

---

# Espaces de Teichmüller supérieurs et représentations Anosov

---

Roméo Troubat

École Normale Supérieure

Le 15 mai 2022



# Table des matières

0.1	Structures géométriques sur une surface de genre $g$ . . . . .	3
0.2	Espace de Teichmüller supérieur et représentations convexes co-compactes . . . . .	4
0.3	Représentations quasi-fuchsienues de $SO_0(n, 1)$ . . . . .	5
0.4	Composantes de Hitchin de $PSL(n, \mathbb{R})$ . . . . .	5
0.5	Représentations d'Anosov pour un groupe de surface . . . . .	6
0.6	Représentations d'Anosov pour un group $\Gamma$ hyperbolique quelconque . . . . .	8
0.7	Un autre exemple d'espace de Teichmüller supérieur . . . . .	9
0.8	Quelques questions ouvertes . . . . .	10
0.8.1	Espaces de Teichmüller pour $SO_0(p, q)$ . . . . .	10
0.8.2	Lien entre représentations Anosov et positivité dans le cas d'un groupe de surface . . . . .	10

## 0.1 Structures géométriques sur une surface de genre $g$

Soit  $S$  une surface différentielle de genre  $g \geq 2$  et soit  $\tilde{S}$  son revêtement universel. On munit  $S$  d'une métrique de courbure constante qu'on relève en une métrique sur  $\tilde{S}$ . Le théorème d'uniformisation de Riemann nous dit que  $\tilde{S}$  est isométrique à la sphère munie de sa métrique de courbure  $+1$ , au plan munit de sa métrique plate ou au plan hyperbolique munit de sa métrique de courbure  $-1$ . La formule de Gauss-Bonnet,

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K dV = 2 - 2g < 0,$$

nous permet de déduire que la seule métrique de courbure constante possible pour  $S$  est une métrique de courbure négative, autrement dit,  $\tilde{S}$  est isométrique au plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Fixons  $f$  une telle isométrie et posons

$$\rho : \begin{array}{ccc} \pi_1(S) & \longrightarrow & \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \\ \gamma & \longmapsto & f\gamma f^{-1} \end{array} .$$

Cette représentation est fidèle, discrète, et le choix d'une autre isométrie  $f_0 : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}^2$  revient à conjuguer  $\rho$  par un élément de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Inversement, une telle représentation  $\rho : \pi_1 \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  fidèle et discrète nous permet de quotienter  $\tilde{S}$  muni d'une métrique hyperbolique par  $\rho(\pi_1(S))$  pour obtenir une métrique de courbure constante égale à  $-1$  sur  $S$ . Il y a donc une bijection entre les métriques riemanniennes de courbure  $-1$  sur  $S$  et les éléments de l'espace quotient

$X(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  où  $X(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$  est l'ensemble des représentations fidèles et discrètes de  $\pi_1(S)$  vers  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Cet espace est composé des représentations fidèles et discrètes de  $\pi_1(S)$  vers  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Le groupe  $\pi_1(S)$  peut être décrit à l'aide de l'équation

$$\pi_1(S) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle,$$

choisir une représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  revient donc à choisir  $2g$  matrices  $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  vérifiant l'équation polynomiale  $[A_1, B_1] \dots [A_g, B_g] = \mathrm{Id}$ . L'ensemble  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$  peut donc être munit de la topologie de Zariski d'une sous-variété de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . On peut alors se poser la question de la description topologique de  $X(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

**Théorème 0.1.** *L'espace  $X(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  est formé de deux composantes connexes notées  $\mathcal{T}(S)$  et  $\mathcal{T}(\bar{S})$  correspondant aux deux orientations de  $S$ . Chacune des deux composantes est contractile, homéomorphe à  $\mathbb{R}^{6g-6}$ .*

Il est même possible de donner explicitement des coordonnées pour  $\mathcal{T}(S)$  ayant une interprétation géométrique simple. L'espace  $\mathcal{T}(S)$  est appelé *espace de Teichmüller*.

