

Introduction au domaine de recherche

Kémo Morvan

27 septembre 2022

1 Historique et définitions

1.1 Historique

Le lieu des zéros d'un nombre fini de polymômes sur \mathbb{C}^n n'est pas toujours une variété différentielle : on peut rencontrer des problèmes au niveau des points où les différentielles ne sont pas surjectives. En effet, l'espace tangent n'y a pas la même dimension que sur le reste du lieu des zéros : ce sont des singularités.

Le premier à avoir étudié ces objets est Isaac Newton, lorsqu'il a classifié les cubiques : sa méthode consiste alors à démontrer l'existence de séries de Puiseux : on se donne une courbe algébrique X dans \mathbb{C}^2 donnée par une équation affine $P(x, y) = 0$ et passant par l'origine, on suppose de plus que X n'est pas l'axe $x = 0$. Une extension de Puiseux de P en $(0, 0)$ est alors une série de Puiseux f telle que X soit définie par $F(x, f(x)) = 0$ (une série de Puiseux est une série de Laurent en une racine n -ième de l'indéterminée : il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = \sum_{k \geq k_0} a_k z^{\frac{k}{n}}$).

Ce résultat illustre la méthode classique utilisée quand on étudie les singularités : on cherche une résolution, c'est-à-dire un biméromorphisme propre d'une variété algébrique lisse vers l'espace avec la singularité qui est un isomorphisme en dehors de la singularité. En 1964, Heisuke Hironaka démontre que toute variété algébrique singulière sur un corps de caractéristique nulle admet une résolution. Nous allons maintenant définir plus précisément le cadre dans lequel nous nous placerons pour les résultats à venir.

1.2 Espace analytique complexe

Bien que les résultats sont obtenus sur des objets de dimension deux, nous allons dans un premier temps nous placer dans le cas de la dimension quelconque pour définir plus généralement les objets que nous étudierons.

Définition 1.1. Un sous-ensemble analytique fermé de \mathbb{C}^n est un sous-ensemble $X \subset \mathbb{C}^n$ qui s'obtient en intersectant l'ensemble des zéros d'un nombre fini de fonctions holomorphes.

On observe que de tels sous-ensembles se comportent bien vis à vis de l'intersection ou de la réunion, mais nous allons nous placer dans un cadre plus général dans notre étude.

Définition 1.2. Un espace analytique complexe est un sous-ensemble X de \mathbb{C}^n qui est localement isomorphe à un sous-ensemble analytique fermé de \mathbb{C}^n .

Ainsi, en tout point p d'un espace analytique complexe X , on peut trouver un voisinage ouvert V_p dans \mathbb{C}^n de p et des fonctions holomorphes $f_1 \dots f_r$ sur V_p telles que $X \cap V_p = \{f_1 = \dots = f_r = 0\}$.

Définition 1.3. Un espace analytique complexe est réductible s'il existe deux sous-espaces analytiques complexes $X_1, X_2 \subsetneq X$ tels que $X = X_1 \cup X_2$. Sinon, X est irréductible.

Si $X = \cup X_i$ où les X_i sont irréductibles, alors, en supprimant les X_i tels qu'il existe j tel que $X_i \subset X_j$, on arrive à une décomposition où aucune des composantes n'est incluse dans une autre. On dit alors que les X_i sont les composantes irréductibles de X .

1.3 Singularités

Afin de définir les singularités, il nous faut dans un premier temps définir l'espace tangent en un point d'un espace analytique complexe.

Soit X un espace analytique complexe, et $x \in X$. On suppose que les coordonnées dans \mathbb{C}^n sont telles que $x = (0, \dots, 0)$. Soit $L = \{ta, t \in \mathbb{C}\}$ une droite, où a est un point de \mathbb{C}^n . Localement en x , il existe des fonctions $F_1 \dots F_r$ telles que $X = \{F_1 = \dots = F_r = 0\}$, de sorte que $L \cap X$ est donné par les équations $F_1(ta) = \dots = F_r(ta) = 0$. Alors la droite L est tangente à X en x si pour tout i , $d(F_i)_0(a) = 0$.

L'ensemble des droites tangentes à X en x est appelé l'espace tangent T_x , c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n .

On suppose désormais que X est de plus irréductible. Soit T l'ensemble des points (x, a) de $X \times \mathbb{C}^n$ tels que $a \in T_x$. On appelle cet espace la fibration tangente à X .

Définition 1.4. Soit X un espace analytique complexe irréductible et soit $s = \min_{x \in X} \dim T_x$. Alors un point $x \in X$ n'est pas singulier si $\dim(T_x) = s$, on dit aussi que X n'est pas singulière en x ; sinon x est un point singulier.

Exemple. On considère l'espace analytique complexe fermé de \mathbb{C}^2 défini par $\{f(x, y) := x^2 - y^3 = 0\}$. Alors on remarque que en $(0, 0)$, l'espace tangent est de dimension deux. En effet, pour tout $a = (a_x, a_y)$, $f(ta) = t^2 a_x^2 - t^3 a_y^3$ donc la dérivée s'annule. Cependant l'espace tangent n'est que de dimension 1 sur les autres points du sous-ensemble, donc $(0, 0)$ est une singularité.

Un point singulier est dit isolé s'il existe un voisinage de ce point dans lequel il n'y a pas d'autre singularité.

Les points singuliers sont plus difficiles à appréhender que les autres : un espace complexe analytique sans singularités est une variété lisse. Il est donc usuel de chercher à les comprendre afin de s'en débarrasser.

1.4 Résolution de singularités

On cherche ici à comprendre comment il est possible de simplifier les singularités et de comprendre leur structure en les modifiant. Ainsi, nous allons dans un premier temps introduire la notion de résolution de singularité avant d'en illustrer des exemples.

Définition 1.5. Soit Y une espace analytique singulier de lieu singulier Z , une résolution de $(Y, 0)$ est une application biméromorphe propre $\phi : X \rightarrow Y$ telle que :

- X est une variété lisse,
- $\phi|_{X \setminus \phi^{-1}(Z)} : X \setminus \phi^{-1}(Z) \rightarrow Y \setminus Z$ est un isomorphisme.

Plus généralement, on peut considérer ce type de biholomorphisme sans imposer que X soit lisse : il peut y avoir des singularités dans $\phi^{-1}(Z)$. On appelle alors ce type d'applications des modifications de Y .

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre les singularités, nous allons ici en décrire deux.

1.5 Normalité

Définition 1.6. Soit X un espace analytique complexe inclus dans \mathbb{C}^n , alors \mathcal{O}_X est l'ensemble des fonctions holomorphes sur X qui s'obtiennent en restreignant les fonctions holomorphes de \mathbb{C}^n à X . Il s'obtient en quotientant cet espace par l'ensemble des fonctions holomorphes qui s'annulent sur X .

On définit aussi \mathcal{O}_x pour $x \in X$ comme l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur un voisinage de x dans X , et \mathfrak{J}_x son idéal maximal (les fonctions holomorphes qui s'annulent en x).

Définition 1.7. Un espace analytique complexe X est dit normal si l'anneau \mathcal{O}_X est intégralement clos.

On dit de même d'un point singulier $x \in X$ qu'il est singulier si \mathcal{O}_x est intégralement clos.

On s'intéresse à de tels espaces car ils permettent d'étendre les fonctions holomorphes : soit X un espace analytique complexe, $Y \subset X$ un sous-espace analytique complexe normal, et soit $f : X \subset Y \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f s'étend de manière unique sur Y en une fonction holomorphe sur X .

Cette propriété nous sera très utile dans la suite du mémoire, cependant tous les espaces analytiques ne sont pas normaux. Il est néanmoins de normaliser un espace analytique complexe :

Définition 1.8. Une normalisation d'un espace analytique complexe irréductible X est la donnée d'un autre espace analytique complexe X^ν et d'une application $\nu : X^\nu \rightarrow X$ qui est d'ordre fini et biméromorphe.

Dans le cas d'un espace analytique complexe réductible, on le sépare en composantes irréductibles, puis on fait la réunion disjointe des normalisés.

Cette méthode permet parfois de résoudre des singularités : le lieu singulier d'un espace analytique complexe normal est toujours au moins de codimension 2. On peut ainsi résoudre les singularités de courbes, mais pas seulement.

Exemple. Soit $X \subset \mathbb{C}^3$ l'espace analytique affine donné par l'équation $x^2 - zy^2 = 0$. Il n'est pas normal, car l'intégralité de l'axe z est singulier et le lieu singulier est donc de codimension 1.

Cependant la normalisation de X est $\nu : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ définie par $\nu(y, w) = (yw, y, w^2)$ qui est aussi une résolution de X .

1.6 Éclatement

On introduit dans cette partie une méthode classique de résolution des singularités, l'éclatement d'un point. On considère donc les espaces \mathbb{C}^n , de coordonnées homogènes x_1, \dots, x_n ; et \mathbb{P}^{n-1} , de coordonnées homogènes y_1, \dots, y_n . Soit $\Pi \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ la sous-variété algébrique définie par les équations :

$$x_i y_j = x_j y_i \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, n.$$

Définition 1.9. La projection sur la première coordonnée $\sigma : \Pi \rightarrow \mathbb{C}^n$ est appelée éclatement de l'origine dans \mathbb{C}^n .

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point qui n'est pas l'origine, les équations ci-dessus impliquent $(y_1 : \dots : y_n) = (x_1 : \dots : x_n)$ et donc x n'a qu'une seule préimage. Ainsi $\tau : \mathbb{C}^n \setminus 0 \rightarrow \Pi$ définie par :

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow ((x_1, \dots, x_n), (x_1 : \dots : x_n))$$

est l'inverse de σ sur $\Pi \setminus \sigma^{-1}(0)$.

La préimage de l'origine est $\{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Exemple. Soit X la courbe algébrique de \mathbb{C}^2 définie par l'équation $x^2 = y^3$. Cette courbe a une unique singularité en l'origine, on va donc éclater ce point pour résoudre la singularité.

On considère donc l'ensemble $\Pi \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ des points de la forme $((x, y), (u : t))$ tels que $xt = yu$. On se place ensuite dans la carte de \mathbb{P}^1 formée des points de la forme $(u : 1)$, et on regarde le tiré en arrière de X par l'éclatement : ce sont les points de \mathbb{C}^3 qui vérifient $x = uy$ et $x^2 = y^3$, soit l'union de $\{x = y = 0\}$ (le diviseur exceptionnel) et de $\{(u^3, u^2, u), u \in \mathbb{C}\}$ (appelée la transformée stricte) qui sont deux courbes algébriques lisses. Il en est de même dans l'autre carte de \mathbb{P}^1 .

Cette méthode est très importante puisqu'elle a été utilisée par Hironaka dans sa démonstration de l'existence de résolutions.

1.7 Diviseur et nombre d'intersection

Définition 1.10. Soit X un espace analytique complexe inclus dans \mathbb{C}^n .

Un diviseur de Weil sur X est une combinaison linéaire formelle de sous-variétés irréductibles C_1, \dots, C_r de X de codimension 1 :

$$D = k_1 C_1 + \dots + k_r C_r$$

où $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ sont les multiplicités de C_1, \dots, C_r .

Si tous les k_i sont nuls, on note $D = 0$. S'ils sont positifs, on dit que D est effectif.

Si on se place dans les résolutions de singularités, qui sont des variétés lisses, les diviseurs sont tous des diviseurs de Cartier, c'est-à-dire que l'on peut trouver des fonctions qui annulent localement les composantes du diviseur. Dorénavant, nous parlerons donc de diviseurs pour parler de diviseurs de Cartier.

L'ensemble des diviseurs est naturellement muni d'une addition.

Par exemple, soit f une fonction rationnelle sur X , on y associe naturellement un diviseur en regardant ses zéros et ses pôles avec multiplicités. Un tel diviseur est dit principal.

On veut maintenant définir l'intersection de plusieurs diviseurs. Si on choisit k diviseurs D_1, \dots, D_k , alors $Supp D_1 \cap \dots \cap Supp D_k$ est au moins de dimension $n - k$; il est donc naturel de s'intéresser au cas $n = k$. Soit $x \in \bigcap Supp D_i$, on dit que les diviseurs sont en position générale en x si localement l'intersection des diviseurs n'est que $\{x\}$. Ils sont en position générale s'ils sont en position générale en tout point de l'intersection de leurs supports.

