

TRAJET EXPRESS DIRECTION L'INTERPRÉTATION HOMOTOPIQUE DE LA LOGIQUE

GABRIEL SAADIA

Vladimir Voevodsky est avant tout un mathématicien connu pour ses travaux en géométrie algébrique : il a développé la cohomologie motivique et résolu la conjecture de Milnor (travail pour lequel il a reçu la médaille Fields). Mais après plusieurs mésaventures mathématiques¹ il s'est rendu compte qu'il n'était pas possible d'empêcher que des mathématiques se développent en utilisant une erreur passées inaperçues. Il commence alors (dans les années 2000) à s'intéresser aux assistants de preuves, et de là, à la logique mathématique. Pour le citer directement :

“But to do the work at the level of rigor and precision I felt was necessary would take an enormous amount of effort and would produce a text that would be very hard to read. And who would ensure that I did not forget something and did not make a mistake, if even the mistakes in much more simple arguments take years to uncover? I think it was at this moment that I largely stopped doing what is called “curiosity-driven research” and started to think seriously about the future. I didn't have the tools to explore the areas where curiosity was leading me and the areas that I considered to be of value and of interest and of beauty. So I started to look into what I could do to create such tools. And it soon became clear that the only long-term solution was somehow to make it possible for me to use computers to verify my abstract, logical, and mathematical constructions.”

Cet intérêt résulte en la création de nouvelles fondations pour les mathématiques, les **fondations univalentes**, basées sur la théorie des types de Per Marin-Löf [Mar75][Mar84] (originellement un langage pour les mathématiques constructives). Voevodsky a enrichie la théorie des types originelle de Martin-Löf en y ajoutant un axiome appelé **axiome d'univalence** [APW13]. La théorie obtenue (appelée HoTT pour Homotopy Type Theory) est une théorie fondationnelle des mathématiques qui possède à la fois de forts liens avec la théorie de l'homotopie ainsi qu'avec les mathématiques constructives.

Nous commencerons par décrire les idées de théorie de l'homotopie nécessaires afin de comprendre ces nouvelles fondations, puis nous ferons un petit tour par la théorie des types en ayant pour objectif d'atteindre l'axiome d'univalence.

1. DE LA TOPOLOGIE ALGÈBRE AUX GROUPOÏDES SUPÉRIEURES

Le groupoïde fondamentale.

1. Commençons par décrire une opération fondamentale en topologie algébrique. Étant donné un espace topologique X , on peut construire son **groupoïde fondamental** noté $\Pi_1(X)$. Il s'agit de la donnée des points de X vu comme une collection d'objets (que l'on pense discrète) et de flèches reliant ces objets : on voit la classe d'équivalence pour la relation d'homotopie d'un chemin reliant a à b comme une flèche reliant a à b . Cette structure est alors un groupoïde dans le sens où :

- La concaténation des chemins constitue une composition qui est **associative**.
- Les chemins constants jouent le rôle d'**identités** (*i.e.* d'éléments neutres) pour cette composition.
- Chaque chemin possède un **inverse** pour cette composition : le chemin pris à rebrousse poil.

Ces trois relations (associativité, identité et inverse) ne sont vérifiées que parce que l'on a quotienté par la relation d'homotopie des chemins !

¹voir <https://www.ias.edu/ideas/2014/voevodsky-origins> pour l'histoire plus complète

2. Il est naturelle de se demander dans quelle mesure un espace est caractérisé par son groupoïde fondamental. La réponse est que le groupoïde fondamental suffit pour classifier les 1-types d'homotopie, voyons ce que cela signifie plus précisément :

Un **1-type d'homotopie** (ou simplement un 1-type) est un espace topologique X dont tous les $\pi_j(X, x)$ sont tous triviaux dès que $j > 1$ (pour $x \in X$ quelconque). L'idée est que d'un point de vue de l'homotopie, X contient uniquement de l'information dans les dimensions ≤ 1 . Un 1-type est alors entièrement caractérisé (à homotopie près) par son groupoïde fondamental.

Remarque. Ici et dans toute la suite lorsque l'on parlera d'espaces topologiques on pensera à des CW -complexes (ou sinon la il suffit de remplacer le terme "homotopie" entre les espaces par "homotopie faible").

Remarque. Techniquement le groupoïde fondamental fournit une équivalence entre :

- la 2-catégorie des 1-types d'homotopie, des fonctions continues et des homotopies (à homotopie d'homotopies près) entre ces fonctions continues.
- la 2-catégorie des groupoïdes, foncteurs et transformations naturelles entre ces foncteurs.

Conserver de l'information pour aller plus loin.

3. On a réussi à capturer l'information de dimension ≤ 1 de l'espace : essayons d'aller une étape plus loin. Le problème de notre groupoïde fondamental est que l'on a jeté de l'information en quotientant par les homotopies entre chemins. On considère donc une structure où l'on conserve cette information d'homotopie entre les chemins : il s'agit du **2-groupoïde fondamental** $\Pi_2(X)$.

Comme précédemment les points de X forment une collection d'objets (appelés 0-flèches), mais cette fois-ci on prends pour les 1-flèches *tous* les chemins *sans quotienter par homotopie*, mais alors la composition de ces 1-flèches ne vérifie pas les lois d'associativité d'identité et d'inverse... on ajoute donc les homotopies entre chemins comme des 2-flèches reliant deux 1-flèches (ces 2-flèches sont alors prises à homotopie d'homotopies près).

4. On obtient ce qu'on appelle une structure de 2-groupoïde faible. L'adjectif **faible** signifie que la composition des 1-flèches ne respecte les lois qu'aux 2-flèches près. Par contre les 2-flèches respectent les lois **strictement** (justement parce qu'on les a quotientés par les homotopies entre homotopies de chemins).

5. De la même façon que précédemment le 2-groupoïde fondamental permet de classifier les 2-types d'homotopie (c'est-à-dire les espaces possédant leurs π_j triviaux en tout point pour $j > 2$).

Et si on continuait notre escalade des dimensions ?

6. On aimerait continuer ce processus dimension par dimension. On obtient alors ce que l'on appelle l'**hypothèse de l'homotopie** initialement formulée par Grothendieck dans "A la poursuite des champs" [Gro83] (le nom "homotopy hypothesis" a été donné à posteriori par John Baez [Bae07]) :

- Les **n -types d'homotopies** sont caractérisés par leur n -groupoïde fondamental.
- Les **types d'homotopies** (*i.e.* les espaces topologiques à équivalence homotopique faible près) sont caractérisés par leur ∞ -groupoïde fondamental.

7. Il faut noter que cette hypothèse dépend de la définition de n -groupoïdes utilisé. En effet, bien que pour les premières dimensions il est facile de donner une définition de n -groupoïdes, cela devient beaucoup moins évident pour les dimensions plus grandes... et encore moins pour les ∞ -groupoïdes. On utilise alors différents modèles, (le modèle le plus courant étant le modèle simplicial des complexes de Kan, mais il en existe beaucoup d'autres).

