

# Représentations quantiques des groupes modulaires de surfaces

Pierre Godfard

## Résumé

Ce texte est une introduction aux représentations quantiques des groupes modulaires de surfaces. Deux problèmes de la théorie sont abordés : la question de la rigidité des représentations, et le calcul d'une théorie cohomologique des champs construite à partir de ces représentations.

L'approche choisie est d'introduire la TQFT, notion centrale de la théorie, puis de proposer une définition élémentaire des représentations quantiques. Le texte contient également une brève introduction aux groupes modulaires de surfaces.

Je tiens à remercier Julien Marché pour son aide dans la rédaction de ce texte et pour son article [Mar18] d'où la construction élémentaire présentée ici est tirée.

## 1 Introduction

seul bord. Voir la figure 1.1 pour un exemple.

### Catégorie de cobordisme

Les premiers objets topologiques étudiés ici sont les surfaces, sans bord, et les variétés de dimension 3, à bord. Toutes les variétés sont orientés. L'exemple typique a avoir en tête pour la suite est celui des corps en anse : une boule, à laquelle on colle  $g$  anses pleines en leurs extrémités. La variété de dimension 3 ainsi obtenue est un *corps en anse de genre  $g$* , et son bord une *surface de genre  $g$* . Dans la suite, les surfaces  $S$  seront marquées d'un certain nombre de segments disjoints, ie. de plongements  $[0, 1] \rightarrow S$ . Ces segments seront appelés points marqués.

Les seconds objets topologiques centraux sont les enchevêtrements. Soit  $M$  une 3 variété à bord  $S$ . On suppose le bord marqué par  $x_1, \dots, x_n$ . Un enchevêtrement est alors un ensemble de plongements disjoints de bandes  $[0, 1] \times [0, 1]$  ou  $S^1 \times [0, 1]$ . Les bords  $\{0\} \times [0, 1]$  et  $\{1\} \times [0, 1]$  des bandes du premier type doivent coïncider avec un des segments  $x_1, \dots, x_n$ . Chaque  $x_i$  doit rencontrer un et un

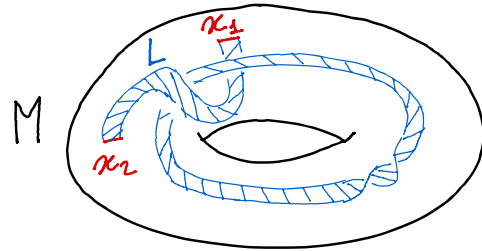


FIGURE 1.1: Un tore plein avec 2 points marqués sur son bord et un enchevêtrement à l'intérieur.

Ces objets peuvent se regrouper dans ce qu'on appelle une catégorie de cobordisme de dimension  $2+1$ . Dans cette catégorie  $\text{Cob}^{2+1}$  :

- les objets sont les surfaces  $S$  munies de points marqués  $x_1, \dots, x_n$  ;
- les morphismes de  $S_1$  dans  $S_2$  sont les classes d'isomorphisme de variétés  $M$  de dimension 3 munies d'une identification de leur bord  $\partial M = -S_1 \sqcup S_2$  et d'un enchevêtrement  $L \subset M$  ;
- la composition de  $M, \partial M = -S_1 \sqcup S_2$  et  $M', \partial M' = -S_2 \sqcup S_3$  est le recollement  $M'' = M \cup_{S_2} M'$ .

1. La catégorie  $\text{Cob}^{2+1}$  est en fait enrichie d'une structure supplémentaire, passée sous silence ici par simplicité. Voir [Tur16, IV.4] pour les détails.

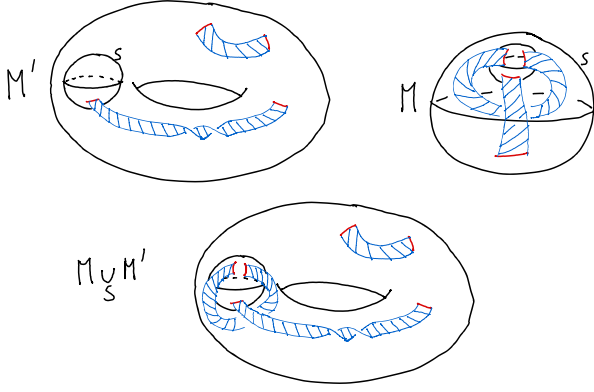


FIGURE 1.2: Deux variétés de dimension 3 munies d'enchevêtrements et leur composition.

### TQFT comme foncteur sur une catégorie de cobordisme

Les représentations quantiques étudiées ici se placent dans le cadre de l'étude des théories quantiques des champs topologiques (TQFT). Une TQFT hermitienne est la donnée :

**(objets)** pour toute surface  $S$  dans  $\text{Cob}^{2+1}$ , d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $V_S$  muni d'une forme hermitienne  $(\cdot, \cdot)_S$  ;

**(morphisms)** pour toute variété  $M$  de dimension 3 à bord  $\partial M = -S_1 \sqcup S_2$  munie d'un enchevêtrement  $L \subset M$ , d'un morphisme  $Z_M : V_{S_1} \rightarrow V_{S_2}$ .

**(monoïdalité)** pour toute paire de surfaces  $S_1, S_2$  dans  $\text{Cob}^{2+1}$ , d'un isomorphisme fonctoriel :

$$V_{S_1 \sqcup S_2} \simeq V_{S_1} \otimes V_{S_2}$$

On requiert que ces morphismes soient compatibles à la composition et aux produits hermitiens. Plus précisément, pour tout  $M$  comme ci-dessus, en notant  $-M$  l'orientation opposée, on requiert que pour tout  $v_1 \in V_{S_1}$  et  $v_2 \in V_{S_2}$  :

$$(v_1, Z_{-M}(v_2))_{S_1} = (Z_M(v_1), v_2)_{S_2}$$

La construction rigoureuse de telles TQFT a commencé dans les années 90 à partir de travaux de Witten [Wit89]. Une première construction à partir de représentation de groupes quantiques est donnée par Reshetikhin et Turaev dans [RT91]. À la place des

2. En fait, à cause de la structure supplémentaire mentionnée plus haut, on obtient plutôt une représentation d'une extension centrale  $\widetilde{\text{Mod}}(S)$  de  $\text{Mod}(S)$ .

groupes quantiques  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , on peut utiliser une construction à base de crochet de Kauffman et de modules d'écheveaux. Cette approche est élaborée par Blanchet, Habegger, Mautsbaum et Vogel dans [BHMV95].