On définit tout d'abord l'intersection dans le cas de diviseurs effectifs. Soient donc D_1, \dots, D_n des diviseurs effectifs, annulés par des fonctions f_1, \dots, f_n au voisinage de x . Il existe un tel voisinage U tel que f_1, \dots, f_n soient régulières sur U et qu'elles n'aient pas de zéros communs sur U qui ne soit pas x . On sait alors par le Nullstellensatz qu'il existe k tel que $\hat{\mathbb{Z}}_x^k \subset \langle f_1, \dots, f_n \rangle$.

Définition 1.11. On définit le nombre d'intersection de D_1, \dots, D_n en x comme la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{O}_x / \langle f_1, \dots, f_n \rangle$.

Le nombre d'intersection est ensuite la somme des nombres d'intersection en chaque point de $Supp D_1 \cap \dots \cap Supp D_n$.

Cette définition ne dépend pas du choix des fonctions f_i choisies, ni de l'ordre des diviseurs. De plus, on observe que pour tous diviseurs effectifs D_1, \dots, D_n et D'_1 , on a :

$$(D_1 + D'_1) D_2 \cdots D_n = D_1 \cdots D_n + D'_1 \cdots D_n$$

Dans le cas de diviseurs non effectifs, on étend par linéarité en écrivant $D = D_+ - D_-$ avec D_+, D_- des diviseurs effectifs.

De plus, les nombres d'intersections vérifient la propriété suivante :

Proposition 1.12. Soit f une fonction rationnelle sur X , et (f) le diviseur associé. Alors pour tout D_2, \dots, D_n en position générale par rapport à f , $(f) D_2 \cdots D_n = 0$.

On peut ainsi étendre la définition des nombres d'intersections aux cas où les diviseurs ne sont pas en position générale : on choisit des fonctions f_i qui a des zéros et des pôles sur les diviseurs de sorte que les $D_i - (f_i)$ soient en position générale (il est possible de trouver des fonctions qui vérifient cette proposition).

1.8 Auto-intersection

On s'intéresse maintenant au cas où X est une variété algébrique de dimension 2. Dans ce cas, les diviseurs sont des sommes formelles de courbes algébriques, et il est possible de définir l'auto-intersection d'une telle courbe en la déplaçant via un diviseur principal.

Exemple. On se replace dans le cas de l'éclatement Π de l'origine dans \mathbb{C}^2 . Le diviseur exceptionnel de Π est la préimage de l'origine : $D = \{0\} \times \mathbb{P}^1$. On veut calculer l'auto-intersection de D .

Soient $((x, y), (u : t))$ les coordonnées de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$. On se place tout d'abord dans la carte de \mathbb{P}^1 donnée par $t = 1$, Π est alors déterminée par l'équation $x = uy$, donc le diviseur exceptionnel est l'ensemble des points tels que $y = 0$. Soit donc f la fonction projection sur la coordonnée y .

Si on change de coordonnée dans \mathbb{P}^1 , Π est donnée par $y = xt$. Ainsi, dans cette carte, $f = xt$. Ainsi le diviseur (f) est l'union des axes $x = 0$ et $t = 0$, et le diviseur exceptionnel est $\{x = 0\}$.

On calcule enfin l'auto-intersection de D :

$$D \cdot D = D \cdot (D - (f)) = D \cdot -1 \cdot \{t = 0\} = -D \cdot \{t = 0\} = -1.$$

Réciproquement, on peut démontrer que toute courbe algébrique d'auto-intersection -1 provient de l'éclatement d'un point lisse. Il est alors usuel de les contracter un en point.

Nous allons enfin avoir besoin du résultat suivant.

Proposition 1.13. *Soit X une variété algébrique de dimension 2, et $x \in X$ un point singulier. Soit $\phi : Y \rightarrow X$ une modification de X , et D son diviseur exceptionnel.*

Il est somme d'un nombre fini de courbes irréductibles C_i . Alors la matrice d'intersection $(C_i \cdot C_j)_{ij}$ est définie négative.

Réciproquement, si on se donne un nombre fini de courbes irréductibles C_i telles que la matrice d'intersection $(C_i \cdot C_j)_{ij}$ est définie négative, alors il est possible de les contracter en un point singulier.

2 Automorphismes contractants sur une surface complexe singulière

2.1 Énoncé du problème

On se place maintenant sur une surface complexe Y avec une singularité normale à l'origine. On suppose qu'il existe un automorphisme f sur Y contractant sur l'origine. Il n'est a priori pas possible de construire un tel automorphisme sur n'importe quelle surface complexe. Il est donc légitime de se demander si, étant donné une surface complexe admettant un automorphisme contractant, il est possible d'obtenir des conditions sur la structure de la singularité.

Dans un premier temps, nous allons donner un exemple de variété algébrique admettant de tels automorphismes.

Soient $(w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et P_1, \dots, P_k des polynômes homogènes à poids, c'est-à-dire tels que

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \quad P_i(t^{w_1} x_1, \dots, t^{w_n} x_n) = t^{d_i} P_i(x_1, \dots, x_n)$$

pour un certain d_i entier. L'automorphisme $f_t(x) = (t^{w_1} x_1, \dots, t^{w_n} x_n)$ est alors un automorphisme contractant pour $|t| < 1$ qui laisse invariant l'espace analytique $Y = \bigcap_{i=1}^d \{P_i = 0\}$. Une telle singularité est appelée singularité homogène à poids.

Il est maintenant possible d'énoncer le théorème que nous allons démontrer.

Théorème 2.1. *Soit $(Y, 0)$ une singularité de surface complexe normale, et $f : (Y, 0) \rightarrow (Y, 0)$ un automorphisme contractant.*

Alors $(Y, 0)$ est une singularité homogène à poids qui est soit une singularité à quotient cyclique, soit il existe $N > 0$, $|t| < 1$ tels que $f^N = f_t$.

Afin de prouver ce théorème, nous allons dans un premier temps nous placer dans une résolution particulière de la singularité $(Y, 0)$ et construire une fonction de Green pour la fonction

f afin de mieux comprendre la convergence de f . Cela nous permet de montrer que le graphe dual de la résolution est étoilé. On peut alors séparer en deux situations : soit le graphe dual est une chaîne de courbes rationnelles, auquel cas $(Y, 0)$ est une singularité quotient, soit une des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel qui n'est pas hyperbolique, et la singularité s'obtient en quotientant un fibré en droites sur une surface de Riemann compacte par une action de groupe fini, puis en contractant la section nulle.

2.2 Fonctions contractantes et données admissibles

Définition 2.2. Soit $(Y, 0)$ une singularité, un automorphisme contractant en 0 sur $(Y, 0)$ est un biholomorphisme f tel qu'il existe un voisinage U de 0 dont l'image par f est relativement compacte dans U et tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \{0\}$.

Soit $(Y, 0)$ une singularité, $f : (Y, 0) \rightarrow (Y, 0)$ un automorphisme contractant, alors si f se relève dans les modifications de Y en un automorphisme F , celui-ci est "contractant" sur le diviseur exceptionnel W , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage U de W tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(U) = W$ et $F(U)$ est relativement compact dans U . Nous allons dans la suite voir qu'il est possible de trouver des modifications telles que f se relève bien.

On observe de plus que $F : X \rightarrow X$ est un biholomorphisme sur son image : il suffit de le prouver sur W , puisque en dehors du diviseur exceptionnel, cela provient de ce que f l'est. On prend donc deux points w_1 et w_2 de W , on peut trouver dans X des voisinages U_1 et U_2 de ces points qui ne s'intersectent pas. Mais alors $F(U_1 \setminus W)$ et $F(U_2 \setminus W)$ ont aussi une intersection vide, et comme F se prolonge sur W par normalité, on en déduit que $F(w_1) \neq F(w_2)$.

Enfin, comme F est un biholomorphisme sur W , elle envoie les composantes irréductibles sur des composantes irréductibles. On en déduit alors, comme W a un nombre fini de composantes irréductibles (on suppose que les modifications s'obtiennent en éclatant des points un nombre fini de fois), qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que F^N fixe les composantes irréductibles de W .

Définition 2.3. Une donnée admissible est un triplet (X, W, F) avec :

- X une surface complexe normale connexe,
- W un sous-espace analytique complexe compact et connexe de X ,
- $F : X \rightarrow X$ un biholomorphisme sur son image,
- $F(X) \Subset X, F(W) = W$, et $\bigcap_{n \geq 0} F^n(X) = W$,
- la forme d'intersection de W est définie négative.

La dernière condition assure que W se contracte en une singularité en un point.

On veut alors identifier deux données si elles proviennent d'une même singularité, et si les automorphismes sont conjugués sur celle-ci. En effet, bien que dans un premier temps on se placera dans une résolution particulière de $(Y, 0)$, on aura ensuite vocation à modifier celle-ci pour éclairer certains résultats.

Définition 2.4. Deux données admissibles (X, W, F) et (X', W', F') sont équivalentes s'il existe des voisinages X_1 de W et X'_1 de W' et une application biméromorphe $\Phi : X_1 \rightarrow X'_1$ tels que :

- Φ induit un isomorphisme de $X_1 \setminus W$ sur $X'_1 \setminus W'$,
- (X_1, W, F) et (X'_1, W', F') sont des données admissibles,
- $F' \circ \Phi = \Phi \circ F$.

2.3 Fonction de Green

On souhaite dans cette partie construire une fonction sur les données admissibles qui décroît régulièrement à chaque itération de F . Pour cela, on construit tout d'abord un certain type de résolution pour $(Y, 0)$ qui permette de bien relever F tout en connaissant la structure du diviseur exceptionnel.

Définition 2.5. Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{Y,0}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,0}$. Une log-résolution de \mathfrak{m} est une application biméromorphe $\pi : X \rightarrow Y$ d'une surface lisse X vers Y qui est un isomorphisme sur $Y \setminus \{0\}$ et tel que le tiré en arrière de \mathfrak{m} sur X est localement principal en chaque point du diviseur exceptionnel.

Une bonne résolution de $(Y, 0)$ est une résolution telle que le diviseur exceptionnel ait des croisements normaux simples, c'est-à-dire que ses composantes irréductibles sont lisses, qu'elles s'intersectent transversalement et que trois composantes n'ont pas d'intersection commune.

Proposition 2.6. Soit $(Y, 0)$ une singularité de surface normale isolée. Alors $(Y, 0)$ admet une log-résolution $\pi : X \rightarrow Y$ qui est une bonne résolution et telle que tout automorphisme de Y se relève en un automorphisme de X .

Une telle résolution sera appelée une *résolution sympathique* de Y . On s'intéresse à de telles résolutions car elles nous permettent de mieux appréhender la structure locale du diviseur exceptionnel : dans le cas d'une log-résolution X , en tout point p du diviseur exceptionnel on peut trouver des coordonnées (z, w) telles que le tiré en arrière de \mathfrak{m} pris en p soit engendré par $z^a w^b$ avec a, b des entiers positifs.

On peut munir une donnée admissible (X, W, F) d'une distance en le plongeant dans \mathbb{C}^n pour un certain n puis en restreignant à X la distance euclidienne. On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.7. Soit (X, W, F) une donnée admissible, on suppose que X est lisse et a des croisements normaux simples. Alors il existe une fonction $g : X \rightarrow [-\infty, 0]$ lisse sur $X \setminus W$ et telle que :

- g est bornée sur $X \setminus F^n(X)$ pour tout $n \geq 1$,
- $g(p) \leq \log(\text{dist}(p, W))$ pour tout $p \in X$,
- pour tout $C > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que $g \circ F^N \leq g - C$ sur X .

Remarque. On peut remarquer que si le théorème est vrai pour une donnée admissible, alors il l'est aussi pour toute donnée admissible équivalente en conjuguant g par l'isomorphisme.

La preuve de cette proposition est assez laborieuse et nécessite l'utilisation de fonctions plurisousharmoniques (cf. ANNEXE 1). Pour des raisons de lisibilité de cette introduction au domaine de recherche, je la place donc en ANNEXE 2.