8. Une fois un modèle de groupoïdes supérieurs choisi, cette hypothèse s'exprime précisément (en utilisant les notions de la section suivante (§17)) par :

- Le n -groupoïde fondamentale, $\Pi_n : n\text{-Type} \rightarrow n\text{-Grpd}$, est une équivalence entre la $(n + 1, 1)$ -catégorie des n -types et la $(n + 1, 1)$ -catégorie des n -groupoïdes.
- Le ∞ -groupoïde fondamentale, $\Pi_\infty : \text{Top} \rightarrow \infty\text{-Grpd}$, est une équivalence entre la $(\infty, 1)$ -catégorie des espaces topologiques avec l'homotopie faible et la $(\infty, 1)$ -catégorie des ∞ -groupoïdes.

9. Finalement cela nous dit que faire la topologie algébrique (c'est-à-dire étudier les espaces avec l'équivalence d'homotopie faible) revient à étudier les ∞ -groupoïdes : une grande partie des résultats usuels de topologie algébrique sont des résultats sur les ∞ -groupoïdes.

2. DES GROUPOÏDES SUPÉRIEURES À LA LOGIQUE DES DIMENSIONS NÉGATIVES

L'idée d' ∞ -groupoïde.

10. On commence par donner l'idée de la notion d' ∞ -groupoïde (avec la composition faible comme expliqué ci-dessus (§4)). Il s'agit de la donnée de flèches pour toutes les dimensions :

- les objets sont vu comme des 0-flèches.
- les 1-flèches relient deux 0-flèches entre elles.
- les 2-flèches relient deux 1-flèches parallèles *i.e.* qui ont les mêmes 0-flèches pour domaine et codomaine.
- ... plus généralement les $(n + 2)$ -flèches relient deux $(n + 1)$ -flèches parallèles *i.e.* qui ont les mêmes n -flèches pour domaine et codomaine.

Le tout avec des lois d'associativité d'identité et d'inverse en dimension n qui ne sont vérifiées qu'après avoir quotienté par les dimension $> n$. De plus il faut ajouter une multitude de règles de cohérence... face à cette difficulté combinatoire on utilise habituellement des modèles (§7).

Remarque. On remarque qu'il y a un décalage de deux niveaux de dimension dans la construction d'un ∞ -groupoïde, gardons en tête ce décalage pour la suite...

Les n -groupoïdes à partir des ∞ -groupoïdes.

11. De la même façon qu'un n -type est un espace ayant tous ses π_j triviaux pour $j > n$, on peut exprimer une condition pour qu'un ∞ -groupoïde soit un n -groupoïde.

Commençons par regarder le cas très simple du 0-type. Ce sont les espaces qui ont toutes leurs composantes connexes contractiles, c'est-à-dire qu'ils sont (à homotopie près) des espaces discrets : on les pensera donc comme des ensembles. Être un 0-type correspond donc à dire que tout lacet peut être contracté en un point, *i.e.* dès que l'on prend deux chemins parallèles, il existe une homotopie permettant de passer de l'un à l'autre et cette homotopie est unique à 2-homotopie près !

Regardons pour un ∞ -groupoïde ce que cela donne : entre deux 1-flèches parallèles il existe une unique 2-flèche qui les relie, entre deux 2-flèches parallèles il existe une unique 3-flèches qui les relie, etc... La propriété est donc que *toute j -flèches pour $j \geq 2$ qui peut exister, existe et est unique.* Les ∞ -groupoïde vérifiant cette condition sont alors exactement ceux qui sont équivalents aux groupoïdes discrets (pour la notion usuel d'équivalence de catégories).

12. Suivant cette idée on peut définir en toute dimension : *un n -groupoïde est un ∞ -groupoïde dont toutes les j -flèches pour $j \geq n + 2$ existent et sont uniques dès que cela à un sens.*

Intuitivement cela signifie qu'il n'y a aucun choix à faire aux niveaux $j \geq n + 2$.

La logique cachée dans les strates négatives.

13. On retrouve notre décalage par de deux niveaux déjà aperçu dans (§10)... cela nous permet de définir une notion de (-1) -groupeïde et (-2) -groupeïde ! (on pourra se référer à [CS09] pour plus de détails).

Un (-1) -groupeïde est alors un espace tel qu'entre deux objets il existe une et une seule 1-flèche... l'information est donc uniquement portée par les objets : soit il n'existe pas d'objets (et l'espace est vide) soit il y a des objets (et on obtient un espace contractile : le point). On peut voir ces deux possibilités comme les deux valeurs de vérité, faux et vrai.

Un (-2) -groupeïde ne possède qu'une unique 0-flèche, c'est à dire un seul objet. Il n'y a donc qu'un unique (-2) -groupeïde : l'espace triviale *i.e.* le point.

14. On obtient donc une notion de n -groupeïde pour $n \geq -2$, la numérotation est donc peut-être mal choisi (Voevodky [Voe15] utilise le terme "homotopy level n " pour dire "être un $n+2$ -groupeïde"). Cela vient de raisons historiques (l'ensemble étant pris usuellement comme objet de base pour construire les mathématiques il se retrouve au niveau 0 et pas au niveau 2), mais finalement obtenir la logique dans les degrés négatifs n'est peut être pas si déplaisant moralement !

Et si on relâche l'hypothèse d'inversibilité ?

15. On peut relâcher l'hypothèse d'inversibilité des flèches, on définit alors :

- une $(n, 0)$ -catégorie sera un n -groupeïde.
- une $(n, 1)$ -catégorie sera comme un n -groupeïde mais on relâche la condition d'inversibilité pour les 1-flèches.
- une $(n, 2)$ -catégorie sera comme un n -groupeïde mais on relâche la condition d'inversibilité pour les 1-flèches et les 2-flèches.
- ... une (n, r) -catégorie sera comme un n -groupeïde mais on relâche la condition d'inversibilité pour les 1-flèches, les 2-flèches, ..., les r -flèches.

Si l'on part d'un ∞ -groupeïde et on relâche la condition d'inversibilité à tous les niveaux, on obtient la notion d' (∞, ∞) -catégorie faible (qui est encore plus difficile à attraper que celle d' ∞ -groupeïde).

On peut alors définir une (n, r) -catégorie comme une (∞, ∞) -catégorie telle que :

- les j -flèches pour $j \geq n + 2$ existent et sont uniques dès que cela à un sens.
- les j -flèches pour $j \geq r + 1$ sont inversibles.

16. Finalement, on peut résumer le tout dans le tableau suivant présentant les (n, r) -catégories et qui comprend aussi les "cas limites" pour n et r infinis (et où "poset" est une abréviation pour "pre-ordered set").