### Les représentations quantiques à partir de la TQFT

Soit  $S$  une surface. On note  $\text{Homeo}^+(S)$  le groupe topologique des homéomorphismes de  $S$  qui préservent l'orientation. Le groupe modulaire de  $S$  est alors le groupe des composantes connexes de  $\text{Homeo}^+(S)$  :

$$\text{Mod}(S) = \pi_0(\text{Homeo}^+(S))$$

Intuitivement, on identifie 2 homéomorphismes si l'on peut déformer continûment l'un en l'autre.

Une TQFT induit naturellement une représentation de  $\text{Mod}(S)$ .<sup>2</sup> En effet, fixons  $f \in \text{Homeo}^+(S)$  et  $M = S \times [0, 1]$ . On identifie  $\partial M = \{0, 1\} \times S$  par  $\text{id}_S$  sur  $\{0\} \times S$  et par  $f$  sur  $\{1\} \times S$ . Alors, on obtient un morphisme :

$$Z_f = Z_M : V_S \rightarrow V_S$$

Et, comme la classe d'isomorphisme de  $M$  ne dépend que de la classe de  $f$  dans  $\text{Mod}(S)$ , on obtient ainsi une représentation :

$$\rho_S : \text{Mod}(S) \rightarrow \text{PEnd}(V_S)$$

Les représentations sont seulement projectives à cause de la structure supplémentaire sur  $\text{Cob}^{2+1}$  mentionnée plus haut.

Comme cette représentation préserve le produit hermitien  $(\cdot, \cdot)_S$ , si on note  $(p, q)$  la signature du produit, on obtient une représentation dans un groupe hermitien :

$$\rho_S : \text{Mod}(S) \rightarrow \text{PU}(p, q)$$

### Un mot sur les invariants d'entrelacs

Les TQFT citées plus haut sont construites à partir d'invariants d'entrelacs. Nous mentionnons brièvement ici comment ces invariants apparaissent dans la TQFT. Un entrelacs est une classe d'isomorphisme d'enchevêtrement  $L$  dans  $M = S^3$ . Ainsi, 2 enchevêtrements  $L, L' \subset S^3$  représentent le même entrelacs si il existe

un homéomorphisme de  $S^3$  préservant l'orientation qui envoie  $L$  sur  $L'$ . Un invariant d'entrelacs est une fonction sur l'ensemble des entrelacs, généralement calculable à partir d'un diagramme de celui-ci.

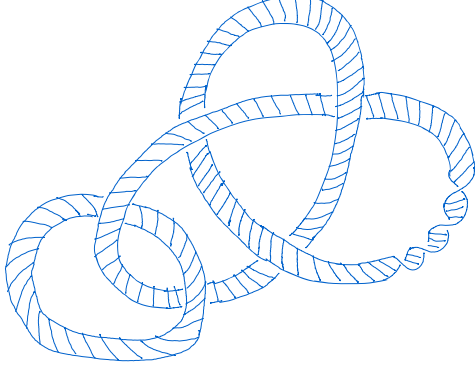


FIGURE 1.3: Un entrelacs, dans  $S^3$ .

Soit  $L \subset S^3$  un entrelacs, alors ce dernier représente un morphisme  $\emptyset \rightarrow \emptyset$  dans  $\text{Cob}^{2+1}$ . Ainsi,  $Z_L$  est un endomorphisme de  $V_\emptyset$ . Or, à cause de la monoïdalité,  $V_\emptyset$  est de dimension 1. Donc  $Z_L \in \mathbb{C}$ . C'est l'invariant d'entrelacs associé à la TQFT.

## 2 Représentations quantiques

Les représentations étudiées dans la suite sont celles dites  $\text{SO}(3)$  dans l'article [BHMV95]. Ces représentations sont paramétrées par un entier impair  $l$ , appelé niveau, et une coloration des points marqués de la surface considérée. Plus précisément, fixons une surface  $S = S_{g,n}$  de genre  $g$  avec  $n$  points marqués. Alors, pour chaque entier impair  $l$  et coloration  $c \in \{0, 2, \dots, l-3\}^n$  des points marqués de  $S$ , on dispose d'une représentation de dimension finie :

$$\rho_{g,n}^{l,c} : \text{Mod}(S) \longrightarrow \text{PGL}_d(\mathbb{Q}(\zeta_l))$$

où  $\zeta_l$  est une racine  $l$ -ème de l'unité. Pour obtenir des représentations sur  $\mathbb{C}$  comme dans l'introduction, il suffit alors de choisir un plongement de  $\zeta_l$  dans  $\mathbb{C}$ .

Dans cette section, nous présentons les grandes lignes de la construction de ces représentations. Plutôt que de construire toute la TQFT, nous choisissons l'approche plus élémentaire et concrète de [Mar18].

### Le module d'écheveaux d'une variété de dimension 3

Fixons une variété  $M$  de dimension 3 munie d'un ensemble de points marqués  $P \subset \partial M$ . Deux enchevêtrements  $L, L' \subset M$  sont dit isotopes s'il existe une déformation continue :

$$H : L \times [0, 1] \longrightarrow M$$

telle que pour tout  $t$ ,  $H(\cdot, t) : L \longrightarrow M$  soit un enchevêtrement, égal à  $L$  pour  $t = 0$  et à  $L'$  pour  $t = 1$ .

Fixons  $l \geq 3$  un entier impair,  $k = \mathbb{Q}(\zeta_l)$  le corps cyclotomique d'ordre  $l$  et  $A = -\zeta_l$ . Notons  $\mathcal{L}(M)$  le  $k$ -espace vectoriel libre engendré par les classes d'enchevêtrements dans  $M$  :

$$\mathcal{L}(M) = \bigoplus_{[L]} k \cdot [L]$$

Soit  $L_\times$ ,  $L_v$  et  $L_h$  des enchevêtrements dans  $M$  qui ne diffèrent qu'à l'intérieur d'une boule  $B^3 \subset M$  et soient comme dans la figure 2.4 à l'intérieur de celle-ci. On appelle un tel triplet un triplet de Kauffman.

De même, soit  $L_o$  et  $L_\emptyset$  des enchevêtrements dans  $M$  qui ne diffèrent qu'à l'intérieur d'une boule et soient comme dans la figure 2.4 à l'intérieur de celle-ci.

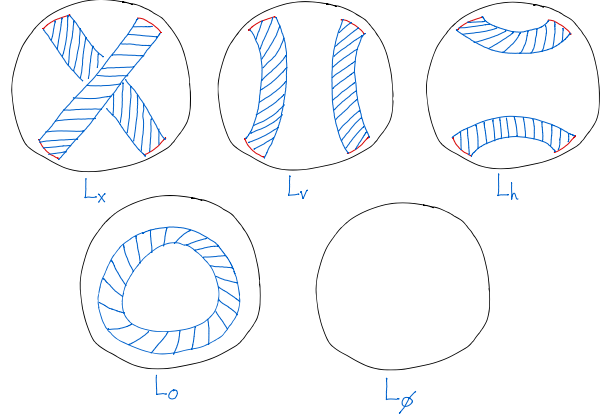


FIGURE 2.4: Les liens  $L_\times$ ,  $L_v$ ,  $L_h$ ,  $L_o$  et  $L_\emptyset$ , à l'intérieur de la boule  $B^3$ .