2.4 Graphe dual

Dans cette partie, on étudie le cas des données admissibles (X, W, F) telles que X est lisse, W a des croisements normaux simples et F est holomorphe et fixe chaque composante irréductible de W . Ces conditions permettent d'appréhender facilement le graphe dual ; et donc de comprendre la structure de W .

2.4.1 Énoncé du théorème

Afin de pouvoir énoncer le théorème, il faut dans un premier temps introduire certaines notions que l'on utilisera ensuite :

Définition 2.8. Soit $(Y, 0)$ une singularité de surface, et $\pi : X \rightarrow Y$ une bonne résolution. Soit $W = \pi^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel, et $E_1 \dots E_n$ ses composantes irréductibles. Le graphe dual de $E_1 \dots E_n$ est le graphe dont les sommets sont $E_1 \dots E_n$, et deux sommets sont reliés si les composantes correspondantes s'intersectent.

Définition 2.9. • Soit E une surface de Riemann compacte, un automorphisme $h : E \rightarrow E$ est dit hyperbolique si E est isomorphe à la sphère de Riemann et si h a un point fixe attractif, et donc aussi un point fixe répulsif.

- Soit X une surface complexe lisse, un cycle (resp. une chaîne) de courbes rationnelles sur X est un ensemble fini de courbes rationnelles E_1, \dots, E_n qui s'intersectent transversalement et dont le graphe dual est un cercle (resp. un segment).
- Un graphe est dit étoilé si c'est un arbre qui n'admet qu'au plus un point avec plusieurs branches. Par exemple, un segment (graphe dual associé à une chaîne de courbes rationnelles) est étoilé.

Théorème 2.10. *Soit (X, W, F) une donnée admissible telle que X est lisse, W a des croisements normaux simples et F est holomorphe et fixe chaque composante irréductible de W ; alors le graphe dual $\Gamma(W)$ de W est étoilé. Plus précisément,*

- soit le support de W est une chaîne de courbes rationnelles et F est hyperbolique sur chaque composante irréductible de W ,
- soit il existe E^* composante irréductible de W telle que $F|_{E^*}$ n'est pas hyperbolique. Dans ce cas, F est hyperbolique sur toutes les autres composantes, et $\overline{W \setminus E^*}$ est l'union d'un nombre fini de chaînes. De plus, si E^* n'est pas une courbe rationnelle, $F|_{E^*}$ a ordre fini.

2.4.2 Cas où toutes les composantes sont hyperboliques

Dans un premier temps, on considère une résolution sympathique $\pi : X \rightarrow (Y, 0)$, et on suppose que F est hyperbolique sur chaque composante irréductible de W . Toutes les composantes sont donc des courbes rationnelles, et le graphe dual est soit un segment, soit un cycle. En effet, les applications hyperboliques n'ont que deux points fixes, donc une composante irréductible ne peut en intersecter qu'au plus deux.

Proposition 2.11. *Sous ces hypothèses, W ne peut pas être un cycle.*

Cette proposition montre donc la première partie du théorème. On a d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 2.12. *Soit $p \in W$ un point fixé par F .*

- Si p appartient à une unique composante irréductible E , alors $dF(p)$ admet une valeur propre de module < 1 et de vecteur propre transverse à E .
- Si p est le point d'intersection entre deux composantes irréductibles E et E' , alors

$$\frac{\log|dF|_E(p)|}{a_E} + \frac{\log|dF|_{E'}(p)|}{a_{E'}} < 0$$

où $a_E = \text{ord}_E(\mathbf{m} \cdot \mathcal{O}_Y)$ est l'ordre d'annulation de $\pi^*\mathbf{m}$ le long de E et $a_{E'} = \text{ord}_{E'}(\mathbf{m} \cdot \mathcal{O}_Y)$.

Démonstration. On traite dans un premier temps le second cas.

Soit g la fonction de Green donnée par la partie précédente, et soient (z, w) des coordonnées locales en p telles que $E = \{z = 0\}$ et $E' = \{w = 0\}$. On a vu que dans de telles coordonnées,

$$|g(z, w) - a_E \log|z| - a_{E'} \log|w|| \leq C$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Soient $\lambda = (dF|_{E'})(p)$ et $\mu = (dF|_E)(p)$. Comme E et E' sont invariants par l'action de F , dF est diagonale en p dans la base (z, w) et donc pour tout entier $N > 0$,

$$F^N(z, w) = (\lambda^N z(1 + \epsilon_N), \mu^N w(1 + \nu_N))$$

où ϵ et ν sont continues et $\epsilon(0) = \nu(0) = 0$.

On choisit une constante $C' > 2C$, par la proposition de la partie précédente, il existe $N > 0$ tel que $g \circ F^N(z, w) \leq g(z, w) - C'$. Ainsi :

$$a_E \log|\lambda^N z| + a_{E'} \log|\mu^N w| - C + \mathcal{O}(z, w) \leq g(F^N(z, w)) \leq g(z, w) - C' \leq a_E \log|z| + a_{E'} \log|w| + C - C'$$

d'où :

$$N(a_E \log|\lambda| + a_{E'} \log|\mu|) \leq 2C - C' + \mathcal{O}(z, w).$$

En faisant tendre (z, w) vers 0, et en divisant par $a_E a_{E'}$ on obtient le résultat.

Pour le premier cas, on choisit une base (z, w) en p de sorte que $E = \{z = 0\}$ et que l'ensemble $\{w = 0\}$ soit aussi invariant par l'action de F , puis on raisonne comme précédemment mais avec les formules adaptées. \square

On peut maintenant prouver la proposition.

Démonstration. On suppose que W est un cycle. On énumère les composantes irréductibles $E_0 \dots E_{n-1}$ de W de sorte que $E_i \cdot E_j = 1$ si et seulement si $|i - j| = 1$, et $E_n = E_0$. Soit $p_j = E_j \cap E_{j+1}$, $\lambda_j = dF|_{E_j}(p_j)$ et $\mu_j = dF|_{E_{j+1}}(p_j)$. Comme $F|_{E_j}$ est hyperbolique, $\lambda_j = \mu_j^{-1}$.

Soit $a_j := \text{ord}_{E_j}(\mathbf{m} \cdot \mathcal{O}_Y)$. Par le lemme,

$$0 > \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\log|\lambda_j|}{a_{E_j}} + \frac{\log|\mu_j|}{a_{E_{j+1}}} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\log|\lambda_j|}{a_{E_j}} - \frac{\log|\lambda_{j+1}|}{a_{E_{j+1}}} \right) = 0$$

ce qui est absurde, donc W ne peut pas être un cycle. \square

2.4.3 Composante non-hyperbolique

On veut montrer qu'il existe au plus une composante irréductible E^* de W telle que $F|_{E^*}$ n'est pas hyperbolique.

Proposition 2.13. *On suppose qu'il existe E^* telle que $F|_{E^*}$ n'est pas hyperbolique. Soit d la distance usuelle sur le graphe dual. Soit $E \neq E^*$. Alors :*

- E est une composante rationnelle sur laquelle F est hyperbolique,
- Il existe une unique composante irréductible E' intersectant E telle que $d(E', E^*) = d(E, E^*) - 1$,
- Si $p = E \cap E'$, alors $|dF|_E(p)| < 1$, et si $E' = E^*$, alors $|dF|_{E'}(p)| = 1$, sinon $|dF|_{E'}(p)| > 1$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence $n = d(E^*, E')$.

Pour $n = 1$, le deuxième point est évident. Comme $dF|_{E^*}(p)$ est de module 1 car $F|_{E^*}$ n'est pas hyperbolique, on en déduit par le lemme que $|dF|_E(p)| < 1$, et donc que $F|_E$ est hyperbolique. Ceci montre les deux autres points.

On suppose le résultat vrai au rang n .

Soit E tel que $d(E^*, E) = n + 1$. Alors il existe E' tel que $d(E^*, E') = n$ et $p := E' \cap E \neq \emptyset$. Par induction il existe une unique composante irréductible E'' telle que $E'' \cap E' = \{p'\} \neq \emptyset$ et $d(E^*, E'') = n - 1$. De plus, $|dF|_{E'}(p')| < 1$, donc $|dF|_{E'}(p)| > 1$. En appliquant le lemme, on en déduit que $|dF|_E(p)| < 1$ donc $F|_E$ est hyperbolique.

Si E intersecte une autre composante \hat{E} qui est à une distance n de E^* , alors $\hat{p} = E \cap \hat{E}$ est fixé par F et est donc le deuxième point fixe de E , ainsi $|dF|_E(\hat{p})| > 1$.

On a alors $|dF|_{\hat{E}}(\hat{p})| < 1$, et donc la distance de \hat{E} à E^* ne peut pas être égale à n sous peine de contredire l'hypothèse de récurrence. On en déduit les deuxième et troisième points. \square

2.5 Cas où E^* est d'ordre infini

On cherche dans cette partie à mieux comprendre E^* . Comme $F|_{E^*}$ n'est pas hyperbolique, elle est soit elliptique, soit un tore complexe. Cependant ce dernier cas implique que $F|_{E^*}$ est d'ordre fini.

Proposition 2.14. *Si E^* est un tore complexe, alors $F|_{E^*}$ est d'ordre fini.*

Démonstration. Soit L le fibré normal à E^* dans X , et $n < 0$ son degré. Comme on a supposé que E^* est un tore, on peut écrire $E^* = \mathbb{C}/\Lambda$, avec Λ un réseau dans \mathbb{C} , et on peut supposer que $F|_{E^*}$ est une translation par $\tau \in \mathbb{C}$. Tout diviseur de degré n dans E^* est linéairement équivalent à $(n-1)[0] + [p]$ avec $p \in E^*$ unique par rapport au groupe de Picard. On écrit alors $L = (n-1)[0] + [p]$. Or $F|_{E^*}$ fixe L , donc $n[\tau] + (n-1)[0] + [p] = (n-1)[0] + [p]$, ce qui implique $n[\tau] = 0$ dans E^* et donc $F|_{E^*}$ est d'ordre fini. \square

2.6 Cas général

On ne suppose plus désormais que (X, W, F) est une résolution sympathique, mais on se place simplement dans le cas où X est lisse et W a des croisements normaux simples.

Cela implique que $\pi^*\mathfrak{m}$ admet un ensemble non-vide B de points de bases dans W , où $\pi^*\mathfrak{m}$ n'est pas localement principale. Comme \mathfrak{m} reste invariant sous l'action de f , on en déduit que B est stable par F . Il existe une résolution sympathique $\mu : \hat{X} \rightarrow X$ obtenue en éclatant des points près des points de base. Soit $\hat{W} = \mu^{-1}(W)$ et $\hat{F} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ le relevé de F . On prend $N \gg 1$ suffisamment grand pour que \hat{F}^N fixe les composantes irréductibles de \hat{W} .

On peut alors appliquer les points précédents à $(\hat{X}, \hat{W}, \hat{F})$. On sépare alors en deux cas.

On étudie dans un premier temps le cas où le support de \hat{W} est une chaîne de courbes rationnelles sur lesquelles \hat{F} est hyperbolique. En contractant $\mu^{-1}(B)$, on voit que W reste une chaîne de courbes rationnelles, et que F est aussi hyperbolique sur chaque composante irréductible ; on obtient ainsi le premier point du théorème.

Le second cas consiste à considérer qu'il existe une composante irréductible \hat{E}^* sur laquelle \hat{F} n'est pas hyperbolique. Tout comme précédemment, si \hat{W} est le support d'une chaîne de courbes rationnelles, on conclut que W l'est aussi. De plus, si $\hat{E}^* \subset \mu^{-1}(B)$, alors elle est contractée et F est hyperbolique sur toutes les composantes de W . Sinon, $E^* = \mu(\hat{E}^*)$ est l'unique composante sur laquelle F n'est pas hyperbolique, et on est dans le deuxième cas du théorème.

On suppose maintenant que \hat{W} n'est pas le support d'une chaîne de courbes rationnelles.