$r = \backslash n =$	-2	-1	0	1	2	...	∞
0	point	valeurs de vérités	ensembles	groupeïdes	2-groupeïdes	...	∞ -groupeïdes
1			poset	catégories	(2, 1)-catégories	...	$(\infty, 1)$ -catégories
2				2-poset	2-catégories	...	$(\infty, 2)$ -catégories
3					3-poset	...	$(\infty, 3)$ -catégories
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	point	valeurs de vérités	poset	2-poset	3-poset	...	(∞, ∞) -catégories

17. La collection des petites (n, r) -catégories possède naturellement une structure de $(n + 1, r + 1)$ -catégorie : la collection des valeurs de vérités forme un poset (pour l'implication), la collection des ensembles forme une catégorie, la collection des groupeïdes forme naturellement une $(2, 1)$ -catégorie...

La notion d'équivalence entre (n, r) -catégories est donc l'équivalence interne à la $(n + 1, r + 1)$ -catégorie des (n, r) -catégories. Donc la bonne notion pour comparer les ∞ -groupeïdes est donnée par

l'équivalence interne de la $(\infty, 1)$ -catégorie des ∞ -groupoïdes. Cela montre que si l'on veut étudier les ∞ -groupoïdes on ne peut pas se passer de l'étude des $(\infty, 1)$ -catégories, et de même pour comparer les $(\infty, 1)$ -catégories on aura besoin d'étudier les $(\infty, 2)$ -catégories... et ainsi de suite.

Remarque. De nombreux modèles pour les (∞, n) -catégories ont été étudiés en détails. Par contre pour il n'existe pas encore de bonne notion pour comprendre la collection des (∞, ∞) -catégories munis d'une bonne notion d'équivalence entre elles...

Les topos.

18. Nous finirons cette partie en évoquant rapidement la notion de **topos supérieurs** : nous dirons simplement qu'un (n, r) -topos est une (n, r) -catégorie qui possède assez de structure pour être interprétée comme "une (n, r) -catégorie des $(n - 1, r - 1)$ -catégories".

Remarque. Précisons qu'il existe deux notions habituellement appelées "topos" : la notion originelle inventée par Grothendieck (autour des années 60), et une généralisation "topos élémentaire" inventée par Lawvere et Tierney. Par simplicité on utilisera le terme "topos" sans préciser si on parle de "topos élémentaire" ou de "topos de Grothendieck".

19. Par exemple un $(1, 1)$ -topos (appelé simplement topos) est une catégorie ayant assez de structure pour que l'on puisse faire de la théorie des ensembles dedans. Et pour les $(0, 1)$ -topos on retrouve essentiellement la notion d'algèbre de Heyting complète (une notion d'ensemble ordonné qui est à la logique intuitionniste ce qu'une algèbre de Boole est à la logique classique).

On retrouve donc l'idée qu'un topos peut avoir logique interne différente de la "logique ambiante" : une algèbre de Heyting n'est pas forcément une algèbre de Boole, de même un topos ne satisfait pas forcément le tiers exclu ou l'axiome du choix. La notion de topos est donc fortement relié à la logique mathématique, on peut souvent voir un topos comme un cadre assez large dans lequel on peut faire des mathématiques mais avec des propriétés logiques potentiellement altérées.

Remarque. Il est possible de définir un topos dans lequel la logique est intuitionniste, mais réciproquement il est possible dans un cadre intuitionniste de construire un topos qui aura une logique interne classique !

20. Un cas important est celui des $(\infty, 1)$ -topos qui correspond aux $(\infty, 1)$ -catégories se comportant comme la catégorie des types d'homotopies (*i.e.* des ∞ -groupoïdes). C'est-à-dire qu'un $(\infty, 1)$ -topos est un cadre dans lequel on peut manipuler de façon abstraite une certaine notion d'espace...

3. L'ESPACE COMME OBJET PRIMITIF ?

Les fondations usuelles des mathématiques par la notion d'ensemble.

21. La crise des fondements au tournant du 20ème siècle s'est résolue avec l'introduction de la théorie des ensembles : ZFC. Il s'agit d'une théorie qui axiomatise la notion d'ensemble ou plus précisément qui axiomatise la collection des ensembles purs (*i.e.* ensembles dont tous les éléments sont des ensembles purs) munie de la relation binaire d'appartenance \in . La force de cette théorie est qu'il est possible d'encoder dedans toutes les mathématiques standards.

Remarque. Il n'est à priori pas du tout évident qu'il existe un système axiomatique assez expressif pour parler de toutes les mathématiques sur un langage aussi simple qu'une unique relation binaire !

22. Concrètement, ZFC est un ensemble d'axiomes sur la relation binaire \in . Toute structure \mathbb{V} (*i.e.* tout ensemble au sens intuitif) munie d'une relation binaire ϵ vérifiant ces axiomes peut être interprétée comme un univers des mathématiques *i.e.* on peut reconstruire (presque) toutes les mathématiques

usuelles de façon interne à cet univers. Une telle structure (\mathbb{V}, ϵ) est appelé un **modèle de ZFC**. On peut alors étudier les modèles de ZFC comme on étudierait par exemple les ensembles totalement ordonnés (seul change la complexité des axiomes sur la relation binaire).

La théorie ZFC peut être utilisée comme fondement pour les mathématiques car elle s'exprime comme une théorie récursive dans la logique du premier ordre : cela implique que si on arrive à montrer qu'un énoncé est vrai dans tous les modèles de ZFC, alors il existe une preuve formelle (objet fini dont un ordinateur peut vérifier la correction) de cet énoncé. La question n'est donc plus de savoir si un énoncé est vrai (notion potentiellement ambiguë), mais s'il existe une telle preuve. Bien sûr en pratique une telle preuve formelle n'est jamais explicitée et on se satisfait de savoir qu'il est théoriquement possible de l'écrire.

23. Certainement la plus grande découverte de la logique mathématique du tournant du 20ème siècle, le théorème d'incomplétude de Gödel peut se reformuler grossièrement *“toute axiomatisation assez puissante pour être utilisée comme fondement des mathématiques possède forcément plusieurs modèles différents”*.

Contrairement à (par exemple) une axiomatisation des groupes où l'on est satisfait de la diversité des modèles, quand l'on veut modéliser l'univers des mathématiques il est (tout du moins au départ) assez déroutant d'avoir plusieurs modèles différents... l'univers mathématique ne serait-il pas unique ?

Mais après avoir accepté cette non-unicité, on peut l'utiliser comme une force. En effet une branche de la logique mathématique consiste à l'étude de tels systèmes formels fondationnels (*i.e.* assez puissants pour parler de toutes les mathématiques, comme ZFC par exemple, mais il en existe d'autres) et de comparer leurs différents modèles.

