

---

# Physique des particules et géométrie non-commutative

---

ANTOINE SOULAS

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction : qu'est-ce que le Modèle Standard ?</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Triplets spectraux</b>	<b>3</b>
2.1	Variété spin . . . . .	3
2.2	Opérateur de Dirac sur une variété spin . . . . .	4
2.3	Triplets spectraux réels canoniques et finis . . . . .	5
2.4	Le triplet spectral du Modèle Standard . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Théories de jauge</b>	<b>7</b>
3.1	Groupe de jauge d'un triplet spectral réel . . . . .	7
3.2	Groupe de jauge du Modèle Standard . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Actions bosoniques et fermioniques</b>	<b>9</b>
4.1	Action spectrale bosonique . . . . .	9
4.2	Action fermionique . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>

# 1 Introduction : qu'est-ce que le Modèle Standard ?

Le Modèle Standard est le modèle opérationnel le plus abouti dont dispose aujourd'hui la physique des particules. Développé jusque dans les années 1970, il a depuis reçu plusieurs confirmations expérimentales majeures, notamment l'observation du quark top (1995), du neutrino tauique (2000) et du boson de Higgs (2012), si bien que toutes les particules prédites par le modèle ont aujourd'hui été découvertes. Il propose un cadre unifiant aux trois interactions fondamentales que sont l'électromagnétisme et les interactions forte et faible. Le mathématicien et médaillé Fields Alain Connes a publié, notamment avec le physicien théoricien Ali Chamseddine, une série d'articles aboutissant au long article fondateur [3] dans lequel les auteurs présentent une reformulation complète du Modèle Standard au sein du cadre mathématique de la géométrie non-commutative. L'objectif de ce mémoire est de détailler cette construction sans démonstrations, en se concentrant sur l'exposition des structures utilisées. Afin qu'il puisse être lu aussi bien par des mathématiciens que par des physiciens, il semble bon de commencer par introduire les mécanismes principaux du Modèle Standard.

**Champs quantiques** Le cadre mathématique général de la physique des particules est celui de la théorie des champs. Avant quantification, un champ n'est autre qu'une section d'un certain fibré au-dessus de la variété pseudo-riemannienne représentant l'Univers qui se transforme de manière adéquate sous l'action du groupe de Poincaré, *i.e.* lors d'un changement de référentiel. La quantification consiste à promouvoir ces champs, qui ne sont pour l'instant que des fonctions, au statut d'opérateurs sur un espace de Hilbert qui vérifient certaines relations de commutations imposées. Il existe essentiellement trois types de champs : les champs scalaires  $\Phi(x)$ , les champs de Dirac  $\Psi(x)$  (ou spineur) et les champs vectoriels  $A_\mu(x)$ . Avant quantification, ils sont respectivement à valeurs dans un fibré de dimension 1, 4 et 4. On montre que les champs de Dirac décrivent des fermions (les particules constituant la matière), tandis que les deux autres modélisent des bosons (les particules vectrices des forces).

**Lagrangien** Le Lagrangien est l'un des objets les plus fondamentaux de la physique théorique. Il s'agit d'une fonctionnelle qui peut dépendre par exemple des champs (en théorie des champs) ou bien de la métrique de l'espace-temps (en relativité générale), et qui a la propriété de voir son intégrale sur tout l'espace-temps — l'action — minimisée pour un état physique. On dérive du Lagrangien les équations régissant l'évolution du système considéré et, dans le cas de la physique des particules, les diagrammes de Feynmann qui permettent de représenter toutes les interactions possibles entre les particules en présence. Il permet aussi de définir la notion cruciale de symétrie. On appelle symétrie globale sous l'action d'un groupe  $G$  une transformation laissant invariant le Lagrangien et dépendant d'un seul paramètre  $g \in G$  pour tout l'espace-temps. À l'inverse, une symétrie locale dépend d'un paramètre  $g \in G$  pour chaque point de l'espace temps ou, plus précisément, d'une fonction lisse  $g(x)$ .

**Jauges** Il a très tôt été remarqué la nature spéciale du potentiel vecteur  $A_\mu = (A^0, \vec{A})$  qui apparaît dans les équations de Maxwell pour l'électromagnétisme. En effet, celui-ci est défini « à jauge près », c'est-à-dire que  $A_\mu$  et  $A_\mu + \partial_\mu f$  où  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^4$  décrivent exactement la même physique. Le terme *invariance de jauge* est proposé pour la première fois par le physicien Herman Weyl en 1918. Le cadre pour décrire les systèmes comportant une invariance de jauge est celui de la *théorie de Yang-Mills*. Un groupe  $G$  agit sur le champ fermionique (*i.e.* le champ de Dirac) à travers une certaine représentation de dimension  $r$  dont on note  $(T^a)_{a=1\dots n}$  les générateurs infinitésimaux. En pratique, il s'agit de la représentation fondamentale du groupe : si  $G = SU(2)$ , les  $(T^a)$  sont les matrices de Pauli  $(\sigma^a)_{a=1\dots 3}$  ; si  $G = SU(3)$ , les  $(T^a)$  sont les matrices de Gell-Mann  $(\lambda^a)_{a=1\dots 8}$ . Le champ fermionique est un vecteur composé de  $r$  champs de Dirac, couplé à un champ bosonique vu comme un élément de l'algèbre de Lie de la représentation dont les composantes sont des champs vectoriels :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \vdots \\ \Psi_r(x) \end{pmatrix} ; \quad A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a.$$

En notant  $U = e^{i\alpha^a(x)T^a}$ , ils se transforment sous l'action de  $G$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\rightarrow U\Psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow UA_\mu(x)U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

et on vérifie que la courbure du champ de jauge définie par  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \equiv F_{\mu\nu}^a T^a$  permet d'écrire le Lagrangien invariant de jauge suivant :

$$\mathcal{L}_{YM} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a.$$

**Le Modèle Standard** Le groupe de symétrie de jauge du Modèle Standard est  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ . Le Lagrangien complet s'écrit :

$$\mathcal{L}_{MS} = \mathcal{L}_{Bosons} + \mathcal{L}_{Fermions} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4}G^{a\mu\nu}G_{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W^{i\mu\nu}W_{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \\ &+ \sum_{fermions} \bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu \Psi \\ &+ \frac{1}{2}(D_\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \\ &+ y_u \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \tilde{\phi} u_R - y_d \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \phi d_R - y_e \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \phi e_R + h.c. \end{aligned}$$

où les huit bosons (*i.e.* champs bosoniques)  $(G^a)_{a=1\dots 8}$  sont liés à la symétrie  $SU(3)$  (appelés gluons), les trois champs bosoniques  $(W^i)_{i=1\dots 3}$  sont liés à la symétrie  $SU(2)$  et le champ bosonique  $B$  est lié à la symétrie  $U(1)$ . Les fermions (quark up  $u$ , quark down  $d$ , électron  $e$  et neutrino  $\nu_e$ ) sont décomposés en leur partie droite et gauche, qui subissent différemment l'action de  $SU(2)$ . Les dérivées covariantes  $D_\mu$  s'écrivent différemment selon les symétries de jauge auxquelles sont sensibles les différents fermions. Le champ scalaire  $\phi$  est appelé boson de Higgs, et la partie  $\mathcal{L}_{Higgs}$  est responsable du phénomène de brisure spontanée de symétrie, que nous ne détaillerons pas ici, qui confère une masse à certains bosons. La partie  $\mathcal{L}_{Yukawa}$ , où *h.c.* désigne le conjugué hermitien, génère après brisure des termes du type  $m\bar{\Psi}\Psi$  donnant leurs masses aux fermions.