Si \hat{E}^* n'est pas dans $\mu^{-1}(B)$, alors cette composante n'est pas contractée et seule des composantes hyperboliques le sont, ainsi W a la même forme que \hat{W} (a quelques composantes hyperboliques dans les branches près) et donc W vérifie le deuxième point du théorème.

Sinon, \hat{E}^* est rationnelle, et intersecte au moins trois composantes de \hat{W} . Comme W a des croisements normaux simples, si l'on ne contracte pas l'entièreté de certaines courbes, alors plus de deux composantes irréductibles de W se croiseront en $p := \mu(\hat{E}^*)$. Ainsi, W doit être une chaîne de courbes rationnelles.

On a donc traité tous les cas possible, ce qui conclut la preuve.

2.7 Chaîne de courbes rationnelles négatives

On souhaite maintenant contracter les courbes d'auto-intersection -1 pour simplifier la forme de la résolution : il sera alors possible de reconnaître la résolution d'un certain type de singularités.

Une courbe rationnelle est dite négative si son nombre d'auto-intersection est inférieur ou égal à -2 .

Théorème 2.15. *Soit (X, W, F) une donnée admissible avec X lisse, W a des croisements normaux simples et F qui fixe chaque composante irréductible de W . Alors on est dans l'une des situations suivantes, à donnée admissible près :*

- *Le support de W est une chaîne de courbes rationnelles négatives, et F est hyperbolique sur toutes les composantes irréductibles de W sauf au plus une.*
- *Il existe E^* avec $E^* \cdot E^* \leq -1$ telle que $F|_{E^*}$ est d'ordre fini. Dans ce cas, la fermeture de $W \setminus E^*$ est l'union d'un nombre fini de courbes rationnelles négatives, et F est hyperbolique sur toutes les composantes irréductibles différentes de E^* .*

Démonstration. • On suppose que W est une chaîne de courbes rationnelles. Comme W peut être contractée en un point, on a pour toute composante irréductible E de W $E \cdot E \leq -1$. S'il existe E telle que $E \cdot E = -1$, on peut contracter cette composante en un point et obtenir ainsi une nouvelle chaîne qui peut toujours être contractée en un point. En itérant ce procédé, on en déduit que l'on peut contracter W en une chaîne de courbes rationnelles négatives.

- Sinon, on est dans le deuxième point du théorème, et il existe une unique composante E^* sur laquelle F n'est pas hyperbolique. Si $F|_{E^*}$ n'est pas d'ordre fini, comme elle n'est pas hyperbolique, c'est soit une translation, soit une rotation d'ordre infini. Elle admet donc un ou deux points fixes, et donc la fermeture de $W \setminus E^*$ est composée d'au plus deux chaînes de courbes rationnelles sur lesquelles F est hyperbolique. Ainsi W est une chaîne de courbes rationnelles et on se reporte au premier point. Ainsi $F|_{E^*}$ a un ordre fini.

Comme précédemment, on peut enlever les courbes rationnelles hyperboliques d'auto-intersection -1 dans les chaînes de W , et donc on en déduit que $E^* \cdot E^* \leq -1$. □

2.8 Singularités d'Hirzebruch-Jung

Définition 2.16. Soient $p, q > 0$ deux entiers premiers entre eux, alors la singularité d'Hirzebruch-Jung $(\chi_{p,q}, 0)$ est le germe à l'origine obtenu en quotientant \mathbb{C}^2 par l'action $(x, y) \rightarrow (\zeta x, \zeta^q y)$ où ζ est une racine p -ième de l'unité.

La résolution maximale d'une telle singularité est une chaîne de courbes rationnelles négatives d'auto-intersections $-b_1, \dots, -b_n$ où b_1, \dots, b_n sont caractérisés par $b_i \geq 2$ pour tout i et :

$$\frac{p}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \dots}}$$

Réciproquement, si on se donne une chaîne de courbes rationnelles, il est possible de les contracter en une singularité d'Hirzebruch-Jung.

Proposition 2.17. *On considère une chaîne de courbes rationnelles sur une surface X , et un automorphisme $F : X \rightarrow X$ qui laisse la chaîne invariante. Alors on peut contracter toutes les courbes en une singularité d'Hirzebruch-Jung $(Y, 0)$ et F descend en une application $f : (Y, 0) \rightarrow (Y, 0)$.*

De plus, il existe un difféomorphisme local analytique $\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ et un automorphisme linéaire γ de \mathbb{C}^2 d'ordre fini tels que le quotient $\mathbb{C}^2 / \langle \gamma \rangle$ est isomorphe à Y , et \tilde{f} descend en un automorphisme de Y conjugué analytiquement à f .

Démonstration. On contracte la chaîne de courbes en une singularité d'Hirzebruch-Jung.

Comme F est un automorphisme qui préserve la chaîne, il induit un automorphisme f sur $Y \subset \{0\}$ qui s'étend par normalité.

On peut écrire $(Y, 0)$ comme le quotient de \mathbb{C}^2 par un automorphisme d'ordre fini. Ainsi, quitte à restreindre Y , on peut supposer que $\mu : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (Y, 0)$ induit une ramification de $B \setminus \{0\}$ sur $Y \setminus \{0\}$. Comme $B \setminus \{0\}$ est simplement connexe, on en déduit que f se relève en $\tilde{f} : B \setminus \{0\} \rightarrow B \setminus \{0\}$. Finalement, \tilde{f} s'étend en 0 par le lemme de Hartogs. □

On souhaite donc appliquer ce résultat à notre situation. On peut ainsi obtenir la proposition suivante :

Proposition 2.18. *Soit (X, W, F) une donnée admissible avec X lisse, W à croisements normaux simples, et $F : X \rightarrow X$ un automorphisme qui fixe W .*

Soit $E_1 \dots E_n$ une chaîne de courbes rationnelles négatives dans W , telles que $F(E_i) = E_i$ et $F|_{E_i}$ est hyperbolique pour tout i . On suppose de plus qu'il existe E^ fixée point par point par F et qui intersecte transversalement E_1 .*

Alors on peut contracter la chaîne $\cup E_i$ en une singularité d'Hirzebruch-Jung $(Y, 0)$ et F induit un automorphisme $f : (Y, 0) \rightarrow (Y, 0)$. De plus, $(Y, 0)$ est isomorphe à $\mathbb{C}^2 / \langle \gamma \rangle$ où γ est de la forme $\gamma(z, w) = (\zeta z, \zeta^q w)$ avec (z, w) des coordonnées dans \mathbb{C}^2 et ζ une racine p -ième de l'unité avec p et q premiers entre eux. Dans ces coordonnées, f se relève en $(z, w) \mapsto (z, \alpha w)$ avec $0 < |\alpha| < 1$.

Démonstration. Par la proposition précédente, on a des coordonnées (z, w) et γ tels que $\gamma(z, w) = (\zeta z, \zeta^q w)$ et $\mathbb{C}^2 / \langle \gamma \rangle$ est isomorphe à la singularité d'Hirzebruch-Jung $(Y, 0)$ obtenue en contractant la chaîne de courbes négatives. De plus, $f : (Y, 0) \rightarrow (Y, 0)$ se relève dans \mathbb{C}^2 en un automorphisme $\tilde{f} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tel que $\tilde{f} \circ \gamma = \gamma^k \circ \tilde{f}$ pour un certain k premier avec p .

Soit $\pi : X \rightarrow Y$ la contraction de la chaîne, $\mu : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 / \langle \gamma \rangle$ la projection canonique, et $\tilde{E} = \mu^{-1}(\pi(E^*))$.

Comme E^* est une courbe de points fixes de F , alors $\mu(E^*)$ est aussi fixe par f dans Y . Cependant, comme \tilde{E} est constitué de m copies de E^* , les points de \tilde{E} ne sont fixés que par l'action de \tilde{f}^m . En effet, \tilde{f} peut envoyer les copies de E^* les unes sur les autres, mais en remplaçant \tilde{f} par $\tilde{f} \circ \gamma^l$ pour un certain l , on peut fixer tous les points de \tilde{E} .

On en déduit que 1 est une valeur propre de $d\tilde{f}(0)$, car $0 \in \tilde{E}$. Soit $\tilde{p} \in \tilde{E} \setminus \{0\}$. Comme μ est un recouvrement non-ramifié en dehors de 0 et que π est un biholomorphisme sur $E^* \setminus \cup E_j$, on en déduit que $\det(d\tilde{f}(\tilde{p})) = \det(dF(p)) = \alpha$ avec $0 < |\alpha| < 1$ car F est contractante sur W , et $p = \mu^{-1}(\pi(\tilde{p}))$. Comme $\det(F)$ est bornée sur E^* , elle est constante et donc en faisant tendre \tilde{p} vers 0, on en déduit que les valeurs propres de $d\tilde{f}(0)$ sont 1 et α . Ainsi, \tilde{E} est la variété centrale de \tilde{f} en 0, et est donc lisse. La condition $\tilde{f} \circ \gamma = \gamma^k \circ \tilde{f}$ restreinte à \tilde{E} implique $k = 1$.

Soit \tilde{D} la variété stable en 0, qui est lisse et transverse à \tilde{E} . On choisit alors deux fonctions ϕ et ψ de \mathfrak{m} telles que $\tilde{D} = \{\phi = 0\}$ et $\tilde{E} = \{\psi = 0\}$. Soit $\phi_1 = az + bw$ la partie linéaire de ϕ , et ψ_1 la partie linéaire de ψ . Comme \tilde{D} est invariant par l'action de γ , on en déduit que $az + bw$ est proportionnel à $a\zeta z + b\zeta^q w$, de sorte que si $q \neq 1$, $a = 0$ ou $b = 0$. Si $q = 1$, alors γ est une homothétie et on peut supposer que $a = 0$ ou $b = 0$ en faisant un changement linéaire de coordonnées. On opère de même pour \tilde{E} , et on en conclut que $\phi_1 = z$ et $\psi_1 = w$.

De plus, \tilde{E} étant γ invariante, on en déduit que $\psi \circ \gamma$ et ψ ont exactement le même lieu des zéros, et comme elles sont toutes deux holomorphes, elles sont donc proportionnelles. Mais $\psi_1 \circ \gamma = \zeta^q \psi_1$, donc de même $\psi \circ \gamma = \zeta^q \psi$. En raisonnant de la même manière, on observe que $\phi \circ \gamma = \zeta \phi$. Ainsi $\Phi(z, w) = (\phi(z, w), \psi(z, w))$ définit un automorphisme de $(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $\Phi \circ \gamma = \gamma \circ \Phi$. Après conjugaison par Φ , on a donc $\tilde{E} = \{w = 0\}$ et $\tilde{D} = \{z = 0\}$, et $\gamma(z, w) = (\zeta z, \zeta w)$.

Les variétés stables en tout point $\tilde{p} \in \tilde{E}$ forment un feuilletage holomorphe γ -invariant $\tilde{\mathcal{F}}$. On peut supposer, à cause de la structure de $\tilde{\mathcal{F}}$, que ses feuilles sont données par $\{z = cste\}$ en faisant un changement de coordonnées γ -équivariant. Dans ces coordonnées, \tilde{f} est donnée par :

$$\tilde{f}(z, w) = (z, \alpha w(1 + \epsilon(z, w)))$$

où w divise $\epsilon(z, w)$ (car $\epsilon(z, w)$ est holomorphe et tend vers 0 quand (z, w) tend vers 0) ; et ϵ vérifie $\epsilon \circ \gamma = \epsilon$ car \tilde{f} est γ -invariante.

En fixant z et en se plaçant sur une feuille, on peut alors, par le théorème de Koenig, conjuguer la fonction holomorphe contractante $w \circ \tilde{f}(z, w)$ à l'homothétie $w \mapsto \alpha w$ car elles ont la même dérivée en 0. La conjugaison a une forme explicite :

$$\eta_z(w) = \eta(z, w) := w \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \epsilon \circ \tilde{f}^n(z, w)).$$

On observe alors, en exploitant cette forme, que $\eta_z \circ \gamma = \zeta^q \eta_z$.