## 0.2 Espace de Teichmüller supérieur et représentations convexes co-compactes

Nous allons généraliser la notion précédente à des groupes de Lie autres que  $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Soit  $G$  un groupe de Lie simple de type non-compact et  $\Gamma$  un groupe sans torsion de type fini qui jouera le rôle de  $\pi_1(S)$ . Comme pour le cas précédent, nous allons étudier l'ensemble  $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)/G$  munit de la topologie de Zariski de  $G$ . On dit qu'une composante connexe de cet ensemble est un *espace de Teichmüller supérieur* si elle est composée de représentations fidèles et discrètes. Notons que l'existence d'un espace de Teichmüller supérieur pour des groupes  $G, \Gamma$  n'est a priori pas assuré. Lorsqu'un tel espace existe, il est alors intéressant d'essayer de relier les représentations de cet espace à des structures géométrique sur une variété.

Intéressons nous au cas classique où  $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$ . Il existe une famille classique de représentations de  $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$  fidèles et discrètes qui soit stable par petite déformation.

**Définition 0.2.** Une représentation  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{SO}_0(n, 1)$  est dite *convexe co-compacte* s'il existe une partie géodésiquement convexe  $C \subset \mathbb{H}^n$  sur laquelle  $\rho$  agit co-compactement.

**Proposition 0.3.** *Toute représentation convexe co-compacte est fidèle et discrète. De plus, l'ensemble des représentations convexe co-compactes forme une partie ouverte de  $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SO}_0(n, 1))$ .*

L'ensemble des représentations convexes co-compacte nous donne donc un bon candidat pour un espace de Teichmüller supérieur de  $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SO}_0(n, 1))$ . Il suffirait de

montrer que cet ensemble est fermé, i.e qu'une limite de représentations convexes co-compactes reste convexe co-compacte. Ce n'est en général pas le cas ; le résultat dépend de la nature du groupe  $\Gamma$ .

- Exemple 0.4.**
1. Pour  $\Gamma = \mathbb{F}_2$ , on a  $\text{Hom}(\mathbb{F}_2, SO_0(n, 1)) \simeq SO_0(n, 1) \times SO_0(n, 1)$  qui est connexe, l'ensemble des représentations convexes co-compactes ne peut donc pas être fermé car il serait alors composé de toutes les représentations de  $\mathbb{F}_2$  vers  $SO_0(n, 1)$ , dont la représentations triviale qui n'est pas fidèle.
  2. Quand  $\Gamma$  est le groupe fondamentale d'une  $n$ -variété hyperbolique fermée, on peut montrer que les représentations convexes co-compactes forment un espace de Teichmüller supérieur. Le théorème de rigidité de Mostow nous dit même que dans l'espace quotient  $\text{Hom}(\Gamma, SO_0(n, 1))/SO_0(n, 1)$ , l'espace de ces représentations est réduit à un singleton.

### 0.3 Représentations quasi-fuchsiennes de $SO_0(n, 1)$

Nous allons introduire un deuxième type de représentations de  $\text{Hom}(\Gamma, SO_0(n, 1))$  où  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une  $(n - 1)$ -variété hyperbolique fermée. Soit  $\tilde{\rho}$  une représentation de  $\Gamma$  vers  $SO_0(n - 1, 1)$  et  $SO_0(n - 1, 1) \subset SO_0(n, 1)$  une inclusion obtenue par l'isomorphisme  $SO_0(n - 1, 1) \simeq \text{Stab}(x)$  où  $x \in \mathbb{H}^n$ . On pose  $\rho$  la représentation de  $\Gamma$  vers  $SO_0(n, 1)$  obtenue par la composition de  $\tilde{\rho}$  et de l'inclusion  $SO_0(n - 1, 1) \subset SO_0(n, 1)$ .

**Définition 0.5.** On dit qu'une telle représentation est *fuchsienne*.

Nous allons chercher à déformer ces représentations. Considérons les composantes connexes de  $\text{Hom}(\Gamma, SO_0(n, 1))$  contenant des représentations fuchsiennes.

**Définition 0.6.** Une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, SO_0(n, 1))$  est dite *quasi-fuchsienne* si elle appartient à une composante connexe contenant une représentation fuchsienne.

**Proposition 0.7.** *Une représentation de  $SO_0(n, 1)$  est quasi-fuchsienne si et seulement si elle préserve un ensemble  $\Lambda$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^{n-2}$  dans le bord visuel  $\partial\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ .*

Il est possible de montrer que les représentations quasi-fuchsiennes ne forment pas des espaces de Teichmüller supérieurs de  $SO_0(n, 1)$ . Nous allons en revanche pouvoir appliquer cette construction à d'autres groupes  $G$ , pour lesquels elle va donner de meilleurs résultats.