Remarque. On notera par exemple la méthode du forcing (inventé par Paul Cohen en 1966) qui permet de construire à partir d'un univers (modèle de ZFC) de nouveaux univers en modifiant de façon minutieuse certaines propriétés (comme l'axiome du choix ou l'hypothèse du continu).

24. L'approche de ZFC expliquée plus haut est “matérielle”, dans le sens où l'on considère les éléments des ensembles (en axiomatisant \in). Mais, étant donné l'omniprésence de la pensée catégorique dans les mathématiques du 20ème siècle, il est naturel d'essayer d'axiomatiser la catégorie des ensembles, on parlera d'approche “structurale”. Cette approche a été initiée par Lawvere avec la théorie ETCS (elementary theory of the category of set), voir [Law05], [Lei14] puis [Pal12].

Une approche typée.

25. L'idée d'utiliser une théorie avec des objets de types différents pour fonder les mathématiques est très ancienne et remonte au moins aux travaux de Russell pour fonder les mathématiques (début du 20ème siècle). Dans ZFC les objets n'ont aucun type (par exemple $(0, 0) \in \leq_{\mathbb{N}}$ et $(0, 0) \in \text{sin}$), mais dans la théorie des types tout objet vient avec un type attaché à lui, dans sa nature même : les opérations mal typées ne sont pas permises ! (en théorie des ensembles on peut considérer l'intersection de la relation d'ordre $\leq_{\mathbb{N}}$ et de la fonction réelle sin et on obtient la fonction identité de l'ensemble 1, on peut donc écrire $\leq_{\mathbb{N}} \cap \text{sin} = \text{id}_1$).

Au contraire, cela n'a pas de sens de comparer $0 : \mathbb{Z}$ et $0 : \mathbb{R}$ en théorie des types, on peut par contre définir le sous-type des réels qui sont des entiers et l'identifier naturellement au type des entiers.

26. La théorie des types s'est développée en parallèle de la théorie des ensembles comme une syntaxe formelle pour modéliser la programmation fonctionnelle, elle a notamment donné lieu au lambda-calcul dans les années 30. Mais il s'est avéré [See84] que la théorie des types peut être utilisée comme une syntaxe pour parler des catégories munies d'une structure assez riche. Comment cela marche techniquement ? Chaque fois qu'on se donne **une théorie des types** (*i.e.* un ensemble de règles formant une syntaxe basée sur les idées que l'on verra dans la partie suivante) on peut lui associer une

catégorie syntactique. Cette catégorie vérifiera alors une propriété universelle : c’est la catégorie initiale parmi toutes les catégories munies d’une certaine structure (dépendant de la théorie des types choisie). Cela a pour conséquence que si l’on prouve quelque chose dans la théorie des types, cela se traduira automatiquement dans la catégorie syntactique et donc (par initialité) dans toute catégorie possédant la structure associée à la théorie des types choisie initialement.

Remarque. Pour l’instant ce résultat d’initialité n’a été montré que séparément pour chaque théorie des types différentes et la preuve est à chaque fois assez technique (la première preuve est [Str91], depuis il y a eu de nombreuses généralisations de cette même preuve).

Un curieux lien avec l’homotopie...

27. De façon tout à fait surprenante il s’est avéré que certaines théories des types peuvent aussi être interprétées comme une syntaxe pour les $(\infty, 1)$ -catégories avec assez de structure (d’abord dans [HS98] pour les ∞ -groupoïdes puis [AW09],[KL(V)19] dans un cadre plus général). On notera en particulier [Shu19] où il est montré que **la théorie homotopique des types (HoTT)** est un langage interne pour les $(\infty, 1)$ -topos.

De la même façon que la théorie des ensembles, la théorie homotopique des types est un langage purement formel et on peut donc l’utiliser comme fondement des mathématiques. On peut considérer HoTT comme une fondations des mathématiques basée sur une axiomatisation de la notion d’ ∞ -groupoïde (donc de la notion d’espace) de façon primitive, les ensembles deviennent alors certains ∞ -groupoïdes particuliers : les ∞ -groupoïdes discrets.

Remarque. On peut légitimement se poser la question de l’intérêt de ce changement de point de vue, les ensembles ont pourtant l’air bien plus simples que les espaces. Mais peut-être pas tant que ça, l’ensemble des réels est en un sens bien plus complexe que l’espace des réels muni de sa topologie naturelle. Dans tous les cas l’objectif n’est pas de remplacer la théorie fondationnelle ZFC par HoTT, mais au contraire, de les étudier séparément, puis de comparer.

28. Après avoir remarqué qu’il est possible de parler d’ensembles dans HoTT on peut recoder toute la théorie des ensembles dedans, et donc toutes les mathématiques. Mais ce serait une grosse perte ! en effet HoTT permet de parler de certaines choses d’une manière beaucoup plus naturelle que la théorie des ensembles.

Par exemple il a été construit dans le langage de HoTT une nouvelle preuve du théorème de Blakers-Massez [Fav13]. Cette preuve est “modèle-indépendante” : elle s’applique dans n’importe quel $(\infty, 1)$ -topos (les anciennes preuves étaient toutes établies dans un modèle particulier : espaces topologiques, ensemble simpliciaux, etc...). Puis dans [Rez14] cette preuve a été retranscrite en langage catégorique usuel, donc cette preuve aurait pu en principe être découverte par les théoriciens de l’homotopie, mais l’exprimer dans le langage de HoTT a été plus naturel et a permis cette traduction.

De la même façon de nombreux résultats classiques d’homotopie ont été redémontré dans le langage de HoTT, on peut citer par exemple $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ [Bru16] ou encore la suite spectrale de Serre [Doo18]... toutes ces preuves peuvent alors se réinterpréter dans n’importe quel $(\infty, 1)$ -topos !

4. THÉORIE DES TYPES

29. Nous allons maintenant donner une brève description de la théorie des types que nous verrons comme un langage pour présenter une catégorie (en s’inspirant de [Shu21]). Il y a donc deux types d’expressions syntaxiques (appelées jugements), un type de jugement pour parler des objets et un autre pour parler des morphismes. On note **Stx** la catégorie syntactique présentée par notre théorie des types.

Remarque. Pour fixer les idées, on peut penser chaque type comme une proposition logique représentée par un ∞ -groupoïdes (cela sera justifié en (§45)) dont les points sont les preuves de

la proposition en question, les 1-flèches sont les identifications des différentes preuves de la proposition, etc... En particulier la proposition est vraie si et seulement si l' ∞ -groupeïde est non vide. On pourra alors “tronquer” ces ∞ -groupeïdes en des (-1) -groupeïdes (juste regarder s'ils sont vides ou non) pour obtenir simplement la logique de la strate négative (§13).

Les jugements.

30. Pour parler des objets on utilise un jugement :

$$\vdash A \text{ type}$$

qui présente un objet de \mathbf{Stx} qu'on notera $\llbracket A \rrbracket$.