Soit  $\mathcal{S}(M)$  le quotient de  $\mathcal{L}(M)$  par les éléments :

- $A[L_v] + A^{-1}[L_h] - L_\times$  pour tout triplet de Kauffman  $L_\times$ ,  $L_v$  et  $L_h$  ;
- $L_o + (A^2 + A^{-2})L_\emptyset$  pour tout couple d'enchevêtrements comme ci-dessus.

On appelle  $\mathcal{S}(M)$  le *module d'écheveaux* de  $M$ . Par exemple, on a  $\mathcal{S}(S^3) \simeq k \cdot [\emptyset]$ . Ainsi, pour chaque entrelacs  $L \subset S^3$  il existe un unique  $\langle L \rangle \in k$  tel que  $\langle L \rangle \cdot [\emptyset] = [L]$ . Le scalaire  $\langle L \rangle$  est appelé *crochet de Kauffman* de  $L$ . C'est un invariant d'entrelacs. On remarque qu'il est possible de calculer algorithmiquement le crochet de Kauffman à partir d'un diagramme d'un entrelacs. En effet, sur un diagramme (comme par exemple la figure 1.3), la première relation permet de retirer un à un les croisements. Quand il n'y a plus de croisements sur le diagramme, il ne reste que des boucles disjointes. On peut alors les réduire à  $[\emptyset]$  par la seconde relation.

### Le module d'écheveaux réduit

En ajoutant 2 types de relations supplémentaires, on obtient un quotient  $\mathcal{S}^r(M)$  de  $\mathcal{S}(M)$ , appelé le *module d'écheveaux réduit* de  $M$ . Ces relations, plus techniques, sont explicitées dans la dernière section.

Le module d'écheveaux réduit a la particularité d'être de dimension finie lorsque  $M$  est un corps en anse ou lorsque  $M = S \times [0, 1]$  avec  $S$  une surface compacte.

Soit  $S$  une surface de genre  $g$  sans points marqués. Le module  $\mathcal{S}^r(S \times [0, 1])$  est muni d'une structure d'algèbre naturelle, où le produit est induit par le recollement  $S \times [0, 1] \cup_S S \times [0, 1] \simeq S \times [0, 1]$ .

Soit maintenant  $H$  un corps en anse de bord  $S$ . Alors, le recollement  $S \times [0, 1] \cup_S H \simeq H$  fait de  $\mathcal{S}^r(H)$  une  $\mathcal{S}^r(S \times [0, 1])$ -algèbre. On a en fait :

$$\mathcal{S}^r(S \times [0, 1]) \simeq \text{End}_k(\mathcal{S}^r(H))$$

### Les représentations quantiques par l'action sur les modules d'écheveaux

Maintenant,  $\text{Homeo}^+(S)$  agit naturellement sur l'algèbre  $\mathcal{S}^r(S \times [0, 1]) = \text{End}_k(\mathcal{S}^r(H))$  par  $f \cdot [L] = [(f \times \text{id}_{[0,1]})(L)]$ . Cette action se factorise par  $\text{Mod}(S)$ . Or, c'est un résultat classique que les seuls endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(k)$  sont les conjugaisons par des éléments de  $\text{GL}_n(k)$ . Ainsi, nous venons de construire une représentation projective :

$$\rho_g^l : \text{Mod}(S) \longrightarrow \text{PGL}(\mathcal{S}^r(H))$$

Maintenant, cette représentation commute à l'anti-automorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{S}^r(S \times [0, 1])$  induit par  $\text{id}_S \times (t \mapsto 1 - t)$ . Or les anti-automorphismes de  $\mathcal{M}_n(k)$  sont en bijection avec les produits hermitiens sur  $k^n$ . On en déduit que  $\rho$  préserve une forme hermitienne. En notant  $(p, q)$  sa signature après un choix de plongements  $\mathbb{Q}(\zeta_l) \subset \mathbb{C}$ , on a donc une représentation :

$$\rho_g^l : \text{Mod}(S) \longrightarrow \text{PU}(p, q)$$

Ce sont les représentations quantiques qui nous intéressent ici.

### Une base orthogonale des représentations quantiques

Décrivons maintenant une base de  $\mathcal{S}^r(H)$ . Nous verrons dans la section suivante comment certains éléments de  $\text{Mod}(S)$  agissent sur cette base.

Fixons maintenant un graphe trivalent à bande  $G \subset H$  sur lequel  $H$  se rétracte. Les boucles sont autorisées, voir la figure 2.5 pour plus d'information. Notons  $E$  l'ensemble des arêtes et  $V$  l'ensemble des sommets. Une coloration valide de  $G$  est une fonction :

$$c : E \longrightarrow \{0, 2, \dots, l - 3\}$$

telle que pour tout sommet  $v$  adjacent à  $e, e'$  et  $e''$  :

- $c(e) + c(e') + c(e'') < 2l - 2$  ;
- $|c(e') - c(e'')| \leq c(e) \leq c(e') + c(e'')$ , c'est-à-dire  $c(e), c(e')$  et  $c(e'')$  sont les longueurs d'un triangle.

Soit  $C_G$  l'ensemble des colorations valides.

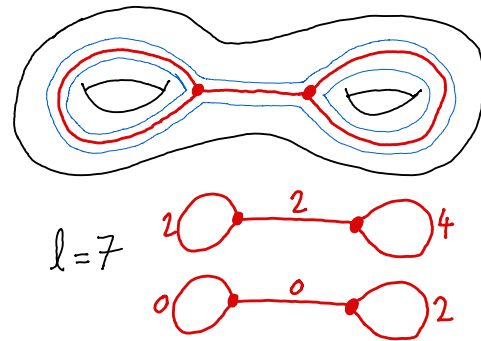


FIGURE 2.5: Un exemple de graphe et de 2 colorations valides pour  $g = 2$  et  $l = 7$ .

Pour chaque coloration valide  $c$ , on dispose d'un élément  $\gamma_c$  de  $\mathcal{S}^r(H)$ . Voir la dernière section pour sa construction explicite.

Les  $(\gamma_c)_{c \in C_G}$  forment alors une base orthogonale de  $\mathcal{S}^r(H)$ .