### 0.4 Composantes de Hitchin de $\text{PSL}(n, \mathbb{R})$ .

Plaçons nous maintenant dans le cas  $\Gamma = \pi_1(S)$  où  $S$  est une surface hyperbolique fermée et  $G = \text{PSL}(n, \mathbb{R})$ . Soit  $\tau : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}(n, \mathbb{R})$  une représentation irréductible, unique à conjugaison près. On dit qu'une représentation  $\rho$  de  $\Gamma$  vers

$\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$  est *fuchsienne* si elle est de la forme  $\tau \circ \tilde{\rho}$  où  $\tilde{\rho}$  est une représentation de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Comme dans le cas précédent, on appelle *représentation quasi-fuchsienne* ou *représentation de Hitchin* les éléments des composantes connexes de  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R}))$  contenant des représentations fuchiennes. Ces composantes connexes sont appelées *composantes de Hitchin*.

Une étude précise des composantes de Hitchin a permis de montrer qu'elles étaient composées de représentations fidèles et discrètes. On en déduit donc le théorème suivant [1] :

**Théorème 0.8.** *Les composantes de Hitchin sont des espaces de Teichmüller supérieurs de  $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ .*

Comme pour les espaces  $\mathcal{T}(S)$  et  $\mathcal{T}(\bar{S})$  de  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , nous pouvons également décrire précisément la topologie de  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ .

**Théorème 0.9.** *Quand  $n$  est impair, l'espace  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$  possède trois composante connexes dont une composante de Hitchin. Quand  $n$  est pair, il possède six composantes connexes dont deux de Hitchin. Toutes les composantes connexes sont homeomorphes à des boules de dimension  $\chi(S)(1 - n^2)$ , dont il est possible d'exhiber des paramétrisations explicites.*

Enfin, remarquons qu'il manque un résultat pour compléter la généralisation du cas  $n = 2$ . Les représentations formant les espaces de Teichmüller de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  proviennent toutes de structures géométriques, en l'occurrence de structures hyperboliques sur la surface  $S$ . Nous pouvons nous demander, ici, si les représentations de Hitchin découlent elles aussi de l'holonomie de structures géométriques intéressantes. Il existe, par exemple, une réponse simple pour le cas  $n = 3$  [2].

**Théorème 0.10.** *Pour toute représentation de Hitchin  $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(3, \mathbb{R}))$ , il existe un ouvert proprement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  stable par  $\rho$  tel que  $\Omega/\rho(\pi_1(S))$  soit homéomorphe à  $S$ . Autrement dit, les représentations de Hitchin sont exactement les holonomies de structures projectives réelles convexes sur  $S$ .*

Dans son article, F. Labourie propose une interprétation géométrique pour  $n \geq 4$ .

## 0.5 Représentations d'Anosov pour un groupe de surface

Nous allons chercher, pour un groupe de Lie simple  $G$  de type non-compact quelconque, une généralisation aux notions de représentations convexes co-compactes pour  $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$  et de représentations de Hitchin pour  $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ . Nous aimerions également que cette notion, comme pour les représentations convexes co-compactes, soit stable par petite déformation et ne soit vérifiée que par des repré-

sentations fidèles et discrètes. Il suffira alors, au cas par cas, de montrer qu'elle passe à la limite pour exhiber des espaces de Teichmüller supérieurs pour  $G$ . C'est dans l'article de F. Labourie [3] que la définition de *représentation Anosov* est donnée pour la première fois. Supposons pour l'instant que  $\Gamma$  soit le groupe fondamental d'une surface hyperbolique fermée, i.e  $\Gamma = \pi_1(S)$ .

Soient  $P^-$  et  $P^+$  deux sous-groupes paraboliques opposés de  $G$ . Les espaces quotients  $G/P^-$  et  $G/P^+$  peuvent être interprétés comme des variétés drapeaux.