Finalement, on conjugue \tilde{f} par $(z, w) \mapsto (z, \eta_z(w))$ ce qui conclut la preuve. \square

2.9 Structures d'orbifold et d'orbibudle

Une structure d'orbifold sur une surface de Riemann S est la donnée d'une collection finie de points $\sum m_i p_i$ pris avec multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$. La multiplicité $mult(p)$ d'un point p est m_i si $p = p_i$ et 1 sinon. Pour simplifier, on parlera d'orbifold plutôt que de structure d'orbifold.

Une carte d'orbifold en un point p de multiplicité m est la donnée d'une action holomorphe effective de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur le disque unité \mathbb{D} fixant seulement l'origine, et d'une carte holomorphe de \mathbb{D} sur un voisinage U de p qui se factorise par l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en un isomorphisme.

Exemple. • Soient $p, q > 1$ deux entiers premiers entre eux. Le plan projectif à poids $\mathbb{P}_{p,q}^1$ est le quotient de $\mathbb{C}^2/\{0,0\}$ par l'action $t \cdot \{x, y\} \mapsto \{t^p x, t^q y\}$. La carte $\{x = 1\}$ est isomorphe à $\mathbb{C}/\langle \zeta_p^q \rangle$, où ζ_p est une racine p -ième de l'unité. De même, $\{y = 1\}$ est isomorphe à $\mathbb{C}/\langle \zeta_q^p \rangle$. On en déduit que $\mathbb{P}_{p,q}^1$ est difféomorphe à la sphère de Riemann, et qu'il porte une structure d'orbifold avec $mult([x : y]) = 1$ si $xy \neq 0$, $mult([1 : 0]) = p$ et $mult([0 : 1]) = q$.

- Certains orbifolds peuvent s'obtenir en quotientant une variété lisse M par l'action d'un groupe G qui agit proprement discontinument via des difféomorphismes sur M . On les appelle bons orbifolds.

Une application d'orbifold $\bar{f} : (S, n) \rightarrow (S', n')$ est une application holomorphe $f : S \rightarrow S'$ qui se relève dans les cartes d'orbifold : pour tout p dans S , $mult(p) \cdot deg(f, p) = mult(f(p))$. S'il y a égalité pour tout p , on dit que l'application n'est pas ramifiée. Un recouvrement d'orbifold est une application d'orbifold qui est propre et n'est pas ramifiée. Par exemple, dans le cas d'un bon orbifold, la projection de la variété lisse sur le quotient est un recouvrement d'orbifold.

Soit Aff le groupe des transformations affines de \mathbb{C} , et \mathbb{H} le demi-plan supérieur. On observe que tout sous-groupe discret G de Aff (resp. $PSL_2(\mathbb{R})$) agissant proprement discontinument sur \mathbb{C} (resp. \mathbb{H}) définit une structure d'orbifold sur le quotient \mathbb{C}/G (resp. \mathbb{H}/G). La multiplicité d'un point est égale à l'ordre du groupe d'isotropie de ses préimages dans \mathbb{C} (resp. \mathbb{H}).

Théorème 2.19. *Soit S un orbifold de surface sous-jacente compacte. Alors on est dans l'un des cas suivants :*

- S est un espace projectif à poids ;
- il existe un sous-groupe fini G de $PGL_2(\mathbb{C})$ tel que S est isomorphe à \mathbb{P}^1/G ;
- il existe un sous-groupe discret G de Aff agissant de manière cocompacte sur \mathbb{C} tel que S est isomorphe à \mathbb{C}/G ;
- il existe un sous-groupe discret G de $PSL_2(\mathbb{R})$ agissant de manière cocompacte sur \mathbb{H} tel que S est isomorphe à \mathbb{H}/G .

Ainsi, les seuls orbifolds compacts qui ne sont pas bons sont les espaces projectifs à poids. De plus, en appliquant le lemme de Selberg, on peut obtenir un recouvrement fini pour les bons orbifolds :

Corollaire. *Soit S un bon orbifold compact. Alors il existe une surface de Riemann \tilde{S} et G un sous-groupe fini de $Aut(\tilde{S})$ tels que S est isomorphe à \tilde{S}/G .*

Un orbundle sur un orbifold S est un espace complexe analytique L et une application $\pi : L \rightarrow S$ tels que pour tout $p \in S$ de multiplicité $m \geq 1$, il existe $q \in \mathbb{N}$, une racine m -ième de l'unité primitive ζ , et un voisinage U de p tels que $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/\langle \zeta \rangle \simeq U$ est une application d'orbifolds, et il existe un isomorphisme analytique $\pi^{-1}(U) \simeq \mathbb{D} \times \mathbb{C} \text{mod}(\zeta z, \zeta^q w)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{mod}(\zeta z, \zeta^q w)} & \pi^{-1}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ z \in \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{mod}(\zeta z)} & U \end{array}$$

Les coordonnées (z, w) sur $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ sont appelées trivialisations d'orbifold en p .

Soit $L \rightarrow S$ un fibré en droites sur une surface de Riemann compacte, et G un groupe fini qui agit linéairement sur L , donc qui agit par transformations linéaires sur les fibres. On peut alors former l'espace quotient L/G , qui a une structure d'orbundle sur l'orbifold S/G . Réciproquement,

Théorème 2.20. *Soit $L \rightarrow S$ un orbundle sur un bon orbifold compact. Alors il existe un fibré en droites $L' \rightarrow S'$ sur une surface de Riemann compacte S' et un groupe fini G agissant linéairement sur L' tels que $L \simeq L'/G$.*

2.10 Le théorème principal

Cette section est dédiée à l'énoncé et à la preuve du théorème principal montré dans le papier de Charles Favre et Matteo Ruggiero. Cependant nous allons dans un premier temps nous intéresser à certains exemples typiques de données admissibles qui réapparaîtront plus tard dans la preuve.

2.10.1 Exemples

Exemple. Soient $m, q > 1$ deux entiers premiers entre eux, et ζ une racine m -ième de l'unité. Soit γ l'automorphisme de \mathbb{C}^2 défini par $\gamma(z, w) = (\zeta z, \zeta^q w)$, et \tilde{f} un automorphisme de \mathbb{C}^2 ayant l'une des formes suivantes :

- $\tilde{f}(z, w) = (\alpha z, \beta w)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $0 < |\beta| \leq |\alpha| < 1$,
- $\tilde{f}(z, w) = (\alpha z, \alpha^u w + z^u)$ avec $0 < |\alpha| < 1$ et $u \equiv q[m]$,
- $\tilde{f}(z, w) = (\beta w, \alpha z)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $0 < |\alpha\beta| < 1$ et $q^2 \equiv 1[m]$.

Alors \tilde{f} descend en un automorphisme contractant de la singularité $(\mathbb{C}^2, 0)/\langle \gamma \rangle$.

Exemple. Soit $L \rightarrow S$ un fibré en droites holomorphe de degré négatif sur une surface de Riemann, et $F_\alpha : L \rightarrow L$ une application telle que la restriction de F_α à chaque fibre soit conjuguée à $w \mapsto \alpha w$ avec $|\alpha| < 1$. Alors en contractant la section nulle, on obtient une singularité et F_α induit un automorphisme contractant sur celle-ci.

Exemple. Comme dans l'exemple précédent, on considère $L \rightarrow S$ un fibré en droites holomorphe de degré négatif sur une surface de Riemann. Soit de plus $\phi : S \rightarrow S$ un automorphisme d'ordre fini tel que $\phi^*L = L$, et $\Phi : L \rightarrow \phi^*L$. Alors l'application F décrite dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & F & & \\ & & & & \curvearrowright & & \\ L & \xrightarrow{\Phi} & \Phi^*L & \longrightarrow & L & \xrightarrow{F_\alpha} & L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{id} & S & \xrightarrow{\phi} & S & \xrightarrow{id} & S \end{array}$$

descend sur $(Y, 0)$ en un automorphisme contractant pour $|\alpha|$ suffisamment petit.

Exemple. On se place dans la même situation que pour l'exemple précédent, mais on suppose de plus qu'un groupe fini G agit par automorphismes sur S et linéairement sur L , et que son action commute avec F . Alors F descend sur l'espace quotient Y/G en un automorphisme contractant, et la singularité est encore homogène à poids, c'est-à-dire que c'est une singularité normale avec une action fidèle de \mathbb{C}^* telle que toutes les orbites contiennent la singularité dans leur fermeture.

De plus $L/G \rightarrow S/G$ est un orbibundle. Réciproquement, tout orbibundle de degré négatif sur un bon orbifold s'écrit comme le quotient d'un fibré en droites holomorphe. On peut donc dans ce cas aussi contracter la section nulle pour obtenir une singularité à poids.

2.10.2 Énoncé et preuve du théorème

Théorème 2.21. *Tout automorphisme contractant sur une singularité de surface normale complexe s'obtient avec l'une des constructions décrites dans les exemples ci-dessus.*

Démonstration. Soit Y une surface complexe avec une singularité isolée en 0, et $f : Y \rightarrow Y$ un automorphisme fixant 0 tel que $f(Y)$ est relativement compact et $\bigcap f^n(Y) = 0$.

Soit $\pi : X \rightarrow Y$ une résolution de singularité telle que $W := \pi^{-1}(0)$ est à croisements normaux simples, et f se relève en $F : X \rightarrow X$ holomorphe.

En appliquant le théorème 3, on se restreint à deux possibilités.

Cas 1 : Le lieu exceptionnel W est une courbe de chaînes rationnelles.

On sait alors que $(Y, 0)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^2, 0)/\langle \gamma \rangle$ où γ est un automorphisme d'ordre fini de \mathbb{C}^2 . Soit $\mu : (Y, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la projection. Alors f se relève en $\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ telle que $\mu \circ \tilde{f} = f \circ \mu$ et $\tilde{f} \circ \gamma = \gamma^k \circ \tilde{f}$ pour un certain k entier.

Pour tout voisinage U de 0, $\tilde{f}^N(U)$ est relativement compacte dans U pour $N \gg 1$, donc \tilde{f} est un automorphisme contractant. On donne maintenant une classification de telles germes commutant avec le groupe $\langle \gamma \rangle$.

Proposition 2.22. *Soit $\gamma : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un automorphisme d'ordre fini, et $\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un automorphisme contractant tel que $\tilde{f} \circ \gamma = \gamma^k \circ \tilde{f}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors on est dans le cas du premier exemple.*

Démonstration. Par un théorème de Cartan on peut supposer que γ est linéaire et de la forme $\gamma(x, y) = (\zeta x, \zeta^q y)$ où ζ est une racine p -ième de l'unité primitive, et p et q sont premiers entre eux.

Dans les coordonnées (x, y) , on a :

$$d\tilde{f}(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On sait qu'on a égalité entre

$$d\tilde{f}(0) \circ \gamma = \begin{pmatrix} \zeta a & \zeta^q b \\ \zeta c & \zeta^q d \end{pmatrix} \text{ et } \gamma^k \circ d\tilde{f}(0) = \begin{pmatrix} \zeta^k a & \zeta^k b \\ \zeta^{qk} c & \zeta^{qk} d \end{pmatrix}.$$

Pour que ce soit possible, on a donc les conditions suivantes :

- soit $k \equiv q \equiv 1 [p]$,
- soit $k \equiv 1 [p]$, $q \not\equiv 1 [p]$ et $b = c = 0$,
- soit $k \not\equiv 1 [p]$, $k \equiv q [p]$, $q^2 \equiv 1 [p]$ et $a = d = 0$.

Dans les deux premiers cas, comme $k = 1$, tous les éléments de $\langle \gamma \rangle$ commutent avec \tilde{f} donc on peut appliquer le théorème de la partie 7 : dans le premier cas, on en déduit que \tilde{f} de la forme $\tilde{f}(z, w) = (\alpha z, \beta w + g(z))$ où $g(z) = \sum_{i \equiv q [p]} \alpha_i z^i$. En faisant un changement de coordonnées on se ramène à la deuxième forme de l'exemple. Dans le second cas, on est directement ramené à la

première forme de l'exemple. Dans le dernier cas, les valeurs propres de $d\tilde{f}(0)$ sont opposées (car la trace est nulle) donc il n'y a pas de résonance et la forme de Poincaré-Dulac (cf. ANNEXE 3) est linéaire. On en déduit alors que \tilde{f} se conjugue à $(z, w) \mapsto (\beta w, \alpha z)$ ce qui conclut la preuve. \square

Cas 2. On suppose maintenant que W n'est pas une chaîne de courbes rationnelles.