### Un mot sur les surfaces marquées

Dans la construction ci-dessus, nous avons supposé pour simplifier que la surface  $S$  n'a pas de points marqués. En général, on se donne  $S_{g,n}$  une surface de genre  $g$  munie de  $n$  points marqués  $x_1, \dots, x_n$  coloriés respectivement par  $c_1, \dots, c_n \in \{0, 2, \dots, l-3\}$ . On remplace chaque marque  $x_i$  sur  $S_{g,n}$  par  $c_i$  copies parallèles d'elle-même pour obtenir une surface  $S$ .

Considérons le module  $\mathcal{S}^r(H)$  comme plus haut, où  $H$  est un corps en anse de bord  $S$ . Comme plus haut, il est muni d'une action de  $\mathcal{S}^r(S \times [0, 1])$ . Notons  $e \in \mathcal{S}^r(S \times [0, 1])$  l'élément induit en insérant  $f_{c_i}$  entre les  $c_i$  copies de  $x_i$  dans  $S \times \{0\}$  et celles dans  $S \times \{1\}$ <sup>3</sup>. C'est un idempotent. Le module qui nous intéresse est alors  $e \cdot \mathcal{S}^r(H) \subset \mathcal{S}^r(H)$ . On notera  $\mathcal{S}_c^r(H) = e \cdot \mathcal{S}^r(H)$ .

Décrivons maintenant une base orthogonale de  $\mathcal{S}_c^r(H)$ . Soit  $G \subset H$  un graphe à bande tel que :

- chaque  $x_i$  soit un sommet univalent de  $G$ ;
- tous les autres sommets soient trivalents;
- $H$  se rétracte sur  $G$ .

La définition d'une coloration valide  $c : E \rightarrow \{0, 2, \dots, l-3\}$  est la même que plus haut, avec la condition supplémentaire que si  $e$  est adjacent à  $x_i$ , alors  $c(e) = c_i$ .

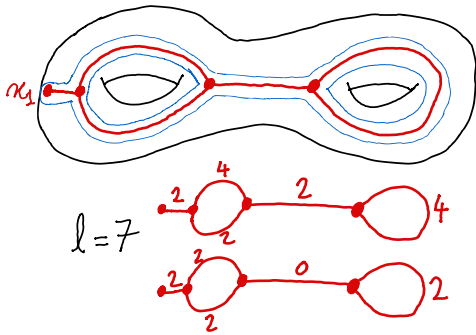


FIGURE 2.6: Un exemple de graphe et de 2 colorations valides pour  $g = 2$  et  $l = 7$  avec 1 point marqué colorié par  $c_1 = 2$ .

Une base orthogonale est alors donnée par  $(\gamma_c)_{c \in C_G}$ , définie comme plus haut.

3. pour la définition de  $f_i$ , voir la dernière section.
4. L'inclusion est supposée préserver l'orientation.

Soit  $\text{Homeo}^+(S, x_1, \dots, x_n)$  le groupe topologique des homéomorphismes de  $S$  qui préservent l'orientation et fixent les points  $x_1, \dots, x_n$ . Soit  $\text{Mod}(S_{g,n}) = \pi_0(\text{Homeo}^+(S, x_1, \dots, x_n))$  son groupe des composantes connexes. Alors  $\text{Mod}(S_{g,n})$  agit projectivement sur  $\mathcal{S}_c^r(H)$  :

$$\rho_{g,n}^{l,c} : \text{Mod}(S_{g,n}) \rightarrow \text{PU}(\mathcal{S}_c^r(H))$$

## 3 Les groupes modulaires des surfaces

### Twists de Dehn

Nous allons ici discuter de générateurs et relations dans les groupes modulaires  $\text{Mod}(S)$ . Soit  $S$  une surface de genre  $g$ . Une courbe sur  $S$  est l'image du plongement d'un cercle  $S^1 \subset S$  dans  $S$ . Fixons  $\gamma \subset S$  une telle courbe. Le twist de Dehn à gauche le long de  $\gamma$ , noté  $T_\gamma$ , est un élément de  $\text{Mod}(S)$  défini comme suit :

- soit  $S^1 \times [0, 1] \subset S$  un voisinage tubulaire fermé de  $\gamma$ <sup>4</sup>;
- soit  $\varphi : (x, t) \mapsto (xe^{2\pi it}, t)$ , c'est un homéomorphisme de  $S^1 \times [0, 1]$  fixant le bord  $S^1 \times \{0, 1\}$ ;
- soit  $f$  l'homéomorphisme de  $S$  qui vaut  $\varphi$  sur le voisinage  $S^1 \times [0, 1] \subset S$  et l'identité sur le complémentaire. C'est un représentant de  $T_\gamma$ .

La construction est illustrée sur la figure 3.7. La figure montre également l'action d'un représentant de  $T_\gamma$  sur une autre courbe  $\delta \subset S$ .

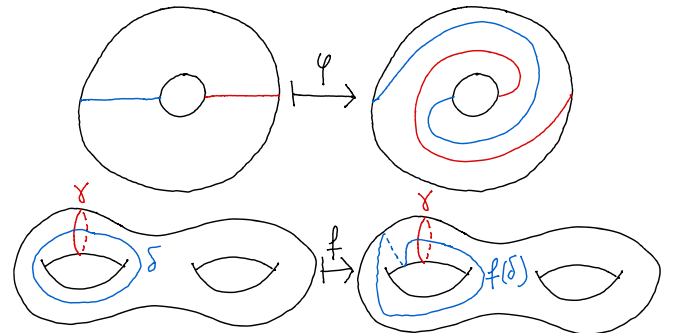


FIGURE 3.7: L'homéomorphisme  $\varphi$  et un exemple de twist  $T_\gamma$  dans  $S_2$ .

Une courbe  $\gamma \subset S$  est dite non-séparante si  $S - \gamma$  est connexe. Toutes les courbes non-séparantes sont dans la même orbite sous  $\text{Homeo}^+(S)$ . Ainsi, comme  $fT_\gamma f^{-1} = T_{f(\gamma)}$  dans  $\text{Mod}(S)$ , tous les twists de Dehn le long de courbes non-séparantes sont conjugués dans  $\text{Mod}(S)$ .

**Theorem 3.1.** *Soit  $S_{g,n}$  une surface de genre  $g$  munie de  $n$  points marqués. Il existe des courbes  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  telles que  $T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_d}$  engendrent  $\text{Mod}(S_{g,n})$ . Si  $g \geq 1$ , on peut de plus supposer que les  $\gamma_i$  sont non-séparantes.*

Parlons maintenant de relations entre les twists de Dehn. On a d'abord des relations élémentaires entre paires de twists.