**Proposition 0.11.** *La variété produit  $G/P^- \times G/P^+$  contient une unique  $G$  orbite ouverte. Deux éléments  $A \in G/P^-$  et  $B \in G/P^+$  sont dit transverses si  $(A, B)$  est dans cette orbite.*

Intéressons-nous maintenant à l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Le groupe  $\Gamma$ , via son action sur  $\mathbb{H}^2$ , agit également sur son bord visuel  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ . Ce dernier est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . Nous noterons  $M = T^1 \mathbb{H}^2$  le fibré tangent unitaire sur lequel le flot hyperbolique  $\phi_t$  agit. Enfin, nous appellerons  $\tau^-$  et  $\tau^+$  les applications qui à un élément  $(x, v) \in M$  associent les points passés infinis et futur infinis dans  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$  de la géodésique correspondante.

**Définition 0.12.** Une représentation  $\rho$  de  $\Gamma$  vers  $G$  est dite  $(P^-, P^+)$ -Anosov, ou juste  $P^-$ -Anosov, s'il existe des applications  $\xi^- : \partial_\infty \mathbb{H}^2 \rightarrow G/P^-$  et  $\xi^+ : \partial_\infty \mathbb{H}^2 \rightarrow G/P^+$  telles que :

1. Les applications  $\xi^-$  et  $\xi^+$  soient continues et  $\rho$ -équivariantes,
2. Pour tous  $t^-, t^+$  points distincts de  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ , les images  $\xi^-(t^-)$  et  $\xi^+(t^+)$  soient transverses,
3. Pour toute famille de normes continues et  $\rho$ -équivariantes  $(\|\cdot\|_m)_{m \in M}$  sur  $T_{\xi^-(\tau^-(m))}(G/P^-)$  (resp.  $T_{\xi^+(\tau^+(m))}(G/P^+)$ ), on a la propriété suivante : Il existe des constantes strictement positives  $A, a$  telles que pour tous  $t \geq 0$ ,  $m \in M$  et  $e \in T_{\xi^-(\tau^-(m))}(G/P^-)$  (resp.  $e \in T_{\xi^+(\tau^+(m))}(G/P^+)$ ),

$$\|e\|_{\phi_{-t}(m)} \leq A e^{-at} \|e\|_m,$$

$$(\|e\|_{\phi_t(m)} \leq A e^{-at} \|e\|_m).$$

Il n'est pas tout à fait évident de voir que la notion de représentation Anosov est bien la bonne notion à étudier. Il n'est pas très compliqué de vérifier que les représentations Anosov sont nécessairement fidèles et discrètes. Avec un peu plus de travail, on peut également montrer le résultat suivant :

**Théorème 0.13.** *Soit  $\rho$  une représentation  $P$ -Anosov de  $\text{Hom}(\Gamma, G)$ . Il existe un ouvert  $U$  de  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  contenant  $\rho$  tel que toutes les représentations de  $U$  soient  $P$ -Anosov. Autrement dit, les représentations Anosov sont stables par petites déformations.*

Intéressons-nous au cas particulier  $G = \text{SO}_0(n, 1)$ . Dans ce cas, pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$ , l'espace  $G/P$  est  $G$ -homéomorphe au bord visuel  $\partial \mathbb{H}^n$ .

**Proposition 0.14.** *Une représentation  $\rho$  de  $\Gamma$  vers  $\mathrm{SO}_0(n, 1)$  est convexe co-compacte si et seulement si elle est  $P$ -Anosov. Les applications  $\xi^-$  et  $\xi^+$  ont alors la même image  $\Lambda$  dans  $\partial\mathbb{H}^n$ , dont l'enveloppe convexe  $C = \mathrm{Conv}(\Lambda)$  joue le rôle du sous-ensemble de  $\mathbb{H}^n$  stable par  $\rho$ .*

De même, nous allons étudier le cas particulier  $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ . Pour tout  $k$ , notons  $P_k \subset \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$  le sous-ensemble des stabilisateurs de la projection d'un  $k$ -espace  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ . Il s'agit d'un sous-groupe parabolique de  $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ . On dira qu'une représentation est *Borel-Anosov* si et seulement si elle est  $P_k$ -Anosov pour tout  $k$ .

**Théorème 0.15.** *Les représentations Borel-Anosov sont exactement les représentations de Hitchin.*

On voit donc que l'on obtient bien la notion voulue pour le cas  $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ .

## 0.6 Représentations d'Anosov pour un group $\Gamma$ hyperbolique quelconque

Commençons par quelques définitions rapides.