Le mémoire est organisé comme suit. Dans la Section 2, on définit la notion de triplet spectral, d'abord pour représenter algébriquement une variété spin, puis étendu au cas des espaces non-commutatifs. On précise également le triplet spectral utilisé pour le Modèle Standard non-commutatif. La Section 3 est dédiée aux théories de jauge : on définit le groupe de jauge associé à un triplet spectral, et on vérifie que le champ de jauge vérifie la loi de transformation attendue pour le triplet spectral du Modèle Standard. Enfin, en Section 4 sont construites les actions spectrales bosoniques et fermioniques dont le développement redonne le Lagrangien complet du Modèle Standard.

## 2 Triplets spectraux

### 2.1 Variété spin

La structure de variété spin est l'objet adéquat pour exprimer en termes géométriques la physique des fermions, lesquels sont modélisés par des spineurs définis sur l'espace-temps. Elle se base sur la notion d'algèbre de Clifford.

**Définition 2.1** (Algèbre de Clifford). *Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) espace vectoriel et  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . L'algèbre de Clifford  $\text{Cl}(E, q)$  (resp.  $\text{Cl}(E, q)$ ) est l'algèbre engendrée sur  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) par les vecteurs  $e \in E$  modulo la relation  $e^2 = q(e)1$ .*

On voit donc directement que pour tous  $e, f \in E$ , en notant  $g$  la forme bilinéaire associée à  $q$ ,

$$q(e)1 + q(f)1 + 2g(e, f) = q(e + f)1 = (e + f)^2 = q(e)1 + q(f)1 + ef + fe$$

d'où  $ef + fe = 2g(e, f)$ , ce qui fournit la relation d'anticommutation suivante entre les vecteurs d'une base orthogonale  $(e_i)$  de  $E$  pour  $g$  :

$$e_i e_j = -e_j e_i$$

pour tous  $i \neq j$ . Par conséquent, si  $\dim_{\mathbb{C}} E = 2n$ , alors  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Cl}(E, q) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$ . On définit l'opérateur de chiralité  $\gamma_{2n+1} = (-i)^n e_1 \cdots e_{2n}$ , qui vérifie  $\gamma_{2n+1}^2 = (-1)^n (-1)^{2n(2n-1)/2} = 1$ . Enfin, on peut décomposer  $\text{Cl}(E, q) = \text{Cl}^0(E, q) \oplus \text{Cl}^1(E, q)$  selon la parité de l'opérateur  $\chi$  défini par  $\chi(e_1 \cdots e_k) = (-1)^k e_1 \cdots e_k$ .

**Définition 2.2** (Fibré d'algèbres de Clifford). *On appelle fibré d'algèbres de Clifford d'une variété riemannienne  $(M, g)$ , et on note  $\text{Cl}^+(TM)$ , le fibré d'algèbres dont la fibre en  $x \in M$  est donnée par  $\text{Cl}(T_x M, q_g)$ , où  $q_g(X_x) = g(X_x, X_x)$ . De la même manière, on définit les fibrés  $\text{Cl}^-(TM)$  et  $\text{Cl}(TM)$ , dont les fibres en  $x$  sont respectivement données par  $\text{Cl}(T_x M, -q_g)$  et  $\text{Cl}(T_x M, q_g)$ <sup>1</sup>. Enfin, on note  $\text{Cliff}^+(M)$  (resp.  $\text{Cliff}^-(M)$ ,  $\text{Cliff}(M)$ ) l'algèbre des sections continues de  $\text{Cl}^+(TM)$  (resp.  $\text{Cl}^-(TM)$ ,  $\text{Cl}(TM)$ ).*

En coordonnées locales  $(x^\mu)$ , l'algèbre  $\text{Cliff}(M)$  peut être générée par une famille de sections  $(\gamma^\mu)$  qui vérifient :

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \quad (3)$$

**Définition 2.3** (Variété spin<sup>c</sup>). *Une variété riemannienne de dimension paire  $M$  est dite spin<sup>c</sup> s'il existe un fibré vectoriel  $S$  au-dessus de  $M$  muni d'un produit scalaire tel que l'on ait l'isomorphisme de fibrés d'algèbres involutives suivant :*

$$\text{Cl}(TM) \simeq \text{End}(S).$$

Les sections du fibré  $S$  sont appelées spineurs, dont on note l'ensemble  $\Gamma(S)$ .

**Définition 2.4** (Multiplication de Clifford). *Soit  $(M, S)$  une structure spin<sup>c</sup> sur  $M$ . On définit la multiplication de Clifford comme l'application  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire*

$$c : \Omega^1(M) \times \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S) \\ (\omega, \psi) \longmapsto \omega^\# \cdot \psi$$

où  $\omega^\#$  est le champ de vecteur de  $\Gamma(TM)$  associé à la 1-forme  $\omega \in \Omega^1(M)$  via  $g$ , et où ce champ de vecteur agit en tant qu'endomorphisme sur  $\Gamma(S)$  grâce à l'inclusion  $\Gamma(TM) \subset \text{Cliff}(M) \subset \Gamma(\text{End}(S))$ .

1. Plus précisément, on considère alors le complexifié de l'espace tangent.

Puisque l'isomorphisme de la Définition 2.4 est involutif, on voit que pour tout  $\omega \in \Omega^1(M)$ ,  $c(\omega^*) = c(\omega)^\dagger$ . De plus, en coordonnées  $(x^\mu)$ , si  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ , on a localement

$$c(\omega)\psi \equiv c(\omega, \psi) = \omega_\mu \gamma^\mu \psi$$

où les  $\gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu$  sont choisies comme dans (3) et sont maintenant vues comme des sections de matrices agissant sur les fibres de  $S$ . Le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  sur chaque fibre de  $S$  peut être choisit de manière canonique et tel qu'il varie continument le long de  $M$ . On obtient alors le produit scalaire suivant sur  $\Gamma(S)$  :

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_M \langle \psi_1(x), \psi_2(x) \rangle_x \sqrt{\det g} dx.$$

**Définition 2.5.** *On appelle espace des spineurs de carré intégrable la complétion de  $\Gamma(S)$  pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ . C'est un espace de Hilbert noté  $L^2(S)$ .*

Enfin, il ne manque plus qu'un ingrédient pour parachever la définition de variété spin. La théorie des algèbres de Clifford montre que pour toute algèbre de Clifford  $\text{Cl}_{2n} = \text{Cl}(\mathbb{R}^{2n}, \delta_{\mu\nu})$  (où  $\delta_{\mu\nu}$  est la forme quadratique euclidienne standard), il existe une représentation irréductible  $\pi : \text{Cl}_{2n} \rightarrow \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$  et deux opérateurs anti-unitaires  $J_{2n}^\pm$  qui « sélectionnent »  $\text{Cl}_{2n}^\pm \equiv \text{Cl}(\mathbb{R}^{2n}, \pm\delta_{\mu\nu})$ , au sens où :

$$\text{Cl}_{2n}^\pm = \{a \in \text{Cl}_{2n} \mid [J_{2n}^\pm, \pi(a)] = 0\}$$

D'un point de vue physique, un tel opérateur jouera le rôle de la conjugaison de charge. Cependant, disposer d'un tel opérateur  $J$  pour chaque fibre de la variété  $\text{spin}^c$  ne suffit pas : on a besoin d'un opérateur  $J_M : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$  globalement défini tel qu'en chaque fibre on ait  $(J_M \psi)(x) = J_{2n}^\pm(\psi(x))$  pour tous  $\psi \in \Gamma(S)$ ,  $x \in M$  et avec  $\dim M = 2n$ . Un tel relèvement n'existe cependant pas toujours ; si tel est le cas,  $M$  est une variété spin.

