères linéaires de sous-groupes.*

Ce théorème permet de montrer que :

Proposition 1 *Toute fonction L d'Artin est méromorphe.*

En effet, elle est produit de puissances entières de fonctions L d'Artin associées à des caractères linéaires, qui sont elles-mêmes holomorphes (puisqu'on est alors dans le cas abélien). Il prouve aussi la conjecture d'Artin pour les représentations qui sont combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de caractères induits par des caractères linéaires, ou combinaison linéaire à coefficients rationnels positifs.

Un résultat plus précis permet de prouver la conjecture d'Artin pour la fonction $\zeta_{\mathbb{L}}/\zeta_{\mathbb{K}}$:

Proposition 2 *Le caractère $\chi_{R_H} - \chi_{R_0}$ (où χ_{R_0} est le caractère trivial) est combinaison linéaire à coefficients rationnels de caractères induits par des caractères irréductibles non triviaux de sous-groupes cycliques.*

On en déduit immédiatement :

Théorème 3 *$\zeta_{\mathbb{L}}/\zeta_{\mathbb{K}}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Par ailleurs, Stark a prouvé la proposition suivante :

Proposition 3 *Si $\zeta_{\mathbb{L}}$ n'admet pas de pôle en s_0 d'ordre supérieur à 1, alors pour tout caractère χ, $L(s, \chi)$ est analytique en s_0.*

Ce résultat permet d'obtenir des informations sur les fonctions L d'Artin via l'étude d'une fonction ζ de Dedekind.

VI. Le cas GL(2)

Ce cas a été presque entièrement traité, petit à petit. Les images des sous-groupes finis de $GL_2(\mathbb{C})$ dans $PGL_2(\mathbb{C})$ sont connues : cyclique, diédrale, tétraédrale (isomorphe à A_4), octoédrale (isomorphe à S_4), ou icosaédrale (isomorphe à A_5). Étudions les différentes possibilités.

Les sous-cas cyclique et diédral

On entre alors dans le cadre de la réciprocité d'Artin, ce qui permet de conclure.

Les sous-cas tétraédral et octaédral

Langlands a cherché à généraliser le principe de correspondance qui avait permis de résoudre le cas GL_1 via les fonctions L de Hecke. C'est ainsi qu'il développe le vaste programme éponyme (qu'on peut découvrir dans [Murty]). Il propose ainsi la *conjecture d'Artin forte* :

Conjecture 2 *Toute fonction L d'Artin d'une représentation de Galois irréductible de dimension n sur un corps k est égale à la fonction L d'une forme automorphe sur* $\mathrm{GL}_\mathrm{n}(k)$.

Grâce aux propriétés des fonctions L associées aux formes automorphes, cette conjecture implique la conjecture d'Artin. Dans le cas $n = 1$, la loi de réciprocité d'Artin donne la correspondance entre les représentations de Galois et les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_\mathbb{K})$, puis les théorèmes réciproques de Hecke puis Weil font le lien entre les représentations du groupe des adèles et les formes automorphes ; on obtient finalement la correspondance recherchée.

Langlands a réussi à prouver le cas tétraédral de la conjecture d'Artin forte, que Tunell a complété par le cas octaédral : tous les cas d'image résoluble sont donc traités. On a ainsi :

Théorème 4 *Toute représentation de dimension 2 de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$ *dont l'image est un sous-groupe fini résoluble de $GL_2(\mathbb{C})$ correspond à une représentation automorphe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_k)$.

Le sous-cas icosaédral

Ce cas a été presque entièrement traité. Khare et Winterberger (cf [Khare]) ont résolu le cas des représentations impaires (c'est-à-dire que l'image de la conjugaison complexe a pour déterminant -1) du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ en prouvant la conjecture de modularité de Serre (qui énonce l'équivalence dans ce cas précis des représentations galoisiennes et des formes modulaires paraboliques, cf [Serre]), et Pilloni et Stroh (cf [Pilloni]) on traité le cas des représentations impaires du groupe de Galois absolu de corps totalement réels. Le cas des représentations paires est encore ouvert.

VII. Les cas GL(n) pour $n > 2$

Certains sous-cas particuliers ont été traités, mais la plupart sont encore ouverts. Il semblerait que la conjecture d'Artin forte soit un passage obligé pour prouver la conjecture d'Artin en toute généralité, ce qui renforce l'importance d'une meilleure compréhension du principe de fonctorialité que met en œuvre le programme de Langlands, établissant un lien entre le monde automorphe et celui des représentations galoisiennes.

Bibliographie

[Prasad] D. Prasad, C. S. Yogananda, 2000, *A Report on Artin's Holomorphy Conjecture*, in Bambah, R.P., Dumir, V.C., Hans-Gill, R.J. (eds) Number Theory. Trends in Mathematics, Birkhäuser

[Artin] E. Artin, 1927, *Beweis des allgemeinen Reziprozitäsgesetzes*, Hamb. Abh., 5(1927), 353-363

[Brauer] R. Brauer, *On Artin's L-series with general group characters*, Ann. of Math., 48 (1947), 502-514.

[Serre] J-P. Serre,1987, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de Gal(Q/Q)*, Duke Mathematical Journal, 54 (1) : 179–230

[Tate] J. Tate, *The general reciprocity law, Mathematical developments arising from Hilbert Problems*, Volume 27 (AMSPSPM series), 1976. Ed. : F. E. Browder, 311-322

[Khare] C. Khare, JP. Wintenberger, *JP. Serre's modularity conjecture (I)*, Invent. math. 178, 485 (2009)

[Pilloni] V. Pilloni et B. Stroh, *Surconvergence, ramification et modularité*, Astérisque 382, 2016, p. 195–266

[Murty] M. Ram Murty, *A motivated introduction to the Langlands' Programme*, Advances in Number Theory, Ed. : F. Gouvea and N. Yui, Clarendon Press, Oxford, 1993, 37-66