**Définition 0.16.** Un espace géodésique  $E$  est dit  *$\delta$ -Gromov hyperbolique* si pour tout triangle géodésique dans  $E$  de côtés  $c_0, c_1, c_2$ , on a pour tout  $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in c_i$ ,

$$d(x, c_{i-1} \cup c_{i+1}) \leq \delta.$$

On peut par exemple montrer que l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  est Gromov-hyperbolique.

**Définition 0.17.** Un groupe de type fini sans torsion  $\Gamma$  est dit *hyperbolique* si son graphe de Cayley est Gromov-hyperbolique.

La notion de groupe hyperbolique est très adaptée à celle de représentation Anosov car elle nous permet de considérer le bord hyperbolique  $\partial\Gamma$  du groupe  $\Gamma$ .

**Définition 0.18.** On appelle *bord hyperbolique* du groupe  $\Gamma$  le bord visuel de son graphe de Cayley, dont la bonne définition découle notamment de sa Gromov-hyperbolicité.

Un théorème simple nous permet de décrire la topologie du bord de la plupart des groupes hyperboliques.

**Théorème 0.19.** *Supposons qu'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  agit fidèlement, discrètement, proprement discontinuement et co-compactement sur un espace Gromov-hyperbolique  $E$ . Alors le bord  $\partial\Gamma$  est homéomorphe au bord visuel  $\partial_\infty E$ .*

On en déduit quelques résultats particuliers :

- Exemple 0.20.**
1. Quand  $\Gamma$  est un groupe de surface, on a  $\partial\Gamma \simeq \mathbb{S}^1$  car  $\Gamma$  agit co-compactement sur la surface hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ .
  2. Quand  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une  $n$ -variété hyperbolique fermée, on a  $\partial\Gamma \simeq \mathbb{S}^{n-1}$  car  $\Gamma$  agit co-compactement sur  $\mathbb{H}^n$ .
  3. Le groupe libre  $\Gamma = \mathbb{F}_n$  est hyperbolique et son bord  $\partial\Gamma$  est un ensemble de Cantor sur la  $(n-1)$ -sphère.

Définissons maintenant la notion de représentation Anosov dans le cas d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  [4]. On admettra qu'il est possible de construire un espace  $M$  jouant le rôle du fibré tangent unitaire dans le cas d'un groupe de surface sur lequel agit un flot  $\phi_t$ .

**Définition 0.21.** Une représentation  $\rho$  de  $\Gamma$  vers  $G$  est dite  $(P^-, P^+)$ -Anosov, s'il existe des applications  $\xi^- : \partial\Gamma \rightarrow G/P^-$  et  $\xi^+ : \partial\Gamma \rightarrow G/P^+$  telles que :

1. Les applications  $\xi^-$  et  $\xi^+$  soient continues et  $\rho$ -équivariantes,
2. Pour tous  $t^-, t^+$  points distincts de  $\partial\Gamma$ , les images  $\xi^-(t^-)$  et  $\xi^+(t^+)$  soient transverses,
3. Pour toute famille de normes continues et  $\rho$ -équivariantes  $(\|\cdot\|_m)_{m \in M}$  sur  $T_{\xi^-(\tau^-(m))}(G/P^-)$  (resp.  $T_{\xi^+(\tau^+(m))}(G/P^+)$ ), on a la propriété suivante : Il existe des constantes strictement positives  $A, a$  telles que pour tous  $t \geq 0$ ,  $m \in M$  et  $e \in T_{\xi^-(\tau^-(m))}(G/P^-)$  (resp.  $e \in T_{\xi^+(\tau^+(m))}(G/P^+)$ ),

$$\|e\|_{\phi_{-t}(m)} \leq Ae^{-at}\|e\|_m,$$

$$(\|e\|_{\phi_t(m)} \leq Ae^{-at}\|e\|_m).$$

Dans le cas d'un groupe de surface, on a  $\partial\pi_1(S) \simeq \partial_\infty\mathbb{H}^2$ , on retombe bien sur la même définition. On peut maintenant considérer, par exemple, le cas d'un réseau uniforme de  $\mathrm{SO}_0(n, 1)$ . Les applications  $\xi^-$  et  $\xi^+$  vont alors de  $\partial_\infty\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$  vers  $G/P^-$  et  $G/P^+$ .