Il existe alors une composante irréductible $E^* \in W$ telle que $F|_{E^*}$ a un ordre fini, et la fermeture de $W \subset E^*$ est une union finie de chaînes de courbes rationnelles sur lesquelles F est hyperbolique.

On suppose dans un premier temps que $F|_{E^*} = id$.

En contractant toutes les chaînes, on obtient une nouvelle donnée admissible (X', E'^*, F') avec $F'|_{E'^*} = id$. Dans ce cas, X' possède des singularités d'Hirzebruch-Jung $p_1 \dots p_r \in E'^*$. On applique alors la proposition 5.3 pour mieux comprendre la structure locale de E'^* .

Soit $p \in E'^*$, si $p \neq p_j$ pour tout j , alors X' est lisse en p , donc il existe un voisinage V_p de p et un difféomorphisme $\Phi_p : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow V_p$ qui envoie $\{w = 0\}$ sur E'^* et qui conjugue F' à $(z, w) \mapsto (z, \alpha w)$ avec $|\alpha| < 1$. On peut supposer que pour tout j , $p_j \notin V_p$ quitte à prendre un voisinage plus petit.

Si $p = p_j$ est une singularité, on peut trouver un voisinage V_p de p et un recouvrement de Galois (obtenu en quotientant par une action de groupe) $\Phi_p : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow V_p$ avec groupe de Galois généré par $(z, w) \mapsto (\zeta_j z, \zeta_j^{q_j} w)$ où ζ_j est une m_j -ième racine de l'unité primitive et m_j et q_j sont premiers entre eux. De même que précédemment, E'^* est l'image de $\{w = 0\}$ et F' se relève en $(z, w) \mapsto (z, \alpha w)$.

On suppose que pour $p \neq q$, l'intersection $V_p \cap V_q$ est simplement connexe, et qu'elle ne contient aucune des singularités. Ainsi, $\Phi_q^{-1} \circ \Phi_p$ est toujours bien définie dans un voisinage de $\Phi_p^{-1}(V_p \cap V_q \cap E'^*)$, et est unique à pré- ou post-composition par des automorphismes linéaires près. En effet, on peut observer que dans les définitions précédentes, le feuilletage défini par les ensembles $\{z = cste\}$ coïncide avec les variétés stables pour F en les points de E'^* , c'est pourquoi les applications $\Phi_q^{-1} \circ \Phi_p$ sont définies de manière presque unique (on ne peut que décaler les points de E'^* ou jouer sur les rapports de taille dans les variétés stables). On en déduit que $\Phi_q^{-1} \circ \Phi_p$ est de la forme $\Phi_q^{-1} \circ \Phi_p(z, w) = (\Phi_{q,p}(z), \star)$. Comme la restriction de cette application commute avec $w \mapsto \alpha w$, on en déduit :

$$\Phi_q^{-1} \circ \Phi_p(z, w) = (\Phi_{q,p}(z), H_{q,p}(z) \cdot w)$$

où $H_{q,p}$ ne s'annule pas (car $\Phi_q^{-1} \circ \Phi_p$ est bijective).

A partir de ces applications, on peut construire une structure d'orbibundle sur E'^* : dans un premier temps, on considère la variété lisse E'^* et on la munit d'une structure d'orbifold avec $mult(p) = m_j$ si $p = p_j$ et $mult(p) = 1$ sinon. On construit ensuite un espace analytique L en recollant ensemble les ensembles $\{(V_p \cap E'^*) \times \mathbb{C}\}$ pour $p \in E'^*$ avec les applications obtenues ci-dessus (on construit un atlas sur la variété). La projection naturelle $L \rightarrow E'^*$ transforme alors L en orbibundle, et on a un plongement $X' \rightarrow L$ tel que E'^* corresponde à la section nulle de L . Par construction, F agit linéairement sur chaque feuille de L .

On remarque alors que la structure d'orbifold sur E'^* est bonne. En effet, si elle ne l'était pas, l'orbifold serait un plan projectif à poids donc il n'y aurait qu'un ou deux points de multiplicité différente de 1. Mais alors cela signifie donc qu'il y a au plus deux singularités d'Hirzebruch-Jung dans X' , et donc que seulement deux chaînes de courbes rationnelles partent de E^* . On peut alors les assembler en une unique chaîne, et on en revient au cas 1 déjà traité.

L'orbibundle $L \rightarrow E'^*$ s'obtient donc, par le théorème 6.2., comme le quotient d'un fibré en droites lisse sur une surface de Riemann compacte par l'action d'un groupe fini agissant linéairement sur les fibres. On observe de plus que F' se relève dans le fibré en droites car elle agit linéairement sur les fibres. Ainsi, on a bien pu se ramener au cas du quatrième exemple de la section précédente.

On revient maintenant au cas général où $F|_{E^*}$ n'est pas l'identité mais est un automorphisme d'ordre fini $N \geq 2$.

Comme $F^N = id$ sur E'^* , on utilise ce qu'on a fait précédemment pour conjuguer F^N à une application linéaire agissant sur un orbibundle $L \rightarrow E'^*$ par multiplication par un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < 1$. Comme les fibres de L sont les variétés stables des points périodiques de F , l'action de F préserve ces fibres : F envoie la variété stable en un point $p \in E'^*$ sur celle en $F(p)$.

On peut alors étendre F en un automorphisme sur L qui agit linéairement sur les fibres. Pour le voir, on observe d'abord que X' est un voisinage de la section nulle de L , et que $F(X')$ est relativement compacte dans X' . Ainsi $X' \setminus F(X')$ est un domaine fondamental pour l'action de F sur $X' \setminus E'^*$.

On considère alors une infinité de copies X_i de $X' \setminus F(X')$ indexées par $i \in \mathbb{N}^*$ que l'on recolle les unes avec les autres grâce à F : on colle ensemble le bord extérieur $\partial X'_i$ de X_i au bord intérieur $\partial F(X'_i)$ de X_{i+1} . En ajoutant $F(X')$ à X_1 , on obtient un espace analytique \mathfrak{X} qui contient $X' = X_1$ et munit d'un automorphisme $\mathfrak{F} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ donné par le décalage $id : X_i \rightarrow X_{i-1}$ pour $i \geq 2$, et par F' sur X_1 .

Comme $\mathfrak{F}(X_i) = X_{i-1}$ pour tout $i \geq 2$, pour tout $p \in \mathfrak{X}$ il existe $n \geq 0$ tel que $\mathfrak{F}^m(p) \in X'$ pour $m \geq n$. De plus, le feuilletage stable dans X' étant F' -invariant, on peut l'étendre en un feuilletage \mathfrak{F} -invariant dans \mathfrak{X} , que l'on notera \mathcal{F} . L'intersection d'une feuille \mathcal{L} de \mathfrak{F} avec X_i est un anneau A_i . Comme $F^N = id$, on a $A_i \simeq A_{i+N}$ et donc \mathcal{L} est isomorphe à \mathbb{C} . Il existe alors un unique isomorphisme $\mathcal{L} \simeq \mathbb{C}$ à homothétie près tel que \mathfrak{F} soit conjugué à une application linéaire. L'image de $\mathcal{L} \cap E'^*$ est alors 0.

Soit F_α l'application sur \mathcal{L} obtenue en multipliant par α sur chaque feuille. En utilisant les plongements de X' dans \mathfrak{X} et dans \mathcal{L} , on peut définir une application $\Phi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{L}$, définie par $\Phi(p) = F_\alpha^{-k} \circ \mathfrak{F}^{Nk}(p)$ pour k assez grand (on rappelle que on avait dès le début choisi α de sorte que F^N soit conjuguée à la translation par α sur les fibres de L , donc Φ est bien définie). Ainsi Φ est un isomorphisme qui envoie \mathcal{F} sur la fibration $L \rightarrow E'^*$, et qui conjugue F à \mathfrak{F} sur un voisinage de la section nulle E'^* . On a donc prouvé que F s'étendait en un automorphisme sur L qui agit linéairement sur les fibres.

De même que dans le début de l'étude de ce second cas, on peut supposer que E'^* est un bon orbifold, c'est-à-dire est isomorphe au quotient d'une surface de Riemann S par l'action d'un groupe fini G agissant librement sur S . De plus, on peut supposer qu'il existe un fibré en droites holomorphe $L_S \rightarrow S$ et une action linéaire de G sur L_S relevant celle sur S de sorte que L est isomorphe à L_S/G . Comme le recouvrement de Galois $S \rightarrow E'^*$ n'est pas ramifié (dans le sens des orbifolds), l'application d'ordre fini $F|_{E'^*}$ se relève en un automorphisme d'ordre fini $F_S : S \rightarrow S$, que l'on peut ensuite relever sur L_S . L'automorphisme agit alors linéairement sur les fibres. Ceci montre que l'on est bien dans la situation du dernier exemple. \square

Références

- [1] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4. Berlin : Springer, 2004.
- [2] Jean-Pierre Demailly. *Complex analytic and differential geometry*, 2007.
- [3] Charles Favre and Matteo Ruggiero. Normal surface singularities admitting contracting automorphisms. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)*, 23(4) :797–828, 2014.
- [4] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. New York, NY : John Wiley & Sons Ltd., 1994.
- [5] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry. Corr. 3rd printing*, volume 52. Springer, Cham, 1983.
- [6] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. II. *Ann. Math. (2)*, 79 :205–326, 1964.

- [7] Gerd Müller. Actions of complex Lie groups on analytic \mathbb{C} -algebras. *Monatsh. Math.*, 103 :221–231, 1987.
- [8] Patrick Popescu-Pampu. Complex singularities and contact topology. *Winter Braids Lect. Notes*, 3 :ex, 2016.
- [9] Julius Ross and Richard Thomas. Weighted projective embeddings, stability of orbifolds, and constant scalar curvature Kähler metrics. *J. Differ. Geom.*, 88(1) :109–159, 2011.
- [10] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 15 :401–487, 1983.
- [11] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry 1. Varieties in projective space. Translated from the Russian by Miles Reid.* Berlin : Springer, 2013.

ANNEXES

ANNEXE 1 : FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

Fonctions sousharmoniques

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ le laplacien. Une fonction $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est dite sousharmonique si $\Delta(f) \geq 0$. Cependant cette définition requiert que f soit deux fois dérivable, ce qui ne se comporte pas bien notamment vis à vis des limites. On souhaite donc inclure ces fonctions dans un ensemble plus large.

Définition 1.1. Soit u une fonction borélienne bornée sur une boule $\overline{B}(a, r)$ dans \mathbb{R}^n , on définit ses valeurs moyennes sur la boule et la sphère :

$$\mu_B(u; a, r) = \frac{1}{\alpha_n r^n} \int_{B(a, r)} u(x) d\lambda(x)$$
$$\mu_S(u; a, r) = \frac{1}{\sigma_{n-1} r^{n-1}} \int_{B(a, r)} u(x) d\sigma(x)$$

où α_n est le volume de la boule, λ la mesure de Lebesgue, σ_{n-1} le volume de la sphère et σ la mesure de Lebesgue sur la sphère.

On peut observer que les deux valeurs moyennes sont reliées par la formule :

$$\mu_S(u; a, r) = u(a) + \frac{1}{m} \int_0^r \mu_B(\Delta u; a, t) t dt$$

Ainsi, dans le cas d'une fonction harmonique, on voit que $\mu_B(u; a, r) = u(a)$. De même, si en un point a on a $\Delta u(a) > 0$, alors pour r suffisamment petit $\mu_B(u; a, r) > u(a)$. On peut aussi remarquer qu'une fonction ne peut satisfaire $\mu_B(u; a, r) \leq u(a)$ globalement qu'en étant semi-continue supérieurement ; d'où la définition suivante :

Définition 1.2. Une fonction $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ semi-continue supérieurement est dite sousharmonique sur Ω si elle satisfait :

$$\forall \overline{B}(a, r) \subset \Omega, \mu_B(u; a, r) \leq u(a)$$

Cela revient aussi à exiger la même inégalité mais avec la valeur moyenne sur la sphère.