**Définition 2.6** (Variété spin). *Une variété  $\text{spin}^c$  est dite spin s'il existe un opérateur anti-unitaire  $J_M : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$  tel que :*

1.  $\text{Cliff}^+(M) = \{\psi \in \text{Cliff}(M) \subset \text{End}(\Gamma(S)) \mid [J_M, \psi] = 0\}$ ,
2.  $[J_M, f] = 0$  pour toute fonction  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  qui agit sur  $\Gamma(S)$  par multiplication.

La paire  $(S, J_M)$  est appelée structure spin sur  $M$ . On définit également un opérateur de graduation  $\gamma_M : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$  par  $(\gamma_M \psi)(x) = \gamma_{2n+1}(\psi(x))$ , où  $\gamma_{2n+1}$  est l'opérateur de chiralité donné plus haut dans chaque fibre.

## 2.2 Opérateur de Dirac sur une variété spin

L'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel d'ordre 1 sur l'espace  $\Gamma^\infty(S)$  des sections lisses de  $S$ , conçu pour être une sorte de « racine carré du Laplacien ». Pour définir une notion de dérivation canonique sur  $S$ , on commence par étendre la connexion de Levi-Civita définie sur  $TM$  à tout le fibré  $S$ .

**Proposition 2.7** (Connexion spin). *Soit  $M$  une variété spin, de fibré de spineurs  $S$ . Il existe une unique connexion  $\nabla^S : \Gamma^\infty(S) \rightarrow \Omega^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma^\infty(S)$ , appelée connexion spin, telle que  $\nabla_X^S$  commute avec  $J_M$  pour tout champ de vecteur réel  $X$ , et telle que :*

$$\nabla^S(c(\omega)\psi) = c(\nabla^{LC}\omega)\psi + c(\omega)\nabla^S\psi$$

où  $\omega \in \Omega^1(M)$ ,  $\psi \in \Gamma^\infty(S)$ , et  $\nabla^{LC}$  est la connexion de Levi-Civita sur  $TM$ .

2. Un opérateur anti-unitaire sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est un opérateur inversible anti-linéaire  $J$  tel que  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ ,  $\langle Jx_1, Jx_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle$ . La relation définissant l'opérateur adjoint  $J^*$  de  $J$  est modifiée pour compenser la conjugaison complexe, devenant  $\langle Jx_1, x_2 \rangle = \langle J^*x_2, x_1 \rangle$ . On a alors, comme pour un opérateur unitaire,  $J^* = J^{-1}$ .

**Définition 2.8** (Laplacien). Le Laplacien  $\Delta^E$  associé à la connexion  $\nabla^E$  sur un fibré vectoriel  $E$  est défini par :

$$\Delta^E = -\text{Tr}_g(\nabla^{LC} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^E) \circ \nabla^E : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E).$$

En coordonnées locales, il s'écrit :

$$\Delta^E = -g^{\mu\nu}(\nabla_\mu^E \nabla_\nu^E - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa \nabla_\kappa^E).$$

De plus, on appelle Laplacien généralisé tout opérateur sur  $E$  de la forme  $\Delta^E - F$  où  $F \in \Gamma(\text{End}(E))$ .

**Définition 2.9** (Opérateur de Dirac). Soit  $M$  une variété spin. L'opérateur de Dirac  $D_M : \Gamma^\infty(S) \rightarrow \Gamma^\infty(S)$  est la composée de  $\nabla^S$  avec la multiplication de Clifford  $c$  :

$$D_M : \Gamma^\infty(S) \xrightarrow{\nabla^S} \Omega^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma^\infty(S) \xrightarrow{-ic} \Gamma^\infty(S).$$

En coordonnées locales :

$$D_M \psi(x) = -i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{1}{4} \tilde{\Gamma}_{\mu a}^b \gamma^a \gamma_b \right) \psi(x) \quad (4)$$

avec  $\tilde{\Gamma}_{\mu a}^b$  les symboles de Christoffel associés à  $\nabla^{LC}$ .

### 2.3 Triplets spectraux réels canoniques et finis

Un variété spin est en particulier une variété riemannienne  $(M, g)$ , et il est possible d'exprimer la distance  $d_g$  relative à la métrique  $g$  à partir de l'opérateur de Dirac  $D_M$ .

**Proposition 2.10.** Soit  $(M, g)$  une variété spin riemannienne, et  $d_g$  la distance induite par  $g$ . Pour tous  $x, y \in M$ ,

$$d_g(x, y) = \sup_{f \in C^\infty(M)} \{|f(x) - f(y)| \mid \| [D_M, f] \| \leq 1\}$$

Cette proposition est importante, car elle montre que l'on peut reconstruire la distance riemannienne sur  $M$  uniquement à partir de la connaissance de l'algèbre  $C^\infty(M)$  et de l'opérateur de Dirac  $D_M$ , lesquels agissent sur l'espace de Hilbert  $L^2(S)$ . En réalité, la donnée complète de  $(C^\infty(M), L^2(S), D_M; J_M, \gamma_M)$  permet de reconstruire entièrement la géométrie riemannienne et la structure de variété spin sur  $M$ , sous certaines conditions longuement détaillées en [6, Section 10.5]. Ce résultat difficile est connu sous le nom de *Théorème de la variété spin de Connes* (voir la démonstration en [6, Chap. 11]). Le « triplet »  $(C^\infty(M), L^2(S), D_M; J_M, \gamma_M)$  caractérise donc complètement la structure spin sur  $M$  et est composé uniquement d'objets spectraux, et non géométriques : il invite ainsi le géomètre non-commutatif à étendre cette notion à des triplets où l'algèbre n'est plus nécessairement commutative et à définir la notion suivante de triplet spectral, qui tiendra lieu de *variété spin non-commutative*.

**Définition 2.11** (Triplet spectral). Un triplet spectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  est la donnée d'une algèbre involutive unifiée  $\mathcal{A}$  représentée par des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et d'un opérateur auto-adjoint  $D$  dans  $\mathcal{H}$  tel que la résolvante  $(i + D)^{-1}$  soit compacte et que pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $[D, a]$  est un opérateur borné.

Un triplet spectral est dit pair si  $\mathcal{H}$  est muni d'une graduation, i.e. d'un opérateur auto-adjoint  $\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  tel que  $\gamma^2 = \mathbb{1}$ , pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\gamma a = a\gamma$  et  $\gamma D = -D\gamma$ .