**Proposition 3.2.** *Soit  $\gamma$  et  $\delta$  deux courbes dans  $S$ . Si  $\gamma$  et  $\delta$  sont disjointes, alors  $T_\gamma$  et  $T_\delta$  commutent :*

$$T_\gamma T_\delta = T_\delta T_\gamma$$

*Si  $\gamma$  et  $\delta$  ont un unique point d'intersection transverse, alors  $T_\gamma$  et  $T_\delta$  vérifient la relation de tresse :*

$$T_\gamma T_\delta T_\gamma = T_\delta T_\gamma T_\delta$$

### La relation de lanterne et les abélianisés des groupes modulaires

Nous présentons ici une relation plus compliquée : la relation de lanterne.

**Proposition 3.3.** *Soit  $a, b, c, x, y, z$  et  $w$  les courbes comme sur la figure 3.8. Alors on a :*

$$T_a T_b T_c = T_x T_y T_z T_w$$

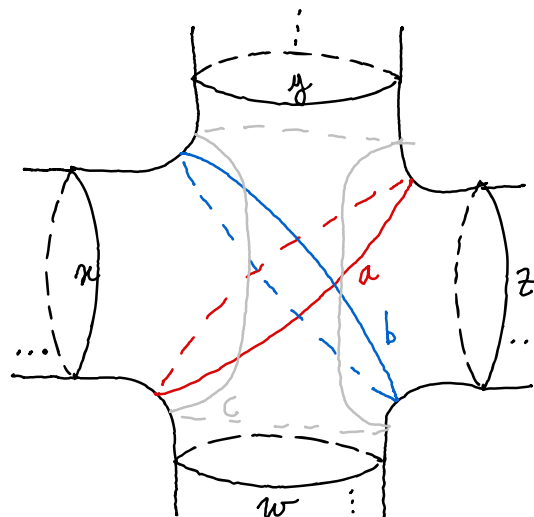


FIGURE 3.8: Les courbes de la relation de lanterne.

Cette relation a la conséquence remarquable suivante.

**Corollary 3.4.** *Soit  $S_{g,n}$  une courbe de genre  $g$  avec  $n$  points marqués. Si  $g \geq 3$ , le groupe  $\text{Mod}(S_{g,n})$  est parfait, c'est-à-dire que son seul quotient abélien est trivial.*

*Démonstration.* Pour  $g \geq 3$ , on peut plonger dans  $S_{g,n}$  la figure 3.8 de sorte que les 7 courbes  $a, b, c, x, y, z$  et  $w$  soient non-séparantes. Soit  $G = \text{Mod}(S_{g,n})^{\text{ab}}$  l'abélianisé de  $\text{Mod}(S_{g,n})$ . Comme tous les twists de Dehn le long de courbes non-séparantes sont conjugués,  $T_a, T_b, T_c, T_x, T_y, T_z$  et  $T_w$  ont la même image  $u$  dans  $G$ . Alors la relation de lanterne devient  $u^3 = u^4$ . Comme  $u$  engendre  $G$  par le théorème 3.1, on a bien que  $G$  est trivial.  $\square$

### Action des twists de Dehn

Soit  $S_{g,n}$  une surface de genre  $g$  munie de  $n$  points marqués. Soit  $H$  un corps en anse de bord  $S_{g,n}$  et  $G$  un graphe à bande sur lequel  $H$  se rétracte. Soit  $e$  une arête de  $G$  et  $\alpha$  la courbe qui fait un tour autour de  $e$ . Alors  $T_\alpha$  agit diagonalement sur la base  $(\gamma_c)_{c \in C_G}$  par :

$$\rho_g^l(T_\alpha)(\gamma_c) = A^{c(e)(c(e)+2)} \gamma_c$$

En particulier  $\rho_g^l(T_\alpha^l) = \text{id}$ . Comme tous les twists de Dehn le long de courbes non-séparantes sont conjugués, pour tout  $\beta$  non-séparante,  $\rho_g^l(T_\beta^l) = \text{id}$ . C'est également vrai pour les courbes séparantes.

Notons  $\text{Mod}^l(S_{g,n})$  le quotient de  $\text{Mod}(S_{g,n})$  par les  $T_\alpha^l$  pour toute courbe  $\alpha$ . Alors la représentation  $\rho_{g,n}^l$  se factorise en :

$$\rho_{g,n}^l : \text{Mod}^l(S_{g,n}) \longrightarrow \text{PU}(\mathcal{S}_c^r(H))$$

Les représentations quantiques sont les seules représentations de dimension finie connues des groupes modulaires telles que les images des twists de Dehn soient diagonalisables.

### Irréductibilité

Dans la suite, on se restreindra au cas où  $l$  est un nombre premier, pour la raison suivante.

**Theorem 3.5.** *Soit  $l \geq 3$  un nombre premier. Alors la représentation :*

$$\rho_g^l : \text{Mod}(S_g) \longrightarrow \text{PU}(\mathcal{S}_c^r(H))$$

*est irréductible.*

Des démonstrations élémentaires sont exposées dans [Mar18, 4.2] et [Rob01]. Le cas non-premier est peu étudié, et la décomposition en irréductible est un problème ouvert dans le cas général.

## 4 La question de la rigidité

### Théorie général

Commençons par introduire le concept de rigidité d'une représentation. Étant donnée une représentation de dimension finie  $\rho : G \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , on pense à une déformation de  $\rho$  comme une famille différentiable  $\rho_t : G \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ,  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ , telle que  $\rho_0 = \rho$ .

Cependant nous sommes intéressés ici uniquement par les déformations "à l'ordre 1". Nous utiliserons donc la notion suivante de déformation, plus formelle. Soit  $k$  un corps et  $\rho : G \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  une représentation de dimension finie. On note  $\text{GL}_n(k)[\epsilon]$  le groupe d'ensemble :

$$\text{GL}_n(k) \times \text{M}_n(k)$$

où l'élément  $(g, u)$  est noté  $g + \epsilon u$ . Cet ensemble est muni de la loi de groupe :

$$(g + \epsilon u)(h + \epsilon v) = gh + \epsilon(u + g \cdot v)$$

On peut y penser comme à l'espace tangent de  $\text{GL}_n(k)$  : si  $\rho_t$  est une famille différentiable avec  $\rho_0 = \rho$ , alors on a un morphisme de groupes

$$\left( \rho + \epsilon \frac{\partial \rho_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) : G \longrightarrow \text{GL}_n(k)[\epsilon].$$

On remarque par ailleurs que  $\text{GL}_n(k)[\epsilon] = \text{GL}_n(k[\epsilon])$ .