On comprend ce jugement comme “ A est une bonne expression syntaxique pour un type d'objets”, on aura par exemple $\vdash \mathbb{N} \text{ type}$ pour le type des entiers naturels.

Logiquement (*i.e.* au niveau -1) ça se lit “ A est une proposition bien formée”, on aura par exemple $\vdash \mathbf{1} \text{ type}$ pour la proposition trivialement vraie et $\vdash \mathbf{0} \text{ type}$ pour la proposition trivialement fausse.

31. Pour parler des flèches on utilise un jugement :

$$x : X \vdash a[x] : A$$

qui présente une flèche de \mathbf{Stx} qu'on notera $\llbracket X \rrbracket \xrightarrow{\llbracket a \rrbracket} \llbracket A \rrbracket$.

On comprend ce jugement comme “on a construit un objet a de type A à partir d'un objet x de type X ” et on dira que a est un **terme** de type A . On aura par exemple $n : \mathbb{N} \vdash 1/n : \mathbb{Q}$.

Logiquement (au niveau -1) ça se lit “on a démontré A sous l'hypothèse X ”.

Remarque. On notera plus simplement $x : X \vdash a : A$ où la dépendance de l'expression a en x est implicite. La notation $a[x]$ n'est qu'une façon d'indiquer que a ne possède que x comme (éventuelle) variable libre.

32. Ces jugements se construisent inductivement à partir de règles logiques. Pour ne pas effrayer le lecteur non habitué à la syntaxe voici une version simplifiée des règles pour l'implication (mais il y en a pour tous les autres connecteurs logiques). La notation avec la grande barre signifie que l'on peut conclure le jugement du bas à partir du ou des jugements du haut.

$$\frac{\vdash A \text{ type} \quad \vdash B \text{ type}}{\vdash A \rightarrow B \text{ type}} \quad \frac{x : A \vdash b[x] : B}{\vdash (x \mapsto b[x]) : A \rightarrow B} \quad \frac{\vdash f : A \rightarrow B \quad \vdash a : A}{\vdash f(a) : B}$$

La première règle explique comment construire le type $A \rightarrow B$, la seconde comment construire un terme du type $A \rightarrow B$ et la troisième comment utiliser un tel terme. Il faut aussi ajouter une règle de calcul qui permet de réduire $(x \mapsto b[x])(a)$ en $b[a/x]$ (où $[a/x]$ indique la substitution syntaxique de x par a).

Remarque. Nous n'irons pas plus loin dans cette direction, mais une grande partie de la théorie homotopique des types possède un contenu calculatoire qui permet (entre autre) de l'implémenter facilement sur une machine et d'extraire d'une preuve une construction explicite.

Remarque. Ici l'implication pourra être pensé catégoriquement comme un objet exponentiel (*i.e.* un objet de la catégorie représentant de façon interne les morphismes), de même la conjonction sera représentée par le produit et la disjonction par le coproduit.

33. Bien sûr les jugements peuvent avoir plusieurs hypothèses $x : X, y : Y \vdash a[x, y] : A$ ou aucunes hypothèses $\vdash a : A$. Catégoriquement cela s'interprète à l'aide du produit $\llbracket X \rrbracket \times \llbracket Y \rrbracket \xrightarrow{\llbracket a \rrbracket} \llbracket A \rrbracket$ ou de l'objet final $\llbracket \rrbracket = 1 \xrightarrow{\llbracket a \rrbracket} \llbracket A \rrbracket$.

Remarque. Cette disymétrie entre le côté gauche et le côté droit du \vdash (plusieurs ou aucune hypothèses à gauche mais une unique conclusion à droite) est à l'origine de la disymétrie de la logique obtenue : dans la logique intuitionniste la négation n'est pas involutive !

34. On pourrait continuer dans cette direction et donner une description complète de **Stx** mais il nous manque un ingrédient fondamental pour obtenir une théorie avec un réel pouvoir expressif : les types dépendants.

Les types dépendants.

35. Dans la description précédente les termes ne constituent qu'une "trace" des règles qui ont permises de construire le type. Ajouter de la dépendance consiste à considérer les termes comme des objets à part entière à partir desquels on peut construire de nouveaux types, concrètement on autorise les jugements de la forme :

$$x : X \vdash A[x] \text{ type}$$

On a par exemple $n : \mathbb{N} \vdash C_n \text{ type}$ le type du groupe cyclique d'ordre n , ou bien encore $x : \mathbb{R} \vdash \text{Pos}[x] \text{ type}$ la proposition exprimant qu'un nombre réel x est positif. Il faut penser les hypothèses (à gauche du \vdash) comme les objets introduits au début d'une démonstration (souvent par l'expression informelle "Soit...") et la conclusion (à droite du \vdash) comme la preuve résultant de la démonstration.

36. Le deuxième type de jugement (§31) se généralise alors en :

$$x : X \vdash a[x] : A[x]$$

par exemple $n : \mathbb{N} \vdash 0_n : C_n$ correspond à l'élément neutre du groupe cyclique d'ordre n (pour un entier n non spécifié).

37. On peut alors construire des jugements à plusieurs hypothèses dépendantes :

- On part de $x_1 : X_1 \vdash X_2 \text{ type}$ (où l'expression X_2 peut potentiellement utiliser la variable libre x_1).
- Puis on peut construire $x_1 : X_1, x_2 : X_2 \vdash X_3 \text{ type}$ (où l'expression X_3 peut potentiellement utiliser les variables libres x_1 et x_2).
- En continuant ainsi on obtient $x_1 : X_1, \dots, x_n : X_n \vdash B \text{ type}$.
- Puis $x_1 : X_1, \dots, x_n : X_n \vdash b : B$ (où chaque X_i dépend des x_j précédents, et $b : B$ dépend de tous les x_i).

On note usuellement Γ ou Δ pour un **contexte dépendant** de la forme $x_1 : X_1, \dots, x_n : X_n$ comme ci-dessus.

Contrairement au cas non dépendants (§33), l'ordre des types apparaissant dans un contexte dépendant est absolument crucial ! Dans la partie "Soit..." au début d'une démonstration, les objets introduits peuvent à chaque fois utiliser dans leur construction les objets introduits précédemment.

38. On peut finalement décrire la catégorie syntaxique **Stx** entièrement :

- On a un objet formel $[[\Gamma]]$ pour tout contexte dépendant Γ .
- Étant donné deux contextes dépendants Γ et $\Delta = (y_1 : A_1, \dots, y_m : A_m)$, se donner une flèche $[[\Gamma]] \rightarrow [[\Delta]]$ consiste à se donner une suite de jugements :

$$\bar{x} : \Gamma \vdash a_1 : A_1$$

$$\bar{x} : \Gamma, a_1 : A_1 \vdash a_2 : A_2[a_1/y_1]$$

$$\bar{x} : \Gamma, a_1 : A_1, \dots, a_{m-1} : A_{m-1} \vdash a_m : A_m[a_1/y_1, \dots, a_{m-1}/y_{m-1}]$$

- à chaque fois a_i utilise potentiellement les \bar{x} et les a_j précédents.
- et on rappelle que la notation $[a/y]$ signifie la substitution syntaxique de y par a .