Tout comme les fonctions holomorphes, les fonctions sousharmoniques vérifient le principe du maximum :

Proposition 1.3. Soit u une fonction sousharmonique sur un ouvert Ω , alors pour tout compact K dans Ω :

$$\sup_K u = \sup_{\partial K} u$$

De plus, l'ensemble $Sh(\Omega)$ des fonctions sousharmoniques sur un ouvert est stable via certaines opérations, comme les limites décroissantes ou la composition par des fonctions convexes. Les propositions suivantes illustrent ces propriétés :

Proposition 1.4. Pour toute suite décroissante (u_k) de fonctions sousharmoniques, la limite $u = \lim u_k$ est aussi sousharmonique.

Démonstration. Une limite décroissante de fonctions semi-continues supérieurement l'est aussi, et le théorème de convergence monotone assure que l'inégalité dans la définition est préservée. \square

Proposition 1.5. Soient u_1, \dots, u_p des fonctions sousharmoniques, et $\chi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante en chaque coordonnée, si χ s'étend par continuité en une fonction $[-\infty, +\infty]^p \rightarrow [-\infty, +\infty[$, alors $\chi(u_1, \dots, u_p)$ est sousharmonique.

En particulier, la somme ou le maximum de fonctions sousharmoniques l'est aussi.

Lemme de Choquet

On considère ici un ouvert Ω et une famille (u_α) de fonctions semi-continues supérieurement sur Ω , que l'on suppose de plus localement uniformément bornée. Alors son enveloppe supérieure $u = \sup u_\alpha$ n'est pas forcément semi-continue, donc on considère sa régularisation semi-continue supérieurement

$$u^*(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{B(z, \epsilon)} u \geq u(z).$$

Il s'agit de la plus petite fonction semi-continue supérieurement qui est $\geq u$.

Lemme 1.6. Toute famille (u_α) admet une sous-famille dénombrable (v_k) telle que l'enveloppe supérieure v satisfait $v \leq u \leq u^* = v^*$.

Démonstration. Soit $B(z_j, r_j)$ une base dénombrable d'ouverts de Ω . Pour tout j , soit (z_{jk}) une suite de points de $B(z_j, r_j)$ telle que

$$\sup_k u(z_{jk}) = \sup_{B(z_j, r_j)} u.$$

A toute paire (j, k) , on associe une suite d'indices $(\alpha(j, k, l))_l$ telle que $u(z_{jk}) = \sup_l u_{\alpha(j, k, l)}(z_{jk})$.

Soit $v = \sup_{j, k, l} u_{\alpha(j, k, l)}$, alors $v \leq u$ donc $v^* \leq u^*$. De plus,

$$\sup_{B(z_j, r_j)} v \geq \sup_k v(z_{jk}) \geq \sup_{k, l} u_{\alpha(j, k, l)}(z_{jk}) = \sup_j u(z_{jk}) = \sup_{B(z_j, r_j)} u.$$

Comme on a choisi une base dénombrable de la topologie, elle génère les boules et on conclut que $v^* \geq u^*$, d'où $v^* = u^*$. \square

Proposition 1.7. Si toutes les (u_α) sont sousharmoniques, alors u^* l'est aussi et est presque partout égale à u .

Démonstration. Par le lemme, on peut supposer que la famille (u_α) est dénombrable; ainsi u est une fonction de Borel. Comme les fonctions (u_α) vérifient l'inégalité de la moyenne sur toute boule $\overline{B}(z, r)$, on a :

$$u(z) = \sup_\alpha u_\alpha(z) \leq \sup \mu_B(u_\alpha; z, r) \leq \mu_B(u; z, r).$$

Comme $\mu_B(u; z, r)$ est une fonction continue en z , on en conclut :

$$u^*(z) \leq \mu_B(u; z, r) \leq \mu_B(u^*; z, r),$$

donc u^* est sousharmonique. Enfin, l'inégalité ci-dessus et la semi-continuité supérieure de u^* montrent que $u^*(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \mu_B(u; z, r)$, et donc $u^* = u$ presque partout. \square

Fonctions plurisousharmoniques

On souhaite généraliser cette définition aux fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{C}^n . Pour cela, on considère la fonction le long des droites complexes :

Définition 1.8. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C}^n , et $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ une fonction, u est dite plurisousharmonique si :

- u est semi-continue supérieurement ;
- Pour toute ligne complexe $L \subset \mathbb{C}^n$, $u|_{L \cap \Omega}$ est sousharmonique.

On note $Psh(\Omega)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur Ω .

Tout comme les fonctions sousharmoniques, les fonctions plurisousharmoniques vérifient les résultats obtenus précédemment :

Proposition 1.9. *Pour toute suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques, la limite est aussi plurisousharmonique.*

Proposition 1.10. *Soient u_1, \dots, u_p des fonctions plurisousharmoniques, et $\chi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante en chaque coordonnée, alors $\chi(u_1, \dots, u_p)$ est plurisousharmonique.*

En particulier, la somme ou le maximum de fonctions plurisousharmoniques l'est aussi.

Proposition 1.11. *Soit (u^α) une famille de fonctions plurisousharmoniques localement bornée supérieurement, et $u = \sup u_\alpha$. Alors l'enveloppe régularisée supérieure u^* est plurisousharmonique et est égale à u presque partout.*

Enfin, on peut définir le nombre de Lelong d'une fonction plurisousharmonique en un point :

Définition 1.12. Soit u une fonction plurisousharmonique sur un ouvert Ω , et $x \in \Omega$. Alors le nombre de Lelong de u en x est :

$$\nu(u, x) = \liminf_{z \rightarrow x} \frac{u(z)}{\log|z - x|}.$$

On observe que ces nombres se comportent bien avec la somme, le maximum ou les limites croissantes ; de sorte qu'ils sont préservés dans les propositions précédentes.

ANNEXE 2 : CONSTRUCTION DE LA FONCTION DE GREEN

Nous allons en premier lieu prouver le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit $(Y, 0)$ une singularité de surface normale, et $f : (Y, 0) \rightarrow (Y, 0)$ un automorphisme contractant. Alors il existe une donnée admissible (X, W, F) qui est une résolution sympathique de $(Y, 0)$ et telle qu'il existe une fonction plurisousharmonique $g_0 : X \rightarrow [-\infty, 0]$ qui vérifie $dd^c g_0 = \omega + [Z]$ où ω est une forme positive lisse sur X et $[Z]$ est le courant d'intégration de support W .*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_{Y,0}$ l'idéal maximal en 0, et $\pi : X \rightarrow (Y, 0)$ une résolution sympathique de $(Y, 0)$.

On choisit un nombre fini d'applications holomorphes χ_1, \dots, χ_r qui génèrent \mathfrak{m} et définies sur un voisinage U de 0. Quitte à restreindre ce voisinage, on peut supposer que $\sup |\chi_i| \leq 1$ pour tout i , que $f(U) \Subset U$, et que $\bigcap f^n(U) = \{0\}$. On pose :

$$g_Y(y) = \log \left(\sum_{i=1}^r |\chi_i(y)|^2 \right) - \log(r)$$

Cette fonction est à valeurs dans $[-\infty, 0]$, est lisse, tend vers $-\infty$ en 0, et est plurisousharmonique. On utilise ensuite le fait que l'on ait choisit une résolution symplectique pour avoir en tout point $p \in \pi^{-1}(0)$ des coordonnées locales (z, w) telles que $z^a w^b$ génère le tiré en arrière de \mathbf{m} . Ainsi la fonction

$$g_Y \circ \pi(z, w) - a \log|z| - b \log|w|$$

est lisse. On conclut en posant $g_0 = g_Y \circ \pi$. \square

Par la remarque, on peut donc trouver une fonction g_0 comme dans le lemme pour X . Afin de poursuivre la preuve de la proposition, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{G} = \{u \in Psh(X), u \leq 0 \text{ et pour tout } p \text{ dans } W, \nu(u, p) \geq \nu(g_0, p)\}.$$

Proposition 2.2. *La fonction $g_1 := \sup\{h \in \mathcal{G}\}$ est une fonction plurisousharmonique telle que $g_1 - g_0$ est bornée.*

Démonstration. Par les propriétés des fonctions plurisousharmoniques et des nombres de Lelong, il est clair que \mathcal{G} est stable par le maximum.

On utilise ensuite le lemme de Choquet pour extraire une suite croissante $u_n \in Psh(X)$ qui converge vers g_1 . Soit g^* la régularisation semi-continue supérieure de g_1 , elle est plurisousharmonique et comme les nombres de Lelong se comportent bien avec les limites supérieures, on en déduit que $g^* \in \mathcal{G}$. Par définition de g_1 , on a donc $g^* = g_1$.

De plus, comme $g_1 \geq g_0$, on a $\nu(g_1, p) \leq \nu(g_0, p)$ pour tout p dans W , et donc on a égalité. On choisit ensuite des coordonnées locales (z, w) en p de sorte que $W = \{z = 0\}$ ou $W = \{z = 0\} \cup \{w = 0\}$. Dans le premier cas, $g_0(z, w) = a \log|z| + \mathcal{O}(1)$ et $g_1(z, w) \leq a \log|z| + \mathcal{O}(1)$, donc $g_1 \leq g_0 + \mathcal{O}(1)$ dans un voisinage de p . Par compacité de W , on conclut que $g_1 - g_0$ est bornée par dessus sur tout X . On raisonne de la même manière dans le deuxième cas où W n'est pas irréductible. \square

On finit maintenant la preuve de la proposition : comme $F(X) \Subset X$, et $\bigcap_n F^n(X) \subset W$, et $g_0(p)$ tend vers $-\infty$ quand p tend vers W , on conclut que pour toute constante $C > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que $g_0 \circ F^N \leq -C$.

L'application F étant un biholomorphisme qui préserve W , il existe un entier N tel que $(F^N)^*[Z] = [Z]$ (on peut par exemple prendre N de sorte que F^N fixe toutes les composantes irréductibles de W). Ainsi la forme $(F^N)^*(dd^c g_0 - [Z]) = dd^c(g_0 \circ F^N) - [Z]$ est lisse. On conclut en remarquant que $g_0 \circ F^N - C$ appartient à \mathcal{G} , donc :

$$g_0 \circ F^N \leq g_1 - C \leq g_0 + \sup|g_1 - g_0| - C$$

ce qui implique le résultat pour $g := g_0$.

ANNEXE 3 : FORME NORMALE DE POINCARÉ-DULAC

Dans cette partie, on souhaite simplifier la forme des automorphismes contractants de $(\mathbb{C}^d, 0)$ qui commutent avec l'action d'un groupe fini.

Soit Γ un sous-groupe de $GL(d, \mathbb{C})$, il est dit diagonalisable s'il est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales. On observe que tout groupe abélien fini est diagonalisable.

Définition 3.1. Soit $f : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ un germe de point fixe attractif inversible, $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ les valeurs propres de $df(0)$ comptées avec multiplicités.

Un monôme $x^{\underline{n}} = (x_1^{n_1}, \dots, x_d^{n_d})$ avec $|\underline{n}| = n_1 + \dots + n_d \geq 2$ est dit résonant pour la k -ième coordonnée si $\lambda^{\underline{n}} = \lambda_k$.

On observe que si les valeurs propres sont classées en fonction de leur module ($1 > |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_d| > 0$), alors un monôme résonant en la k -ième coordonnée ne s'exprime qu'en fonction de x_1, \dots, x_{k-1} .

Définition 3.2. Soit $f : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ un germe de point fixe attractif inversible. Le germe f est en forme normale de Poincaré-Dulac si $df(0)$ est en forme normale de Jordan et si $f - df(0) \cdot x$ ne contient que des monômes résonants.

Dans le cas où les valeurs propres ont été ordonnées, la fonction f en forme normale de Jordan s'écrit donc :

$$f_1(z) = \lambda_1 z_1, f_2(z) = \lambda_2 z_2 + h_2(z_1), \dots, f_d(z) = \lambda_d z_d + h_d(z_1, \dots, z_{d-1}).$$

Théorème 3.3. Soient Γ un sous-groupe fini diagonalisable de $GL(d, \mathbb{C})$ et $f : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ un automorphisme attractif qui commute avec tous les éléments de Γ .