Un déformation de  $\rho$  est alors un relèvement  $\tilde{\rho}$  de  $\rho$  à  $\text{GL}_n(k)[\epsilon]$  :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{GL}_n(k)[\epsilon] \\ & \nearrow \tilde{\rho} & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\rho} & \text{GL}_n(k) \end{array}$$

Étant donnée une telle déformation  $\tilde{\rho}$  et un élément  $P \in \text{M}_n(k)$ , on peut construire une autre déformation par conjugaison :

$$\begin{aligned} (I_n + \epsilon P)\tilde{\rho}(I_n + \epsilon P)^{-1} &= (I_n + \epsilon P)\tilde{\rho}(I_n - \epsilon P) \\ &= (I_n + \epsilon(P - \rho P \rho^{-1}))\tilde{\rho} \end{aligned}$$

L'ensemble des classes de conjugaison de déformations de  $\rho$  s'avère être égal au groupe de cohomologie suivant :

$$\text{H}^1(G; \text{ad}(\rho))$$

où  $\text{ad}(\rho)$  est la représentation adjointe de  $\rho$ , c'est-à-dire la représentation de  $G$  sur  $\text{M}_n(k)$  induite par  $g \cdot M = \rho(g)M\rho(g)^{-1}$ . Dans la description de la cohomologie des groupes par les cocycles usuels, la correspondance associée au cocycle  $\theta : G \longrightarrow \text{M}_n(k)$  la déformation :

$$\tilde{\rho}_\theta : g \mapsto \rho(g) + \epsilon \theta(g)$$

Dans le cas d'une représentation projective  $\rho : G \longrightarrow \text{PGL}_n(k)$ , on remplace  $\text{GL}_n(k)[\epsilon]$  par son quotient :

$$\text{PGL}_n(k[\epsilon]) = \text{GL}_n(k[\epsilon])/k[\epsilon]^\times$$

On définit alors une déformation  $\tilde{\rho}$  comme un relèvement à  $\text{PGL}_n(k[\epsilon])$ . Les déformations à conjugaison près sont encore classifiées par  $\text{H}^1(G; \text{ad}(\rho))$ , où  $\text{ad}(\rho)$  désigne ici la représentation adjointe sur les matrices de trace nulle dans  $\text{M}_n(k)$ . Dans la suite, nous ignorons cette subtilité et considérons tout  $\text{M}_n(k)$ .

Une représentation  $\rho$  est dite rigide s'il n'existe pas d'autre classe de conjugaison de déformation que celle de  $g \mapsto \rho(g) + \epsilon 0_n$ . De façon équivalente,  $\rho$  est rigide si  $\text{H}^1(G; \text{ad}(\rho)) = 0$ .

### Le cas des représentations quantiques

La question qui nous intéresse est celle de la rigidité des représentations

$$\rho_{g,n}^{l,c} : \text{Mod}^l(S_{g,n}) \longrightarrow \text{GL}(\mathcal{S}_c^r(H))$$

définies plus haut.

Cette question s'inscrit dans le cadre de la conjecture (T) pour les groupes modulaires. Cette conjecture stipule que les groupes  $\text{Mod}(S_g)$  vérifie la propriété (T) de Kazhdan pour  $g \geq 3$ . Or si un groupe  $G$  vérifie la propriété (T) de Kazhdan, toute représentation unitaire de dimension finie :

$$\rho : G \longrightarrow \text{U}(n)$$

de  $G$  n'a pas de déformations unitaires.

Pour chaque représentation  $\rho_{g,n}^{l,c}$ , il existe un choix de plongement  $\mathbb{Q}(\zeta_l) \subset \mathbb{C}$  tel que la représentation soit unitaire. Ainsi, si  $\text{Mod}(S_g)$  vérifie la conjecture, les représentations  $\rho_{g,n}^{l,c}$  n'ont pas de déformations unitaires.

C'est pourquoi on peut s'intéresser au problème suivant :

**Les représentations  $\rho_{g,n}^{l,c}$  sont-elles rigides ? C'est-à-dire, est-ce que**

$$H^1(\text{Mod}(S_{g,n}); \text{ad}(\rho_{g,n}^{l,c})) = 0 ?$$

Durant le stage (mars-juillet 2022), le résultat suivant dans le cas du niveau  $l = 5$  a été obtenu :

**Proposition 4.1.** *Pour tout  $g \geq 1$ ,  $n \geq 0$  et couleurs  $c \in \{0, 2\}^n$ , la représentation :*

$$\rho_{5,c} : \text{Mod}^5(S_{g,n}) \longrightarrow \text{PGL}_d(\mathbb{Q}(\zeta_5))$$

*est rigide.*

La démonstration repose sur des calculs explicites dans les bases  $(\gamma_c)_{c \in C_G}$ . La méthode est de procéder par récurrence à partir de l'observation suivante.

Soit  $S_g$  une surface de genre  $g \geq 1$ . On peut plonger dans  $S_g$  une surface  $S_{g-1}^1$  de genre  $g-1$  avec une composante de bord. Voir la figure 4.9 pour un exemple. On dispose alors d'un morphisme  $\text{Mod}^l(S_{g-1}^1) \longrightarrow \text{Mod}^l(S_g)$ . Ainsi, on peut restreindre à  $\text{Mod}^l(S_{g-1}^1)$  la représentation  $\rho_l(S_g)$  :

$$\text{Mod}^l(S_{g-1}^1) \longrightarrow \text{Mod}^l(S_g) \longrightarrow \text{PGL}_d(\mathbb{Q}(\zeta_l))$$

Il s'avère alors que cette restriction est une somme de représentations quantiques de  $\text{Mod}^l(S_{g-1,1})$ . Ceci permet de procéder par récurrence sur  $g$ .

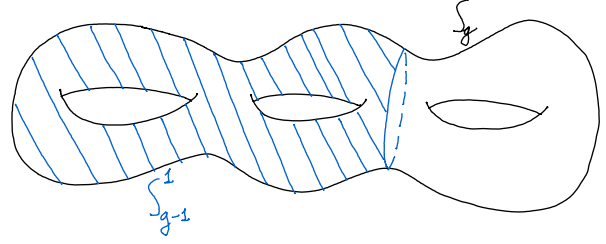


FIGURE 4.9: Un plongement  $S_2^1 \subset S_3$ .

## 5 Théorie cohomologique des champs

Nous présentons ici brièvement des invariants cohomologiques associés aux représentations quantiques.

**Invariant cohomologique des groupes  $\text{PU}(p, q)$**

Soit  $\mathcal{E} \longrightarrow X$  un fibré vectoriel complexe sur une variété  $X$ . On suppose  $\mathcal{E}$  muni d'une structure hermitienne de signature  $(p, q)$ . Alors, il existe une décomposition orthogonale  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$  telle que  $\mathcal{E}_+$  soit de signature  $(p, 0)$  et  $\mathcal{E}_-$  de signature  $(0, q)$ . On définit alors le *super caractère de Chern* de  $\mathcal{E}$  par :

$$\text{sch}(\mathcal{E}) = \text{ch}(\mathcal{E}_+) - \text{ch}(\mathcal{E}_-) \in H^*(X; \mathbb{Q})$$

où  $\text{ch}$  est le caractère de Chern usuel sur les fibrés vectoriels complexes.