- L'identité découle de la règle :

$$\text{Var} \frac{}{x : A \vdash x : A}$$

- De façon similaire la composition découle de la règle :

$$\text{Subst} \frac{\Gamma \vdash a : A \quad x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash b[a/x] : B[a/x]}$$

Remarque. Cette règle s'apparente à une coupure. Le A disparaît par la coupure, par contre un témoin a subsiste dans $[a/x]$ grâce à la dépendance.

Bien sûr cette construction de la catégorie syntactique ne devient complètement explicite qu'après avoir défini rigoureusement les règles choisies pour établir les jugements. Pour illustrer, nous allons donner les règles du type somme (noté \sum) correspondant au quantificateur existentiel. Étant donné un type $B[x]$ dépendant de $x : A$, on pensera à $\sum_{x:A} B[x]$ comme l'espace des paires $\langle a, b \rangle$ avec $a : A$ et $b : B[a/x]$ (en effet se donner une preuve qu'il existe un $a : A$ vérifiant $B[a/x]$ consiste à se donner un témoin $a : A$ ainsi qu'une preuve b de $B[a/x]$) :

$$\frac{\vdash A \text{ type} \quad x : A \vdash B[x] \text{ type}}{\vdash \sum_{x:A} B[x] \text{ type}} \quad \frac{\vdash a : A \quad x : A \vdash b[x] : B[x]}{\vdash \langle a, b[a] \rangle : \sum_{x:A} B[x]} \quad \frac{\vdash z : \sum_{x:A} B[x]}{\vdash \pi_1(z) : A}$$

$$\frac{\vdash z : \sum_{x:A} B[x]}{\vdash \pi_2(z) : B[\pi_1(z)]}$$

39. La règle de substitution donnée juste au-dessus n'a un sens que si on dispose d'une règle de substitution pour les types dépendants :

$$\text{Subst} \frac{\Gamma \vdash a : A \quad x : A \vdash B \text{ type}}{\Gamma \vdash B[a/x] \text{ type}}$$

mais à quoi correspond cette règle dans la sémantique catégorique ?

Commençons par donner une sémantique catégorique à un jugement de type dépendant *i.e.* de la forme $\bar{x} : \Gamma \vdash B[\bar{x}] \text{ type}$. Par la définition des morphismes de la catégorie \mathbf{Stx} on dispose d'un morphisme de "projection" $p : \llbracket \Gamma, B \rrbracket \rightarrow \llbracket \Gamma \rrbracket$ qui va du contexte étendu par B et oublie la donnée de B supplémentaire. Il n'est pas difficile de vérifier que se donner un jugement $x : \Gamma \vdash b : B$ correspond alors à se donner une section de p (*i.e.* un morphisme $\llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow \llbracket \Gamma, B \rrbracket$ qui composé avec p donne $id_{\llbracket \Gamma \rrbracket}$).

Remarque. On aimerait penser ce morphisme $\llbracket \Gamma, B \rrbracket \rightarrow \llbracket \Gamma \rrbracket$ comme une fibration dont les fibres sont exactement les $B[a/x]$ pour $a : \Gamma$. Si l'on voit les types comme des espaces, un type dépendant correspond à l'idée d'un espace $B[a/x]$ qui varie continuellement pour $a : \Gamma$.

Reprenons donc notre règle que l'on cherche à interpréter catégoriquement :

$$\text{Subst} \frac{\Gamma \vdash a : A \quad x : A \vdash B \text{ type}}{\Gamma \vdash B[a/x] \text{ type}}$$

on obtient le carré commutatif suivant dont les deux flèches verticales proviennent des types dépendants.

40. Il n'est pas difficile de vérifier qu'il s'agit d'un pullback : il s'agit simplement d'un changement de base de fibrations.

$$\begin{array}{ccc} \llbracket \Gamma, B[a/x] \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket A, B \rrbracket \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \llbracket \Gamma \rrbracket & \xrightarrow{[a]} & \llbracket A \rrbracket \end{array}$$

Remarque. Dans le cas où $\llbracket A \rrbracket$ est l'objet initial on trouve bien que les contextes non-dépendants sont interprétés par le produit catégorique (§33). (Le produit est un cas particulier de pullback, mais le pullback est aussi un cas particulier de produit : c'est le produit dans la slice-catégorie $\mathbf{Stx}/\llbracket A \rrbracket$).

Pour conclure, un type dépendant s'interprète comme une fibration et la substitution pour les types dépendants s'interprète comme un changement de base de fibrations (toute notion de fibration est conservée par pullback).

41. Finalement, par propriété universelle du pullback il est équivalent de se donner :

(1) un jugement : $\Gamma \vdash b : B[a/x]$

(2) une section :

$$\begin{array}{ccc} \llbracket \Gamma, B[a/x] \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket A, B \rrbracket \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \llbracket \Gamma \rrbracket & \xrightarrow{\llbracket a \rrbracket} & \llbracket A \rrbracket \end{array}$$

(3) un relèvement :

$$\begin{array}{ccc} & & \llbracket A, B \rrbracket \\ & \nearrow \text{dashed} & \downarrow \\ \llbracket \Gamma \rrbracket & \xrightarrow{\llbracket a \rrbracket} & \llbracket A \rrbracket \end{array}$$

Le problème de l'identité.

42. Dans son système de type initial, Martin Löf utilise un type pour parler de l'égalité entre termes, le type identité :

$$\text{FormId} \frac{\Gamma \vdash A \text{ type} \quad \Gamma \vdash x : A \quad \Gamma \vdash y : A}{\Gamma \vdash id_A(x, y) \text{ type}}$$

On dispose donc d'un morphisme $\llbracket x : A, y : A, p : id_A(x, y) \rrbracket \rightarrow \llbracket x : A, y : A \rrbracket$.

Remarque. L'égalité en logique mathématique est souvent très difficile à cerner. La logique du premier ordre usuelle ne lui donne aucun statut spécial, c'est une simple relation binaire qu'on ajoute à tout langage et dont l'interprétation est fixée par...l'égalité ensembliste ! On tourne en rond.