Une structure réelle de KO-dimension  $n \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  sur un triplet spectral est la donnée d'un opérateur anti-unitaire  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  tel que :

1.  $J^2 = \epsilon$
2.  $JD = \epsilon' DJ$
3.  $J\gamma = \epsilon'' \gamma J$

où  $\epsilon, \epsilon', \epsilon'' \in \{-1; 1\}$  sont donnés par le tableau suivant en fonction de  $n$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\epsilon$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
$\epsilon'$	1	-1	1	1	1	-1	1	1
$\epsilon''$		-1		1		-1		

Un triplet spectral réel est la donnée d'un triplet spectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  et d'une structure réelle  $J$  vérifiant la propriété du commutant et la propriété du premier ordre. En notant  $b^\circ \equiv Jb^*J^{-1}$ , ces conditions s'écrivent respectivement :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \quad [a, b^\circ] \quad \text{et} \quad [[D, a], b^\circ]$$

Le triplet spectral canonique associé à une variété spin  $M$  de dimension paire est donné par  $(C^\infty(M), L^2(S), D_M; J_M, \gamma_M)$  tel que défini précédemment.

Un triplet spectral réel est dit fini lorsque l'espace de Hilbert est de dimension finie. On note alors plutôt ce triplet  $(A_F, H_F, D_F; J_F, \gamma_F)$ . Il est irréductible si la représentation de  $A_F$  et  $J_F$  dans  $H_F$  est irréductible et si l'action de  $A_F$  sur  $H_F$  admet un vecteur séparateur i.e.  $\exists \xi \in H_F : \forall a \in A_F, a \cdot \xi = 0 \Rightarrow a = 0$ .

**Remarque 2.12.**

- Ce tableau provient de la théorie des algèbres de Clifford. On montre que dans  $\mathbb{C}l_n$ , l'opérateur anti-unitaire  $J_n^-$  évoqué précédemment, qui « sélectionne »  $\mathbb{C}l_n^-$ , vérifie avec  $\gamma_{n+1}$  et avec les éléments de  $\mathbb{C}l_n^1$  les relations données par le tableau, selon la valeur de  $n \pmod 8$ . Par conséquent, la KO-dimension du triplet spectral canonique associé à une variété spin coïncide avec la dimension de la variété (c'est évident pour  $\epsilon$  et  $\epsilon''$ , et vrai pour  $\epsilon'$  parce que l'expression locale (4) de  $D_M$  contient des produits impairs de matrices  $\gamma^\mu$  et une dérivée  $\partial_\mu$  qui commute naturellement avec  $J_M$ ).
- Si  $\mathcal{A}$  agit à gauche sur  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{A}^\circ = \{a^\circ \mid a \in \mathcal{A}\}$  agit à droite sur  $\mathcal{H}$ . Les propriétés du commutant et du premier ordre reviennent donc à demander que l'action à droite commute avec l'action à gauche de  $\mathcal{A}$  et des commutateurs de  $D$  avec  $\mathcal{A}$ .

## 2.4 Le triplet spectral du Modèle Standard

**Définition 2.13.** Soit  $M$  une variété spin de triplet spectral canonique  $(C^\infty(M), L^2(S), D_M; J_M, \gamma_M)$ , et  $F = (A_F, H_F, D_F; J_F, \gamma_F)$  un triplet spectral réel fini. La variété quasi-commutative  $M \times F$  est donnée par le triplet spectral réel suivant, s'il existe :

$$M \times F = (C^\infty(M) \otimes A_F, L^2(S) \otimes H_F, D_M \otimes \mathbb{1} + \gamma_M \otimes D_F; J_M \otimes J_F, \gamma_M \otimes \gamma_F)$$

qui s'écrit encore :

$$M \times F = (C^\infty(M, A_F), L^2(S \otimes (M \times H_F)), D_M \otimes \mathbb{1} + \gamma_M \otimes D_F; J_M \otimes J_F, \gamma_M \otimes \gamma_F)$$

Une variété quasi-commutative revient à « tordre » légèrement une variété spin commutative, en ajoutant une composante non-commutative finie dimensionnelle : l'*espace interne*. La non-commutativité est modérée, car elle provient seulement du produit dans  $A_F$  au-dessus de chaque point de  $M$ . L'idée de Connes et Chamseddine est d'ajouter des dimensions non-commutatives bien choisies à la structure commutative de l'espace-temps, de telle sorte que le groupe de jauge et le Lagrangien du Modèle Standard découlent naturellement de la variété quasi-commutative obtenue. Une succession d'arguments mathématiques et de choix relativement naturels conduisent à la construction suivante pour le triplet spectral  $(A_F, H_F, D_F; J_F, \gamma_F)$  de l'espace interne recherché.

- L'algèbre :

$$A_F = \left\{ \left( q_\lambda, q, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right) \mid \lambda \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{H}, m \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \right\} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

où  $\lambda \mapsto q_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$  est l'inclusion de  $\mathbb{C}$  dans les quaternions  $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ .

— L'espace de Hilbert :

$$\begin{aligned} H_F &= (\mathbb{C}_R^2 \oplus \mathbb{C}_L^2) \otimes \mathbb{C}^{4^o} \oplus \mathbb{C}^4 \otimes (\mathbb{C}_R^{2^o} \oplus \mathbb{C}_L^{2^o}) \\ &= (\mathbb{C}_R^1 \oplus \mathbb{C}_R^{\bar{1}} \oplus \mathbb{C}_L^2) \otimes \mathbb{C}_R^{1^o} \oplus \mathbb{C}_R^1 \otimes (\mathbb{C}_R^{1^o} \oplus \mathbb{C}_R^{\bar{1}^o} \oplus \mathbb{C}_L^{2^o}) \\ &\quad \oplus (\mathbb{C}_R^1 \oplus \mathbb{C}_R^{\bar{1}} \oplus \mathbb{C}_L^2) \otimes \mathbb{C}^{3^o} \oplus \mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}_R^{1^o} \oplus \mathbb{C}_R^{\bar{1}^o} \oplus \mathbb{C}_L^{2^o}) \\ &= H_l \oplus H_{\bar{l}} \oplus H_q \oplus H_{\bar{q}} \end{aligned}$$

où  $H_l \simeq \mathbb{C}^4$ ,  $H_{\bar{l}} \simeq \mathbb{C}^4$ ,  $H_q \simeq \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^3$  et  $H_{\bar{q}} \simeq \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^3$  sont appelés *espace des leptons*, *espace des anti-leptons*, *espace des quarks* et *espace des anti-quarks*, de bases orthonormales respectives  $\{\nu_R, e_R, (\nu_L, e_L)\}$ ,  $\{\bar{\nu}_R, \bar{e}_R, (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\}$ ,  $\{u_R, d_R, (u_L, d_L)\}$ ,  $\{\bar{u}_R, \bar{d}_R, (\bar{u}_L, \bar{d}_L)\}$ . Dans cette décomposition, l'action à gauche (resp. à droite) de  $A_F$  (resp.  $A_F^o$ ) est définie sur les termes de gauche (resp. de droite) des produits tensoriels, et  $\lambda$  agit sur  $\mathbb{C}_R^1$ ,  $\bar{\lambda}$  sur  $\mathbb{C}_R^{\bar{1}}$ ,  $q$  sur  $\mathbb{C}_L^2$  et  $m$  sur  $\mathbb{C}^3$ .