Cette définition s'étend aux fibrés projectifs. En particulier, une représentation :

$$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \text{PU}(p, q)$$

induit un fibré projectif plat  $\mathcal{P}$  sur  $X$  et on peut donc définir :

$$\text{sch}(\rho) = \text{sch}(\mathcal{P}) \in H^*(X; \mathbb{Q})$$

### Espace de module des courbes

Nous faisons le choix ici de ne pas définir l'espace de module des courbes. Nous l'introduisons par son lien avec les groupes modulaires.

Fixons un entier  $l \geq 5$  et un plongement  $\mathbb{Q}(\zeta_l) \subset \mathbb{C}$ .

Soit  $g, n \geq 0$  deux entiers tels que  $2g - 2 + n > 0$ . Alors il existe un orbifold complexe compact lisse  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^l$  de groupe fondamental  $\text{Mod}^l(S_{g,n})$ .

Cet orbifold a même espace topologique sous-jacent qu'un autre orbifold : l'espace de module des courbes de genre  $g$  avec  $n$  points marqués, noté  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . En particulier on a :

$$\mathbb{H}^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^l; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}; \mathbb{Q})$$

Or, pour chaque choix de couleurs  $c_1, \dots, c_n$  en niveau  $l$ , on dispose d'une représentation :

$$\rho_{g,n}^{l,c} : \text{Mod}(S_{g,n}) \longrightarrow \text{PU}(p, q)$$

Par le paragraphe précédent et l'isomorphisme en cohomologie rationnelle ci-dessus, cette représentation induit des classes de cohomologie :

$$\Omega_{g,n}(c_1, \dots, c_n) = \text{sch}(\rho_{g,n}^{l,c}) \in \mathbb{H}^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}; \mathbb{Q})$$

### Compatibilités et CohFT

Ces classes de cohomologie  $\Omega_{g,n}(c_1, \dots, c_n)$  vérifient de fortes propriétés de compatibilité. Plutôt que de les énoncer complètement ici, nous en donnons un exemple.

Soit  $S_{g-1}^2 \subset S_g$  un plongement comme sur la figure 5.10, avec  $g \geq 2$ . On dispose alors d'un morphisme de groupes :

$$\text{Mod}(S_{g-1}^2) \longrightarrow \text{Mod}(S_g)$$

Ce morphisme de groupes est compatible en cohomologie avec un morphisme d'orbifolds :

$$r : \overline{\mathcal{M}}_{g-1,2} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$$

Il existe alors des nombres rationnels  $\eta^{\mu\nu}$  pour  $\mu, \nu$  dans  $\{0, 2, \dots, l-3\}$  tels que :

$$r^*(\Omega_g) = \sum_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \Omega_{g-1,2}(\mu, \nu)$$

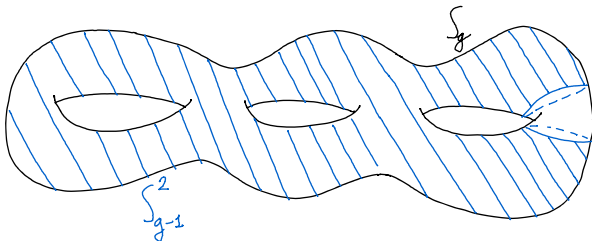


FIGURE 5.10: Un plongement  $S_2^2 \subset S_3$ .

Cette propriété de compatibilité fait partie d'une liste de propriétés qui font des classes  $\Omega_{g,n}(c_1, \dots, c_n)$  une théorie cohomologique des champs (CohFT). Voir [Pan17] pour la définition.

La construction de cette CohFT est due à Bertrand Deroin et Julien Marché [DM22].

La notion de CohFT a son origine dans les propriétés des invariants de Gromov-Witten. Voir [Pan17].

### Classification des CohFT semi-simples

Une CohFT est munie d'un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $V$  et d'une forme quadratique  $\eta$  sur celui-ci. Dans notre cas des représentations quantiques en niveau  $l$ , l'espace  $V$  a une base  $e_0, e_2, \dots, e_{l-3}$  indexée par les couleurs en niveau  $l$ .

La CohFT considérée a la propriété d'être semi-simple (voir [Pan17]). Or les CohFT semi-simples disposent d'un théorème de classification dû à Teleman [Tel12].

Le théorème de classification montre que les classes  $\Omega_{g,n}(c_1, \dots, c_n)$  sont entièrement déterminées par  $(V, \eta)$  et par une série formelle de matrices :

$$R(z) \in \text{id} + R_1 z + R_2 z^2 + \dots \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(V)[[z]]$$

Une question naturelle est de se demander quelles sont les matrices  $R_i$  associées à la CohFT construite à partir de représentations quantiques. Bertrand Deroin et Julien Marché exposent dans leur papier [DM22] une méthode pour calculer la première matrice  $R_1$ , et font le calcul en niveaux 5 et 7. Le calcul des matrices  $R_i$  pour  $i \geq 2$  est pour le moment un problème ouvert.

## 6 Construction des modules d'écheveaux réduits et de leurs bases

### Les algèbres de Temperley-Lieb

Soit  $n \geq 0$  un entier naturel fixé. On note  $B_n$  le cube  $[0, 1]^3$  marqué de  $n$  points sur le dessus, et de  $n$  points sur le dessous, comme

dans la figure 6.11. Soit  $T_n = \mathcal{S}(B_n)$  son module d'écheveaux. L'empilement des cubes induit une structure de  $k$ -algèbre sur  $T_n$ , dite de Temperley-Lieb.

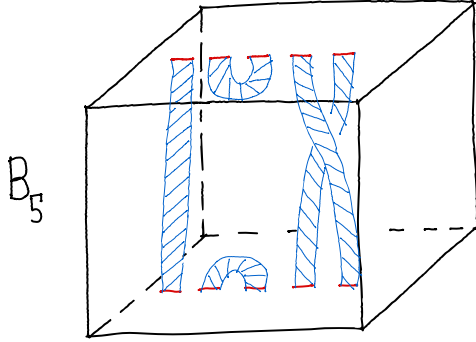


FIGURE 6.11: Un exemple d'enchevêtrement dans la boule  $B_5$ .

Pour chaque  $n \leq l - 1$ , il existe un élément particulier  $f_n$  dans  $T_n$ , appelé idempotent de Jones-Wenzl. Il est défini par récurrence sur  $n$  par la formule décrite sur la figure 6.12. Le nom d'idempotent vient du fait que  $f_n^2 = f_n$ , voir [Mar18, 2.3] pour plus de détails.

$$f_0 = \square \quad [m] = \frac{A^{2m} - A^{-2m}}{A^2 - A^{-2}}$$

$$f_m = \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline f_{m-1} \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} + \frac{[m-1]}{[m]} \begin{array}{|c|c|} \hline f_{m-1} & f_{m-1} \\ \hline \end{array}$$

FIGURE 6.12: La formule de récurrence définissant les  $f_n$ .