43. D'autre part on remarque que la diagonale catégorique $\Delta_{\llbracket A \rrbracket} : \llbracket A \rrbracket \rightarrow \llbracket A \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket$ vérifie la propriété suivante :

pour toutes flèches $\llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket a \rrbracket} \llbracket A \rrbracket$ et $\llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket b \rrbracket} \llbracket A \rrbracket$:

$$\llbracket a \rrbracket = \llbracket b \rrbracket \text{ si et seulement si il existe un relèvement } \llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket [a], [b] \rrbracket} \llbracket A \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket$$

44. Cela nous invite à identifier $\Delta_{\llbracket A \rrbracket}$ et $\llbracket x : A, y : A, p : id_A(x, y) \rrbracket \rightarrow \llbracket x : A, y : A \rrbracket$, de sorte à ce qu'un tel relèvement corresponde par (§41) à un jugement $\Gamma \vdash p : id_A(a, b)$.

Remarque. A priori toutes les flèches ne viennent pas d'un type dépendant, pour interpréter le type identité on ajoute donc un axiome stipulant que la diagonale s'interprète comme un type dépendant. On peut ensuite vérifier qu'avec le type identité (et le type somme) toute flèche vient, à isomorphisme près, d'un type dépendant.

45. Sous la présence de ce type identité, on se retrouve donc obligé de quotienter les flèches de notre catégorie \mathbf{Stx} par la relation d'équivalence découlant du type identité : dans la description (§38) on quotiente les morphismes par la relation d'équivalence engendrée par l'identification de $\llbracket a \rrbracket$ et $\llbracket b \rrbracket$ s'il existe un relèvement comme ci-dessus (§43).

Mais alors il y a un problème ! Le pullback pour la substitution des types dépendants (§40) n'est plus un pullback... deux solutions s'offrent à nous :

- (1) La première est la solution originelle de Martin Löf : il suffit d'ajouter la règle UIP (Unicity of Identities Pinciple)

$$\text{UIP} \frac{\Gamma \vdash p : id(a, b) \quad \Gamma \vdash q : id(a, b)}{\Gamma \vdash \varphi : id_{id(a, b)}(p, q)}$$

stipulant qu'il ne peut y avoir qu'une seule preuve témoignant de l'égalité entre deux termes. Mais cette règle n'a aucune justification logique et finalement la théorie obtenue n'est pas très intéressante...

- (2) Plus tard on s'est aperçu qu'il s'agissait d'une situation déjà bien connue des théoriciens de l'homotopie : il s'agit d'un pullback homotopique ! Concrètement on regarde la catégorie syntaxique comme une $(\infty, 1)$ -catégorie : au lieu de perdre de l'information en quotientant, on conserve l'information du terme témoignant de l'égalité dans une dimension supérieure (comme dans (§3)). Alors on obtient bien un pullback, mais en prenant la bonne définition de pullback au sens $(\infty, 1)$ -catégorique.

Remarque. Finalement, au lieu de voir la théorie des types dépendants comme un langage pour parler des catégories, on l'utilise comme un langage pour parler des $(\infty, 1)$ -catégories. Le type identité autorise à voir les types comme des ∞ -groupoïdes et c'est en ce sens que ce sont des espaces. Si A est un type, $a : A$ et $b : A$, alors on peut interpréter $id_A(a, b)$ comme l'espace des chemins de a vers b .

Pour donner une image (qui est une bonne intuition mais qui cache toute la complexité de la chose) : l'égalité entre deux termes est vue comme un chemin de l'espace A , il y a différentes façons de montrer l'égalité entre deux objets (on peut emprunter plusieurs chemins différents pour montrer une égalité), mais on peut ensuite montrer l'égalité entre ces différentes preuves d'égalité (il s'agit d'une homotopie entre ces chemins), et ainsi de suite...

La règle UIP est indépendante des autres règles : on ne peut ni la montrer ni montrer sa négation. Comme expliqué ci-dessus la théorie est plus intéressante avec sa négation, une des force de l'axiome d'univalence introduit par Voevodsky est d'être un axiome "naturel" contredisant UIP.

5. L'AXIOME D'UNIVALENCE

Le type univers.

46. Pour énoncer l'axiome d'univalence il est nécessaire de parler d'un type qu'on a passé sous silence jusqu'à présent. Un type **univers** \mathcal{U} (qui correspond à l'idée d'un univers de Grothendieck) vérifie la règle

$$\text{Univ} \frac{\Gamma \vdash X : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash X \text{ type}}$$

stipulant que les termes de type \mathcal{U} sont eux-mêmes des types, ainsi que des règles qui assurent que \mathcal{U} est clos par toutes les opérations $(\times, \rightarrow, \sum, \dots)$.

Remarque. Habituellement on se donne une hiérarchie infinie d'univers afin que tout type possède lui même un type, $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}, \dots$

47. D'un côté on dispose automatiquement d'un type identité $id_{\mathcal{U}}(A, B)$, de l'autre on peut définir (grâce aux autres constructeurs par lequel \mathcal{U} est clos) un type signifiant que deux espaces sont identifiables :

$$Equiv(A, B) := \sum_{f:A \rightarrow B} \sum_{g:B \rightarrow A} \sum_{h:B \rightarrow A} id_{A \rightarrow A}(g \circ f, 1_A) \times id_{B \rightarrow B}(1_B, f \circ h)$$

Les règles du type identité induisent une fonction $id_{\mathcal{U}}(A, B) \rightarrow Equiv(A, B)$, si cette fonction est une équivalence (dans le sens qu'il existe une preuve de $Equiv(id_{\mathcal{U}}(A, B), Equiv(A, B))$) on dira que l'univers \mathcal{U} est **univalent**.

Remarque. L'univalence assure que la notion d'identité de l'univers univalent \mathcal{U} se comporte de la "bonne" façon. Par exemple cela permet de parler de familles de structures en retrouvant automatiquement la bonne notion. Si on considère le type des groupes :

$$Group := \sum_{G:\mathcal{U}} \sum_{e:G} \sum_{m:G \times G \rightarrow G} (G \text{ est un ensemble et } (e, m) \text{ lui donne une structure de groupe})$$

alors toute fonction $X \rightarrow Group$ est directement vu comme une famille de groupe sur X variant continuellement avec la bonne notion de continuité.

48. Si \mathcal{U} est univalent, alors on peut montrer que $id_{\mathcal{U}}(1 + 1, 1 + 1)$ possède au moins deux éléments distincts (l'identité et la permutation des deux éléments de $1 + 1$) et donc UIP tombe en défaut. En particulier, si on considère une catégorie des ensembles avec un univers de Grothendieck on obtient un univers non univalent (car on a UIP dans la catégorie des ensembles) ! Ce modèle ensembliste montre donc qu'il existe des univers non-univalents.

L'axiome d'univalence.

49. L'axiome d'univalence, introduit par Vladimir Voevodsky, impose l'existence d'un univers univalent. Voevodsky a aussi montré la consistance de cet axiome (historiquement, il a d'abord construit un modèle simplicial de la théorie des types dépendants, puis remarqué que l'axiome d'univalence est vérifié dans ce modèle, ce qui lui a donné l'idée de cet axiome tout en montrant sa consistance).