— L'opérateur de Dirac :

$$D_F = \begin{pmatrix} S & T^* \\ T & \bar{S} \end{pmatrix}$$

donné dans la décomposition  $H_F = (\mathbb{C}_R^2 \oplus \mathbb{C}_L^2) \otimes \mathbb{C}^{4^o} \oplus \mathbb{C}^4 \otimes (\mathbb{C}_R^{2^o} \oplus \mathbb{C}_L^{2^o})$

— La structure réelle :  $J_F$  échange les facteurs droit et gauche dans les produits tensoriels de  $H_F$  (et donc échange une particule  $p$  avec son anti-particule  $\bar{p}$ )

— La graduation :  $\gamma_F = \mathbb{1}$  sur les particules gauches (i.e. d'indice  $L$ ) et les anti-particules droites (i.e. d'indice  $R$ ), et  $\gamma_F = -\mathbb{1}$  sur les particules droites et les anti-particules gauches.

Nous pouvons à présent écrire le triplet spectral du Modèle Standard :

$$(\mathbb{C}^\infty(M, A_F), L^2(S \otimes (M \times H_F)), D_M \otimes \mathbb{1} + \gamma_M \otimes D_F; J_M \otimes J_F, \gamma_M \otimes \gamma_F)$$

où  $M$  est une variété spin munie de ses opérateurs canoniques  $D_M$ ,  $J_M$ ,  $\gamma_M$ , et  $(A_F, H_F, D_F; J_F, \gamma_F)$  est l'espace interne défini ci-dessus.

## 3 Théories de jauge

### 3.1 Groupe de jauge d'un triplet spectral réel

**Définition 3.1.** *On dit que deux triplets spectraux  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_1, D_1; J_1, \gamma_1)$  et  $(\mathcal{A}_2, \mathcal{H}_2, D_2; J_2, \gamma_2)$  sont unitairement équivalents si  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$  et s'il existe un opérateur unitaire  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  tel que :*

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathcal{A}_1, U\pi_1(a)U^* &= \pi_2(a) \\ UD_1U^* &= D_2 \\ UJ_1U^* &= J_2 \\ U\gamma_1U^* &= \gamma_2 \end{aligned}$$

où on note  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les représentations de  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sur  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ .

**Définition 3.2.** *Un automorphisme intérieur d'une algèbre involutive  $\mathcal{A}$  est un automorphisme de la forme  $\alpha_u : a \mapsto uau^*$  pour un certain unitaire  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ .*

**Définition 3.3.** *Le groupe de jauge d'un triplet spectral réel  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D; J, \gamma)$  est défini par :*

$$\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{H}; J) = \{U = uJuJ^{-1} \mid u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})\}$$

où, par un léger abus de notation, on note  $u$  au lieu de  $\pi(u)$ , la représentation de  $u$  comme opérateur de  $\mathcal{H}$ .

L'élément  $U = uJuJ^{-1} \in \mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{H}; J)$  correspond à la composée des actions à gauche et à droite de  $u$  sur  $\mathcal{H}$  (qui commutent par hypothèse) *i.e.*  $U \equiv \text{Ad}(u) : \xi \mapsto u \cdot \xi \cdot u^\circ$ , appelée *action adjointe* de  $u$ . La propriété du commutant implique immédiatement que  $\text{Ad} : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{H}; J)$  est un morphisme de groupes, c'est-à-dire que  $\text{Ad}(uv) = \text{Ad}(u)\text{Ad}(v)$ .

On peut montrer que  $U$  induit une équivalence unitaire entre les triplets spectraux  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D; J, \gamma)$  et  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, UDU^*; J, \gamma)$ , où  $\mathcal{A}$  est modifiée par l'automorphisme intérieur  $\alpha_u$ . Il est intéressant de noter que cette transformation est un cas particulier d'un type important d'équivalence entre triplets spectraux appelée *auto-équivalence de Morita*, dont on peut montrer qu'elle induit la fluctuation  $D \rightarrow D_\omega = D + \omega + \epsilon' J\omega J^{-1}$ , où  $\omega$  est un élément de l'algèbre des 1-formes différentielles non-commutatives  $\Omega_D^1(\mathcal{A}) = \{\sum_k a_k [D, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathcal{A}\}$  (voir [7, Section 6.2]). On demande en outre que  $\omega^* = \omega$ , afin que  $\omega$  appartienne à l'algèbre de Lie  $i\mathfrak{u}(A_F)$ . Aussi, l'action d'un élément  $U = uJuJ^{-1} \in \mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{H}; J)$  transforme  $D_\omega \rightarrow UD_\omega U^*$ . Un court calcul montre que cette transformation équivaut à  $\omega \rightarrow u\omega u^* + u[D, u^*]$ , où l'on retrouve l'expression habituelle (1) pour la transformation d'un champ de jauge, après la substitution  $\partial \longleftrightarrow [D, \cdot]$ . L'opérateur  $D_\omega$  est appelé *opérateur de Dirac fluctué*. À partir de maintenant, on travaillera toujours à auto-équivalence de Morita près, c'est pourquoi on considèrera  $D_\omega$  au lieu de  $D$ .

Déterminons la forme générale des fluctuations de l'opérateur de Dirac sur une variété quasi-commutative. Pour simplifier, on supposera à partir de maintenant que  $M$  est de dimension 4 et  $F$  de KO-dimension paire, si bien que  $\epsilon'_F = 1$ . On a toujours  $D = D_M \otimes \mathbb{1} + \gamma_M \otimes D_F$ , et il suffit de considérer un champ de jauge  $\omega \in \Omega_D^1(\mathcal{C}^\infty(M) \otimes A_F)$  de la forme  $\omega = a[D, b]$  (le cas général en découle immédiatement par linéarité). Le champ de jauge se scinde en deux parties :

$$\begin{aligned} a[D_M \otimes \mathbb{1}, b] &= -i\gamma^\mu \otimes a\partial_\mu b \equiv \gamma^\mu \otimes A_\mu \\ a[\gamma_M \otimes D_F, b] &= \gamma_M \otimes a[D_F, b] \equiv \gamma_M \otimes \phi \end{aligned}$$

où  $A_\mu$  est encore appelé *champ de jauge* et  $\phi$  *champ scalaire*. Les deux sont auto-adjoints, puisque  $\omega$  l'est par hypothèse. Ainsi la fluctuation  $D \rightarrow D_\omega = D + \omega + \epsilon' J\omega J^{-1}$  se réécrit

$$\begin{aligned} D_\omega &= D_M \otimes \mathbb{1} + \gamma^\mu \otimes (A_\mu - J_F A_\mu J_F^{-1}) + \gamma_M \otimes (D_M + \phi + J_F \phi J_F^{-1}) \\ &= D_M \otimes \mathbb{1} + \gamma^\mu \otimes B_\mu + \gamma_M \otimes \Phi \end{aligned}$$

en posant  $B_\mu \equiv A_\mu - J_F A_\mu J_F^{-1}$  et  $\Phi \equiv D_M + \phi + J_F \phi J_F^{-1}$ . En considérant le fibré vectoriel trivial  $V = M \times H_F$  et le fibré produit tensoriel  $E = S \otimes V$ , on peut définir une connexion « tordue » sur  $E$  par  $\nabla_\mu^E = \nabla_\mu^S \otimes \mathbb{1} + i\mathbb{1} \otimes B_\mu$ . L'opérateur de Dirac  $D_\omega$  se réécrit alors de manière compacte :

$$D_\omega = -i\gamma^\mu \nabla_\mu^E + \gamma_M \otimes \phi$$

Enfin, comme nous l'avons vu, un élément  $U = uJuJ^{-1}$  du groupe de jauge  $\mathfrak{G}(M \times F)$  induit la transformation  $\omega \rightarrow u\omega u^* + u[D, u^*]$ , qui se divise en