Une autre remarque cruciale est qu'il existe une application trace  $\text{tr} : T_n \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathcal{S}(S^3)$  induite par la clôture décrite sur la figure 6.13. Un calcul élémentaire montre que  $\text{tr}(f_n) = (-1)^n [n + 1]$ . En particulier  $\text{tr}(f_{l-1}) = 0$ . Ceci

motive la définition suivante.

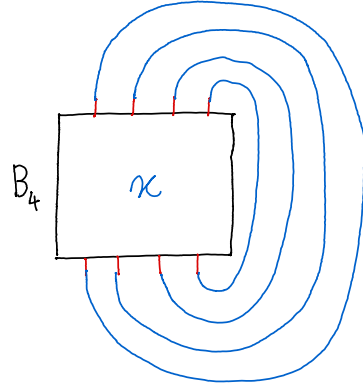


FIGURE 6.13: La clôture d'un élément de  $T_4$ , dans  $S^3$ .

### Définition des modules d'écheveaux réduits

Soit  $\mathcal{S}^r(M)$  le quotient de  $\mathcal{S}(M)$  par les relations :

- (A)  $u = 0$  pour tout  $u$  qui soit un enchevêtrement  $L$  en dehors d'une boule  $B_{l-1} \subset M$ , et égal à  $f_{l-1}$  dans  $B_{l-1}$ ;
- (B)  $u = v$  pour tout  $u$  et  $v$  qui soient des enchevêtrements identiques en dehors d'un tore plein  $T \subset M$  et égaux respectivement à la clôture de  $f_n$  et  $f_{l-2-n}$  dans  $T$ , pour  $0 \leq n \leq l - 2$ .

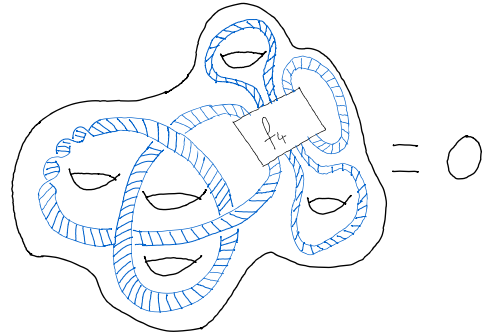


FIGURE 6.14: Un exemple d'une relation du type (A).

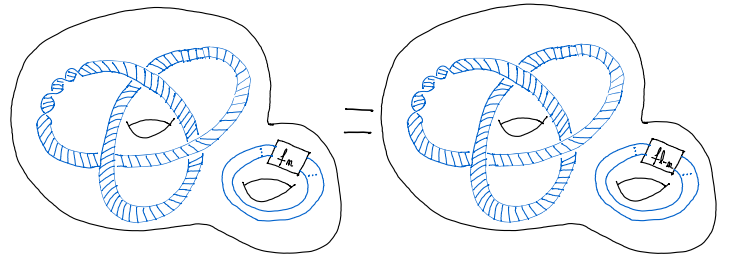


FIGURE 6.15: Un exemple d'une relation du type (B).

### Construction des éléments des bases

Soit  $a, b, c \in \{0, 2, \dots, l-3\}$  des couleurs et  $B_{a,b,c}$  une boule munie de  $a+b+c$  points marqués, regroupés en 3 paquets de tailles  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Si  $|a-b| \leq c \leq a+b$ , on note  $g_{a,b,c}$  l'élément de  $\mathcal{S}^r(B_{a,b,c})$  décrit sur la figure 6.16.

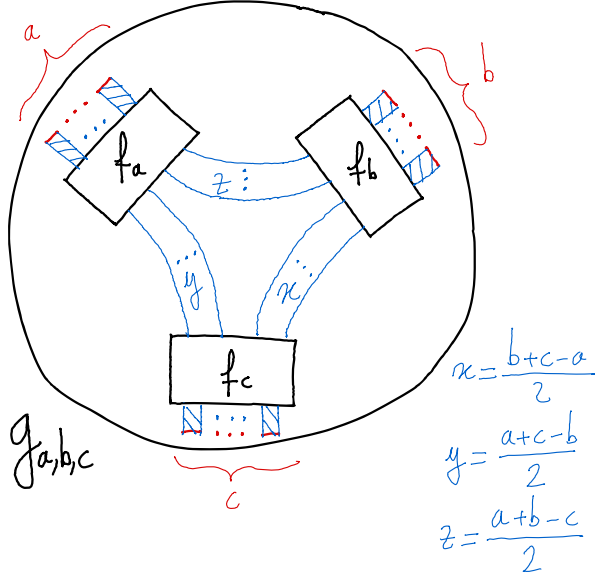


FIGURE 6.16: L'élément  $g_{a,b,c}$  de  $\mathcal{S}^r(B_{a,b,c})$ .

Soit  $S$  une surface de genre  $g$  sans points marqués,  $H$  un corps en anse de bord  $S$  et  $G \subset H$  un graphe trivalent à bandes.

Pour chaque coloration valide  $c$  de  $G$ , on construit l'élément  $\gamma_c$  de  $\mathcal{S}^r(H)$  comme suit :

- on place  $f_e \in T_e$  sur chaque arête  $e$  ;
- on place  $g_{c(e),c(e'),c(e'')}$  sur chaque sommet  $v$  adjacent aux arêtes  $e$ ,  $e'$  et  $e''$ .

### Références

[BHMV95] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, and P. Vogel. Topologi-

cal quantum field theories derived from the kauffman bracket. *Topology*, 34(4) :883–927, 1995.

[DM22]

Bertrand Deroin and Julien Marché. Toledo invariants of topological quantum field theories, 2022.

[Mar18]

Julien Marché. Introduction to quantum representations of mapping class groups. working paper or preprint, December 2018.

[Pan17]

Rahul Pandharipande. Cohomological field theory calculations, 2017.

[Rob01]

Justin Roberts. Irreducibility of some quantum representations of mapping class groups. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 10(05) :763–767, 2001.

[RT91]

N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Inventiones mathematicae*, 103(1) :547–597, 1991.

[Tel12]

Constantin Teleman. The structure of 2d semi-simple field theories. *Inventiones mathematicae*, 188(3) :525–588, 2012.

[Tur16]

Vladimir G. Turaev. *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*. De Gruyter, Berlin, Boston, 2016.

[Wit89]

Edward Witten. Quantum field theory and the jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, 121(3) :351–399, 1989.