La consistance de l'axiome d'univalence assure qu'il n'est pas possible de définir un prédicat qui distinguerait deux types équivalents pour la notion d'équivalence ci-dessus. Donc deux types équivalents sont indiscernables de façon externe, l'axiome d'univalence les rend identiques de façon interne.

50. L'axiome d'univalence restreint donc les modèles et assure l'existence d'une structure supérieure : les modèles 1-catégorique (*i.e.* les modèles ensemblistes) sont exclus. Donc la sémantique d'un univers univalent n'a de sens que dans l' $(\infty, 1)$ -catégorie syntaxique. On mentionnera sans plus de détails qu'un univers univalent correspond dans ce cadre à un classifiant d'objet pour une $(\infty, 1)$ -catégorie, c'est-à-dire un morphisme $\tilde{U} \rightarrow U$ tel que tout $E \rightarrow B$ provient essentiellement d'un unique pullback :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \tilde{U} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & U \end{array}$$

le tout au sens $(\infty, 1)$ -catégorique.

51. Finalement si on ajoute à la théorie des types dépendants l'univalence (et aussi les HIT dont on ne parlera pas ici), on obtient une théorie qui est le langage interne des $(\infty, 1)$ -topos [Shu19]. Malheureusement l'axiome d'univalence fait perdre les bonnes propriétés calculatoires de la théorie des types dépendants (bien que la théorie cubique des types [Coh+16], [Coq15] semble remédier à ce problème...).

REFERENCES

- [Mar75] Per Martin-Löf. “An intuitionistic theory of types: predicative part”. In: *Logic Colloquium*. North Holland, 1975.
- [Gro83] Alexander Grothendieck. “Pursuing Stacks”. Manuscript, <http://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/ps.html>. 1983.
- [Mar84] Per Martin-Löf. *Intuitionistic type theory*. Bibliopolis, 1984.
- [See84] R. A. G. Seely. “Locally Cartesian closed categories and type theory”. In: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 95.1 (1984), pp. 33–48. ISSN: 0305-0041. DOI: 10.1017/S0305004100061284. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100061284>.
- [Str91] Thomas Streicher. *Semantics of type theory: correctness, completeness, and independence results*. Progress in Theoretical Computer Science. Birkhäuser, 1991.
- [HS98] Martin Hofmann and Thomas Streicher. “The groupoid interpretation of type theory”. In: *Twenty-five years of constructive type theory (Venice, 1995)*. Vol. 36. Oxford Logic Guides. New York: Oxford Univ. Press, 1998, pp. 83–111.
- [Law05] F. William Lawvere. “An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary”. In: *Repr. Theory Appl. Categ.* 11 (2005). Reprinted and expanded from Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **52** (1964), With comments by the author and Colin McLarty, 1–35 (electronic). ISSN: 1201-561X.
- [Bae07] John Baez. *The homotopy hypothesis*. <http://math.ucr.edu/home/baez/homotopy/>. Lecture at *Higher Categories and Their Applications*. Jan. 2007.
- [AW09] Steve Awodey and Michael A. Warren. “Homotopy theoretic models of identity types”. In: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 146.45 (2009), pp. 45–55. eprint: [arXiv:0709.0248](https://arxiv.org/abs/0709.0248).
- [CS09] John C. Baez and Michael Shulman. “Lectures on n -categories and cohomology”. In: *Towards Higher Categories*. Ed. by John C. Baez and J. Peter May. Vol. 152. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications. [arXiv:math.CT/0608420](https://arxiv.org/abs/math/0608420). Springer, 2009, pp. 1–68.
- [Pal12] Erik Palmgren. “Constructivist and Structuralist Foundations: Bishop’s and Lawvere’s Theories of Sets”. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 163 (10 2012). <http://www.math.uu.se/~palmgren/cetcs.pdf>, pp. 1384–1399.
- [APW13] Steve Awodey, Álvaro Pelayo, and Michael A. Warren. “Voevodsky’s univalence axiom in homotopy type theory”. In: *Notices Amer. Math. Soc.* 60.9 (2013), pp. 1164–1167. ISSN: 0002-9920. DOI: 10.1090/noti1043. URL: <http://dx.doi.org/10.1090/noti1043>.
- [Fav13] Favonia. *BlakersMassey.agda*. <https://github.com/HoTT/HoTT-Agda/blob/1.0/Homotopy/BlakersMassey.agda>. Apr. 2013.
- [Lei14] Tom Leinster. “Rethinking set theory”. In: *American Mathematical Monthly* 121.5 (2014). [arXiv:1212.6543](https://arxiv.org/abs/1212.6543), pp. 403–415.
- [Rez14] Charles Rezk. “Proof of the Blakers–Massey theorem”. <http://www.math.uiuc.edu/~rezk/freudenthal-and-blakers-massey.pdf>. 2014.
- [Coq15] Thierry Coquand. *Cubical type theory*. <http://www.cse.chalmers.se/~coquand/rules7.pdf>. Sept. 2015.
- [Voe15] Vladimir Voevodsky. “An experimental library of formalized Mathematics based on the univalent foundations”. In: *Mathematical Structures in Computer Science* 25 (Special Issue 05 June 2015), pp. 1278–1294. ISSN: 1469-8072. DOI: 10.1017/S0960129514000577. URL: http://journals.cambridge.org/article_S0960129514000577.
- [Bru16] Guillaume Brunerie. “On the homotopy groups of spheres in homotopy type theory”. [arXiv:1606.05916](https://arxiv.org/abs/1606.05916). PhD thesis. Université de Nice, 2016.
- [Coh+16] Cyril Cohen et al. “Cubical Type Theory: a constructive interpretation of the univalence axiom”. [arXiv:1611.02108](https://arxiv.org/abs/1611.02108). 2016.

²Et la référence pour les références : <https://github.com/mikeshulman/basicstex/blob/master/all.bib>

- [Doo18] Floris van Doorn. “On the Formalization of Higher Inductive Types and Synthetic Homotopy Theory”. arXiv:1808.10690. PhD thesis. Carnegie Mellon University, 2018.
- [KL(V)19] Chris Kapulkin and Peter LeFanu Lumsdaine. “The simplicial model of univalent foundations (after Voevodsky)”. In: *Journal of the European Mathematical Society* (2019). To appear. arXiv:1211.2851. eprint: 1211.2851.
- [Shu19] Michael Shulman. “All $(\infty, 1)$ -toposes have strict univalent universes”. arXiv:1904.07004. 2019.
- [Shu21] Michael Shulman. “Homotopy Type Theory: The Logic of Space”. In: *New Spaces in Mathematics: Formal and Conceptual Reflections*. Ed. by Mathieu Anel and GabrielEd-itors Catren. Vol. 1. arXiv:1703.03007. Cambridge University Press, 2021, pp. 322–404. DOI: 10.1017/9781108854429.009.