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow uA_\mu u^* - iu\partial_\mu u^* \\ \phi &\rightarrow u\phi u^* + u[D_F, u^*] \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que  $D_M = -i\gamma^\mu \nabla_\mu^S$  et  $[\nabla_\mu^S, u^*] = \partial_\mu u^*$ .

### 3.2 Groupe de jauge du Modèle Standard

On peut montrer que le groupe de jauge de l'espace interne de la variété quasi-commutative du Modèle Standard est bien le groupe  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  attendu. Exprimons à présent les fluctuations de l'opérateur de Dirac. Soient  $a = (\lambda, q, m)$  et  $b = (\lambda', q', m')$  dans  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(M, A_F)$ . Le champ de jauge  $A_\mu = -ia\partial_\mu b$  se décompose comme suit<sup>3</sup> :

---

3. On rappelle que l'on a considéré un champ de jauge simple de la forme  $\omega = a[D, b]$ . Le cas général s'obtient en ajoutant un signe somme devant toutes ces expressions.

$$\begin{aligned}
- \Lambda_\mu &= -i\lambda\partial_\mu\lambda' & \text{sur } \nu_R \\
- \Lambda'_\mu &= -i\bar{\lambda}\partial_\mu\bar{\lambda}' & \text{sur } e_R \\
- Q_\mu &= -iq\partial_\mu q' & \text{sur } (\nu_L, e_L)
\end{aligned}$$

$$- \Lambda_\mu \mathbb{1}_4 \quad \text{sur } H_{\bar{t}}$$

$$- \Lambda_\mu \otimes \mathbb{1}_3, \Lambda'_\mu \otimes \mathbb{1}_3 \text{ et } Q_\mu \otimes \mathbb{1}_3 \quad \text{sur } H_q$$

$$- V'_\mu \otimes \mathbb{1}_4 = -im\partial_\mu m' \otimes \mathbb{1}_4 \quad \text{sur } H_{\bar{q}}.$$

On peut montrer que  $\text{Tr}(V'_\mu) = -\Lambda_\mu$ , et l'on définit alors le champ de jauge de trace nulle  $V_\mu$  par :  $\bar{V}_\mu = -V'_\mu - \frac{1}{3}\Lambda_\mu$ . D'autre part, un calcul donne pour les champs scalaires  $\phi$  et  $\Phi$  :

$$\phi|_{H_t} = \begin{pmatrix} 0 & Y^* \\ Y & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi|_{H_q} = \begin{pmatrix} 0 & X^* \\ X & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_3 \quad ; \quad \phi|_{H_{\bar{t}}} = \phi|_{H_{\bar{q}}} = 0$$

où  $Y$  et  $X$  s'expriment en fonction de deux champs complexes  $\phi_1, \phi_2$  et des composantes de l'opérateur de Dirac. Finalement,

$$\Phi = \begin{pmatrix} S + \phi & T^* \\ T & S + \phi \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.4.** *L'action d'un élément  $U = uJuJ^{-1}$  du groupe de jauge de la variété quasi-commutative du Modèle Standard pour  $u = (\lambda, q, m)$  sur l'opérateur de Dirac  $D_\omega = D_M \otimes \mathbb{1} + \gamma^\mu \otimes B_\mu + \gamma_M \otimes \Phi$  est implémentée par les transformations suivantes :*

$$\begin{aligned}
- \Lambda_\mu &\rightarrow \Lambda_\mu - i\lambda\partial_\mu\bar{\lambda} \\
- Q_\mu &\rightarrow qQ_\mu q^* - iq\partial_\mu q^* \\
- \bar{V}_\mu &\rightarrow m\bar{V}_\mu m^* - im\partial_\mu m^* \\
- \begin{pmatrix} \phi_1 + 1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \bar{\lambda}q \begin{pmatrix} \phi_1 + 1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui correspond aux transformations habituelles des champs de jauge  $U(1)$ ,  $SU(2)$  et  $SU(3)$ , ainsi qu'à la transformation du champ de Higgs dans le Modèle Standard.

## 4 Actions bosoniques et fermioniques

### 4.1 Action spectrale bosonique

Étant donné un triplet spectral, on cherche à définir l'invariant spectral le plus simple que l'on peut imaginer.

**Définition 4.1** (Action spectrale). *Soit  $\Lambda \in \mathbb{R}$  un paramètre de cut-off et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive continue paire à décroissance suffisamment rapide pour que  $f(D_\omega/\Lambda)$  soit un opérateur à trace. On suppose en outre que  $f$  est donnée par une transformée de Laplace-Stieltjes :  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} d\mu(t)$  pour une mesure positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^+$ . On appelle alors action spectrale bosonique, ou simplement action spectrale, la nombre réel :*

$$S_b[\omega] = \text{Tr} f \left( \frac{D_\omega}{\Lambda} \right).$$

On voit immédiatement que  $S_b[\omega]$  est invariante sous l'action d'un élément  $U$  du groupe de jauge  $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{H}; J)$ , car la transformation  $D_\omega \rightarrow UD_\omega U^*$  préserve les valeurs propres ; de même,  $f(D_\omega/\Lambda)$  et  $f(UD_\omega U^*/\Lambda)$  ont les mêmes valeurs propres donc la même trace.

Le développement asymptotique de l'action spectrale en puissances de  $\Lambda$  repose sur un théorème qui porte sur les Laplaciens généralisés au sens de la Définition 2.9. Il s'énonce comme suit.

**Théorème 4.2** (Développement du noyau de la chaleur). *Soit  $E$  un fibré vectoriel sur une variété riemannienne compacte  $M$  et  $H = \Delta^E - F$  un Laplacien généralisé. On dispose du développement asymptotique suivant lorsque  $t \rightarrow 0$ , connu sous le nom de développement du noyau de la chaleur :*

$$\mathrm{Tr}_{|L^2(E)}(e^{-tH}) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \sum_{k \geq 0} t^{\frac{k-n}{2}} a_k(H)$$

où  $n$  est la dimension de  $M$  et les coefficients  $a_k(H)$  s'appellent coefficients de Seeley-DeWitt, que l'on peut exprimer en fonction des connexions  $\Delta^E$  et  $\Delta^{LC}$ .