Alors il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_d) en 0 telles que tout élément de Γ agisse comme une application linéaire diagonale, et que f soit en forme normale de Poincaré-Dulac qui commute avec l'action de tous les éléments du groupe.

Démonstration. Comme l'action de Γ et f commutent et que Γ est diagonalisable, il existe une base dans laquelle les éléments de Γ sont diagonaux et $df(0)$ est en forme normale de Jordan inférieure.

On écrit $f(z) = (f_1(z), \dots, f_d(z))$ avec $f_k(z) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} f_{k, \underline{n}} z^{\underline{n}}$ où $f_{k, \underline{n}} \in \mathbb{C}$.

Pour prouver le théorème, on va construire par récurrence des suites $(\tilde{f}_N)_N$ et $(\Phi_N)_N$ qui commutent avec tous les éléments de Γ et telles que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_N \circ f - \tilde{f}_N \circ \Phi_N = \mathcal{O}(|z|^{N+1})$. Alors pour N suffisamment grand, la suite $(\tilde{f}_N^{-n} \circ \Phi_N \circ f^n)_n$ converge vers une conjugaison Φ entre \tilde{f}_N et f , qui commute avec l'action de Γ .

On montre ce résultat par induction : pour $N = 1$, on prend $\tilde{f}_1 = df(0) \cdot x$ et $\Phi_1 = id$.

On suppose le résultat vrai au rang N . Considérons les espaces suivants : \mathcal{H}_N l'espace des applications polynômiales $\mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ dont les coordonnées sont constituées de polynômes homogènes de degré N , et X_N le sous ensemble de \mathcal{H}_N qui ne contient que des monômes résonants pour $df(0)$. On introduit aussi \mathcal{H}_N^Γ et X_N^Γ qui sont les sous-ensembles invariants par l'action de Γ . Ce sont tous des espaces vectoriels de dimension finie.

Soit Γ_A le commutateur défini par $\Gamma_A(H) = A \circ H - H \circ A$, alors :

Lemme 3.4. Pour $N \geq 2$, $\mathcal{H}_N = X_N + \Gamma_A(\mathcal{H}_N)$.

Démonstration. On commence par remplacer $df(0)$ par la matrice diagonale D de coefficients $\lambda_1 \dots \lambda_d$, X_N est encore constitué des monômes résonants pour D .

Une base \mathcal{B} de \mathcal{H}_N est l'ensemble des applications polynômiales de la forme $b(j, \underline{n}) = (0, \dots, 0, z^{\underline{n}}, 0, \dots, 0)$ avec $z^{\underline{n}}$ en j -ième position. Alors :

$$\Gamma_D(b(j, \underline{n})) = (\lambda_j - \lambda^{\underline{n}}) b(j, \underline{n}).$$

Ainsi Γ_D s'annule exactement sur les éléments de la base qui génèrent X_N et agit linéairement sans s'annuler sur les autres éléments de la base. Ainsi, si on note Y_N l'espace engendré par les éléments de \mathcal{B} qui ne sont pas dans X_N , alors l'image de Γ_D est Y_N .

Soit π la projection de \mathcal{H}_N sur X_N qui s'annule sur Y_N , on en déduit que l'opérateur linéaire $\pi + \Gamma_D$ est inversible.

On revient à $df(0)$, que l'on a supposé triangulaire inférieure. Soit S_ε la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\varepsilon^d, \varepsilon^{d-1}, \dots, \varepsilon$. Alors le coefficient (i, j) de la matrice $S_\varepsilon^{-1} df(0) S_\varepsilon$ est $\varepsilon^{i-j} df(0)_{(i, j)}$. Ainsi $S_\varepsilon^{-1} df(0) S_\varepsilon$ converge vers D quand ε tend vers 0. L'espace des opérateurs inversibles étant un ouvert dans l'algèbre des opérateurs linéaires sur \mathcal{H} , on en déduit que pour ε suffisamment petit, $\pi + \Gamma_{S_\varepsilon^{-1} df(0) S_\varepsilon}$ est aussi inversible.

Ainsi, pour tout $G \in \mathcal{H}_N$, il existe $H_0 \in X_N$ et $H \in \mathcal{H}_N$ tels que :

$$S_\varepsilon^{-1}GS_\varepsilon = H_0 + S_\varepsilon^{-1}df(0)S_\varepsilon H - HS_\varepsilon^{-1}df(0)S_\varepsilon$$

soit

$$G = S_\varepsilon H_0 S_\varepsilon^{-1} + df(0)S_\varepsilon H S_\varepsilon^{-1} + S_\varepsilon H S_\varepsilon^{-1} df(0).$$

On observe que comme $H_0 \in \mathcal{H}_N$, on a aussi $S_\varepsilon H_0 S_\varepsilon^{-1} \in \mathcal{H}_N$, d'où le résultat. \square

Ainsi tout élément G de \mathcal{H}_N peut se décomposer de la manière suivante :

$$G = H_0 + df(0) \circ H - H \circ df(0)$$

avec $H_0 \in X_N$ et $h \in \mathcal{H}_N$.

De plus, si $G \in \mathcal{H}_N^\Gamma$, alors quitte à remplacer H_0 et H par $\frac{1}{|\Gamma|} \sum \gamma \circ H_0 \circ \gamma^{-1}$ et $\frac{1}{|\Gamma|} \sum \gamma \circ H \circ \gamma^{-1}$, on peut supposer que $H_0 \in X_N^\Gamma$ et $H \in \mathcal{H}_N^\Gamma$, c'est-à-dire que la décomposition s'effectue encore bien dans les espaces qui commutent avec l'action de Γ .

On peut maintenant utiliser l'hypothèse de récurrence :

On a $\Phi_N \circ f - \tilde{f}_N \circ \Phi_N = \mathcal{O}(|z|^{N+1})$ donc il existe $G \in \mathcal{H}_{N+1}^\Gamma$ tel que $\Phi_N \circ f - \tilde{f}_N \circ \Phi_N - G = \mathcal{O}(|z|^{N+2})$.

Le lemme permet d'écrire $G = H_0 + df(0) \circ H - H \circ df(0)$.

On pose $\tilde{f}_{N+1} = \tilde{f}_N + H_0$, et $\Phi_{N+1} = \Phi_N + H \circ \Phi_N$. On introduit de plus la relation \sim qui indique que la différence entre deux termes est $\mathcal{O}(|z|^{N+2})$.

Comme Φ_N est tangente à l'identité, on a $H_0 \circ \Phi_N \sim H_0$ et $\Phi_{N+1} - \Phi_N \sim H$. En effet, comme H_0 et H sont des $\mathcal{O}(|z|^{N+1})$, seul la différentielle de la fonction qui précède importe.

Pour montrer que $\Phi_{N+1} \circ f - \tilde{f}_{N+1} \circ \Phi_{N+1} = \mathcal{O}(|z|^{N+2})$, on fait la différence Δ entre ce terme et $\Phi_N \circ f - \tilde{f}_N \circ \Phi_N - G = \mathcal{O}(|z|^{N+2})$ et on montre que c'est un $\mathcal{O}(|z|^{N+2})$.

$$\begin{aligned} \Delta &= H \circ \Phi_N \circ f - \tilde{f}_N \circ \Phi_{N+1} - H_0 \circ \Phi_{N+1} + \tilde{f}_N \circ \Phi_N + G \\ &\sim H \circ df(0) - \tilde{f}_N \circ (\Phi_N + H) + \tilde{f}_N \circ \Phi_N + df(0) \circ H - H \circ df(0) \\ &\sim \tilde{f}_N \circ \Phi_N - \tilde{f}_N \circ (\Phi_N + H) + d\tilde{f}_N(0) \circ H. \end{aligned}$$

En posant $F(t) = \tilde{f}_N \circ (\Phi_N + tH)$, on a donc que :

$$\begin{aligned} -\Delta(z) &\sim F(1)(z) - F(0)(z) - d\tilde{f}_N(0) \circ H \\ &\sim \int_0^1 [d\tilde{f}_N \circ (\Phi_N(z) + tH(z)) - d\tilde{f}_N(0)] H(z) dt. \end{aligned}$$

Comme $H(z) = \mathcal{O}(|z|^{N+1})$, et que la norme de l'opérateur dans le crochet est un $\mathcal{O}(|z|)$, on obtient $\Delta(z) = \mathcal{O}(|z|^{N+2})$ ce qui conclut la récurrence.

On observe que dans cette preuve, on définit \tilde{f}_{N+1} en ajoutant à \tilde{f}_N un polynôme résonant commutant avec l'action de Γ . Cependant, à partir d'un certain rang M , X_M^Γ est trivial car toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Ainsi la suite $(\tilde{f}_N)_N$ est constante à partir d'un certain rang, on appelle \tilde{f} cette constante.

Il ne reste plus qu'à démontrer la convergence de la suite $(\tilde{f}_N^{-n} \circ \Phi_N \circ f^n)_n$ pour N suffisamment grand.

Tout d'abord, quitte à faire un changement de coordonnées comme dans le lemme, on peut supposer que $\|df(0)\| < 1$. Soit alors $\alpha < 1$ tel que $\|df(0)\| < \alpha$, il existe $r > 0$ tel que

$$|f(z)| \leq \alpha|z| \quad \text{si } |z| \leq r.$$

De plus, \tilde{f} étant un automorphisme polynômial triangulaire inférieur, il existe une constante $\gamma < \infty$ telle que pour tout $w, w' \in \mathbb{C}^d$ de modules plus petits que $1/2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\tilde{f}^{-k}(w) - \tilde{f}^{-k}(w')| \leq \gamma^k |w - w'|.$$

Soit m un entier tel que $\alpha^{m+1} < 1/\gamma$.

Quitte à prendre m plus grand, on peut supposer que Φ_m conjugue "presque" f et \tilde{f} . On a ainsi :

$$\tilde{f}^{-1} \circ \Phi_m \circ f - \Phi_m = \mathcal{O}(|z|^{m+1}).$$

Ainsi, il existe $\delta > 0$, $C_1 < \infty$ tels que $|w| \leq \delta$ implique :

$$|\tilde{f}^{-1} \circ \Phi_m \circ f(w) - \Phi_m(w)| \leq C_1 |w|^{m+1}.$$

Soit $E \subset \mathbb{C}^d$ un compact, alors comme f est contractante, $f^s(E) \subset rB$ pour un certain $s \in \mathbb{N}$, et où B est la boule unité. On a alors $f^{s+k}(E) \subset f^k(rB) \subset \alpha^k rB$. Il existe donc une constante C_2 telle que pour k suffisamment grand,

$$|f^k(z)| \leq C_2 \alpha^k < \delta$$

pour tout z dans E .

Dans ce cas, on obtient à partir des calculs précédents :

$$|\tilde{f}^{-1} \circ \Phi_m \circ f^{k+1}(z) - \Phi_m \circ f^k(z)| \leq C_1 |f^k(z)|^{m+1} \leq C_1 C_2^{m+1} \alpha^{k(m+1)}.$$

Pour k suffisamment grand, $\tilde{f}^{-1} \circ \Phi_m \circ f^{k+1}(z)$ et $\Phi_m \circ f^k(z)$ sont de module plus petit que $1/2$ pour tout z dans E , donc on peut appliquer le résultat sur \tilde{f} pour obtenir :

$$|\tilde{f}^{-k-1} \circ \Phi_m \circ f^{k+1}(z) - \tilde{f}^{-k} \circ \Phi_m \circ f^k(z)| \leq C_1 C_2^{m+1} \gamma^k \alpha^{k(m+1)}.$$

Comme $\gamma \alpha^{m+1} < 1$, on en conclut que la limite

$$\Psi(z) := \lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{f}^{-k} \circ \Phi_m \circ f^k)(z)$$

converge uniformément sur les compacts, et définit une application holomorphe qui conjugue f et \tilde{f} ; ce qui conclut la preuve. \square