Il s'agit alors de procéder en trois étapes que nous ne détaillerons pas :

1. on montre que, sur une variété quasi-commutative, l'opérateur de Dirac a pour carré un Laplacien généralisé pour lequel on détermine  $F$
2. on réécrit l'action spectrale de manière à pouvoir utiliser le développement du noyau de la chaleur
3. on insère, dans les formules donnant les coefficients de Seeley-DeWitt, l'expression de  $F$  pour obtenir le développement asymptotique de l'action spectrale en puissances de  $\Lambda$

Dans le cas du triplet spectral canonique, l'explicitation des coefficients de Seeley-DeWitt génère le Lagrangien suivant :

**Proposition 4.3.** *Pour le triplet spectral canonique  $(\mathcal{C}^\infty(M), L^2(S), D_M; J_M, \gamma_M)$ , l'expansion de l'action spectrale donne :*

$$\mathrm{Tr} \left( f \left( \frac{D_M}{\Lambda} \right) \right) = \int_M \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}) \sqrt{g} d^4x + \mathcal{O}_{\Lambda \rightarrow \infty}(\Lambda^{-1})$$

où le Lagrangien est défini, à un terme de bord près, par :

$$\mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}) = \frac{f_4}{2\pi^2} \Lambda^4 - \frac{f_2 s}{24\pi^2} \Lambda^2 + \frac{f(0)}{480\pi^2} (s^2 - 3R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$$

Ici,  $s$  est la courbure scalaire,  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci et  $f_j = \int_0^{+\infty} f(x)x^{j-1}dx$  est le moment d'ordre  $j$  de  $f$ .

Il s'agit à présent d'effectuer le même développement pour la variété quasi-commutative du Modèle Standard. On fixe les notations suivantes :

- $\Lambda_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$
- $Q_{\mu\nu} = \partial_\mu Q_\nu - \partial_\nu Q_\mu + i[Q_\mu, Q_\nu]$
- $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + i[V_\mu, V_\nu]$
- $H = \begin{pmatrix} \phi_1 + 1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$
- $D_\mu H = \partial_\mu H + iQ_\mu^a \sigma^a H - i\Lambda_\mu H$

**Proposition 4.4.** *Sur la variété quasi-commutative du Modèle Standard, l'expansion de l'action spectrale donne :*

$$\mathrm{Tr} \left( f \left( \frac{D_\omega}{\Lambda} \right) \right) = \int_M 96\mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_A(\Lambda_\mu, Q_\mu, V_\mu) + \mathcal{L}_H(g_{\mu\nu}, \Lambda_\mu, Q_\mu, H) \sqrt{g} d^4x + \mathcal{O}_{\Lambda \rightarrow \infty}(\Lambda^{-1})$$

où :

- $\mathcal{L}_M(g_{\mu\nu})$  est défini par la Proposition 4.3
- $\mathcal{L}_A(\Lambda_\mu, Q_\mu, V_\mu) = \frac{f(0)}{\pi^2} \left( \frac{10}{3} \Lambda_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\nu} + \mathrm{Tr}(Q_{\mu\nu} Q^{\mu\nu}) + \mathrm{Tr}(V_{\mu\nu} V^{\mu\nu}) \right)$  est le Lagrangien libre des trois bosons de jauge associés aux symétries  $U(1)$ ,  $SU(2)$  et  $SU(3)$ .

- $\mathcal{L}_H(g_{\mu\nu}, \Lambda_\mu, Q_\mu, H) = \frac{bf(0)}{2\pi^2}|H|^4 + \frac{-2af_2\Lambda^2+ef(0)}{\pi^2}|H|^2 - \frac{cf_2\Lambda^2}{\pi^2} + \frac{df(0)}{4\pi^2} + \frac{af(0)}{12\pi^2}s|H|^2 + \frac{cf(0)}{24\pi^2}s + \frac{af(0)}{2\pi^2}|D_\mu H|^2$  est le potentiel de Higgs habituel, après avoir supprimé les termes de bords, plus des termes constants ou proportionnels à  $s$  (qui s'ajoutent à ceux déjà présents dans  $\mathcal{L}_M(g_{\mu\nu})$ ), ainsi qu'un couplage entre la géométrie de  $M$  et le boson de Higgs<sup>4</sup>. Les constantes  $a, b, c, d$  et  $e$  ne dépendent que des composantes de l'opérateur de Dirac.

L'expression finale de l'action spectrale du Modèle Standard, après avoir regroupé les termes identiques, supprimé les termes de bord et fixé des normalisations adéquates, s'écrit :

$$\begin{aligned}
S_b = \int_M & \underbrace{\left( \frac{48f_4}{\pi^2}\Lambda^4 - \frac{cf_2}{\pi^2}\Lambda^2 + \frac{df(0)}{4\pi^2} \right)}_{\text{terme cosmologique}} + \underbrace{\left( \frac{cf(0)}{24\pi^2} - \frac{4f_2}{\pi^2}\Lambda^2 \right)}_{\text{terme de courbure}} s - \underbrace{\frac{2f(0)}{10\pi^2}(s^2 - 3R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})}_{\text{termes d'ordre supérieur}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{4}Y_{\mu\nu}Y^{\mu\nu} + \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu}}_{\text{Lagrangien libre des champs de jauge}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2}|D_\mu H|^2}_{\text{terme cinétique du Higgs}} + \underbrace{\frac{b\pi^2}{2a^2f(0)}|H|^4 - \frac{2af_2\Lambda^2 - ef(0)}{af(0)}|H|^2}_{\text{potentiel de Higgs}} + \underbrace{\frac{1}{12}s|H|^2}_{\text{couplage Higgs-courbure}} \\
& + \mathcal{O}_{\Lambda \rightarrow \infty}(\Lambda^{-1})\sqrt{g}d^4x
\end{aligned}$$

où la dérivée covariante prend la forme habituelle  $D_\mu H = \partial_\mu H + \frac{1}{2}ig_2W_\mu^a\sigma^a H - \frac{1}{2}ig_1Y_\mu H$ .

## 4.2 Action fermionique

Après l'action spectrale bosonique, on cherche à définir un deuxième invariant qui met en jeu l'opérateur  $J$ .

**Définition 4.5** (Action fermionique). *Soit  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D_\omega; J, \gamma)$  un triplet spectral réel, et  $\psi \in \mathcal{H}$ . On appelle action fermionique la quantité :*

$$S_f[\omega, \psi] = \frac{1}{2}(J\psi, D_\omega\psi)$$

avec  $\psi \in \mathcal{H}^+$ , où l'on note  $\mathcal{H}^+$  l'espace propre associé à la valeur propre  $+1$  de  $\gamma$ .

Il n'est pas difficile de voir que  $S_f[\omega, \psi]$  est invariante de jauge, puisque l'action d'un élément  $U = uJuJ^{-1} \in \mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{H}; J)$  induit les transformations  $D_\omega \rightarrow UD_\omega U^*$ ,  $\psi \rightarrow U\psi$ . Il suffit alors d'utiliser la relation  $UJU^* = J$  qui découle de l'équivalence unitaire entre  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D; J, \gamma)$  et  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, UDU^*; J, \gamma)$ .

De longs et fastidieux calculs permettent alors d'obtenir la proposition suivante :

**Proposition 4.6.** *Sur la variété quasi-commutative du Modèle Standard, le développement de l'action fermionique donne :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(J\tilde{\psi}, D_\omega\tilde{\psi}) = \int_M & \underbrace{\mathcal{L}_{\text{libre}}}_{\text{termes cinétiques des fermions}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{couplages}}}_{\text{couplages entre fermions et bosons de jauge}} \\
& + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}}_{\text{couplages entre fermions et Higgs}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{Majorana}}}_{\text{masses de Majorana}} \sqrt{g}d^4x
\end{aligned}$$

4. Le couplage inévitable entre le boson de Higgs et la courbure scalaire a été examiné par Feynman dans [5]

## 5 Conclusion

Récapitulons le chemin parcouru jusqu'ici. Nous avons défini la structure de variété spin munie de son opérateur de Dirac, et avons traduit son essence spectrale en les termes du triplet spectral canonique qui lui est associé. En géomètres non-commutatifs avisés.e.s, nous avons étendu la notion de triplet spectral à des algèbres non-commutatives, pour enfin considérer des variétés quasi-commutatives, où une variété spin est légèrement tordue par un espace interne non-commutatif de dimension finie. Nous avons explicité la variété quasi-commutative utilisée pour reproduire le Modèle Standard. Puis, après avoir défini une notion générale de groupe de jauge associé à un triplet spectral, nous avons vérifié que l'on obtenait effectivement les transformations de jauge habituelles de la physique des particules. Enfin, nous avons considéré deux quantités invariantes de jauge naturelles, dont nous avons donné l'expansion asymptotique en fonction du paramètre de cut-off (pour l'action spectrale bosonique) ou le développement complet (pour l'action fermionique). La vérification minutieuse du fait que l'on retrouve bien tous les termes du Lagrangien du Modèle Standard (2) à partir de l'action complète  $\text{Tr} \left( f \left( \frac{D\omega}{\Lambda} \right) \right) + \frac{1}{2} (J\psi, D\omega\psi)$  est détaillée par Connes, Chamseddine et Marcolli dans [3]. Nous n'avons pas détaillé le mécanisme de brisure spontanée de symétrie, qui fonctionne comme à l'accoutumée (voir [7, Section 11.3.2])

La formulation du Modèle Standard en géométrie non-commutative présente plusieurs atouts indéniables. Le langage de la géométrie non-commutative et des triplets spectraux se révèle efficace pour reformuler les théories de jauge. Il permet de mettre en évidence des structures algébriques qui sous-tendent le Modèle Standard et qui sont invisibles dans sa description ordinaire par les physicien.ne.s, et fait apparaître le groupe de jauge  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  comme une conséquence directe de la structure non-commutative de l'espace-temps. Et puis, bien sûr, il offre une expression extrêmement compacte de l'action, qui contient tous les termes du Lagrangien habituel du Modèle Standard et de celui de la relativité générale, *avec les bons signes*. Pour finir, la formulation non-commutative du Modèle Standard améliore sa capacité prédictive en réduisant d'un le nombre de paramètres libres de la théorie (qui passe de 19 à 18), ce qui a permis à ses auteur.rice.s de proposer une prédiction concernant la masse du boson de Higgs en 2006 dans [3, Section 5.2], soit six ans avant la première mesure expérimentale au LHC. Cette prédiction s'est révélée erronée (aux alentours de 170 GeV, contre une valeur empirique à 125 GeV). Mais le changement de point de vue accompli par la traduction du Modèle Standard en géométrie non commutative donne une grande marge de manoeuvre pour apporter des corrections et des extensions, afin de rendre le modèle résilient. C'est ce qu'ont réalisé Connes et Chamseddine dans l'article [2] : en ajoutant un champ réel scalaire  $\sigma$  sur  $M$ , la masse du boson de Higgs du modèle devient compatible avec la valeur expérimentale, et prédit par ailleurs l'existence d'une nouvelle particule bosonique décrite par un champ scalaire réel d'une masse de l'ordre de  $10^{12}$  GeV. D'autres pistes pour aller au-delà du Modèle Standard s'offrent naturellement, par exemple en modifiant légèrement l'algèbre  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et son action sur  $H_F$ .

Pendant, la construction que nous avons vue souffre de plusieurs écueils non négligeables.

- Le défaut principal du Modèle Standard (celui des physicien.ne.s) est son incapacité à intégrer l'interaction gravitationnelle. Les lois de la gravitation sont correctement décrites par le Lagrangien de la relativité générale, mais se contenter d'ajouter un terme  $\mathcal{L}_{RG}$  au Lagrangien  $\mathcal{L}_{MS}$  ne suffit pas, à cause du passage à la quantification, car la théorie est alors non-renormalisable et ne permet aucune prédiction. La géométrie non-commutative, par essence liée aux algèbres d'opérateurs, peut sembler être un cadre idéal pour tenter de résoudre les problèmes de passage à la quantification et de renormalisabilité, en considérant dès le départ les champs comme des opérateurs dans un formalisme adapté, et non en transformant artificiellement des fonctions en opérateurs. Dans la formulation du Modèle Standard que nous avons présentée, ce potentiel de la géométrie non-commutative n'a pas été exploité car tous les objets sont manipulés *avant* quantification. L'apparente unification du Lagrangien de la relativité générale à celui du Modèle Standard que nous avons obtenu ne suffit donc pas à intégrer véritablement la gravitation aux autres interactions fondamentales de la physique des particules.
- De fortes contraintes peu souhaitables pèsent sur la variété  $M$  qui modélise l'Univers. En particulier, le développement du noyau de la chaleur donné par le Théorème 4.2 n'est valable que sur une variété riemannienne compacte. Par conséquent,  $M$  ne peut être homéomorphe à  $\mathbb{R}^4$  et sa métrique doit être euclidienne. Or, la relativité restreinte impose aux théories physiques d'être formulées dans un

cadre lorentzien. Alain Connes lui-même note dans certains de ses exposés la limite que constitue le caractère euclidien de sa théorie. Adapter le modèle au cadre lorentzien est un sujet de recherche actuel, qui s'avèrera possiblement inextricable malgré quelques avancées récentes prometteuses (voir [4] et [1]).

## Références

- [1] F. BESNARD AND C. BROUDER, *Noncommutative geometry, the lorentzian standard model and its b-l extension*, arXiv preprint arXiv:2010.04960, (2020).
- [2] A. H. CHAMSEDDINE AND A. CONNES, *Resilience of the spectral standard model*, Journal of High Energy Physics, 2012 (2012), pp. 1–11.
- [3] A. H. CHAMSEDDINE, A. CONNES, M. MARCOLLI, ET AL., *Gravity and the standard model with neutrino mixing*, Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 11 (2007), pp. 991–1089.
- [4] N. V. DANG AND M. WROCHNA, *Complex powers of the wave operator and the spectral action on lorentzian scattering spaces*, arXiv preprint arXiv:2012.00712, (2020).
- [5] R. FEYNMAN, *Feynman lectures on gravitation*, CRC Press, 2018.
- [6] J. M. GRACIA-BONDÍA, J. C. VÁRILLY, AND H. FIGUEROA, *Elements of noncommutative geometry*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] W. D. VAN SUIJLEKOM, *Noncommutative geometry and particle physics*, Springer, 2015.