## 0.7 Un autre exemple d'espace de Teichmüller supérieur

Comme nous l'avons vu, les représentations d'Anosov sont des représentations fidèles et discrètes qui vérifient le critère d'ouverture. Pour exhiber des espaces de Teichmüller supérieurs d'un groupe  $G$ , il suffit donc de montrer qu'un ensemble de représentations  $P$ -Anosov est fermé dans  $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)/G$ . Prenons le cas traité en [5] où  $G = \mathrm{SO}_0(n, 2)$ ,  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une  $n$ -variété hyperbolique fermée et où  $P$  est le stabilisateur d'une droite isotrope de  $\mathbb{R}^{n,2}$  muni de la forme  $x_1^2 + \dots + x_n^2 - y_1^2 - y_2^2$ .

**Théorème 0.22.** *L'ensemble des représentations  $P$ -Anosov forme une partie fermée de  $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SO}_0(n, 2))$ . Autrement dit, il s'agit d'un espace de Teichmüller supérieur.*

Comme pour le cas  $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$ , ces représentations possèdent une interprétation géométrique simple. Considérons l'espace pseudo Riemannien  $\mathbb{H}^{n,1} \simeq \mathrm{SO}_0(n, 2)/\mathrm{SO}_0(n, 1)$ . Il peut, comme l'espace hyperbolique, être muni d'un bord topologique  $\partial\mathbb{H}^{n,1}$  pouvant être identifié à l'ensemble des droites isotropes de  $\mathbb{R}^{n,2}$ . On a donc  $\partial\mathbb{H}^{n,1} \simeq \mathrm{SO}_0(n, 2)/P$ . Les applications  $\xi^-$  et  $\xi^+$  vont alors de  $\partial\Gamma \simeq \mathbb{S}^{n-1}$  vers  $\partial\mathbb{H}^{n,1}$ .

**Proposition 0.23.** *Les applications  $\xi^-$  et  $\xi^+$  ont la même image  $\Lambda \subset \partial\mathbb{H}^{n,1}$ . Le dual ouvert de son enveloppe convexe, noté  $E(\Lambda)$ , est inclus dans  $\mathbb{H}^{n,1}$ .*

Il est possible de montrer que toute représentation  $P$ -Anosov  $\rho$  agit fidèlement, discrètement et proprement discontinuement sur  $E(\Lambda)$ . L'espace quotient  $E(\Lambda)/\rho(\Gamma)$  vérifie certaines propriétés de la théorie des espaces lorentziens. Il est possible de montrer que, réciproquement, toute holonomie d'un espace lorentzien vérifiant ces propriétés est une représentation  $P$ -Anosov, notre espace de Teichmüller supérieur peut donc être interprété comme un ensemble de structures géométriques sur une variété.

## 0.8 Quelques questions ouvertes

Nous allons conclure en discutant de quelques questions ouvertes sur les espaces de Teichmüller supérieurs.

### 0.8.1 Espaces de Teichmüller pour $\mathrm{SO}_0(p, q)$

Comme pour le cas  $G = \mathrm{SO}_0(n, 2)$ , il est possible de montrer [6] que les représentations  $P$ -Anosov dans  $\mathrm{Hom}(\pi_1(N), \mathrm{SO}_0(p, q))$  sont les représentations préservant un ensemble  $\Lambda$  dans  $\partial\mathbb{H}^{p,q}$  vérifiant quelques propriétés supplémentaires. Le fait que l'ensemble des représentations  $P$ -Anosov soit fermé est en revanche une question ouverte. De même, nous ne possédons pour l'instant aucune interprétation géométrique des représentations  $P$ -Anosov.

### 0.8.2 Lien entre représentations Anosov et positivité dans le cas d'un groupe de surface

Dans le cas  $\Gamma = \pi_1(S)$ , il y a récemment eu des tentatives pour lier les représentations Anosov d'un groupe de Lie  $G$  à une notion de *représentations positives* [7]. Ces représentations positives ne peuvent être définies que dans certains groupes de Lie simples, mais il a été montré que dans quelques cas connues, elles coïncidaient avec les représentations Anosov formant un espace de Teichmüller supérieur. Nous aimerions montrer que ces représentations positives, quand elles existent, décrivent l'ensemble des espaces de Teichmüller supérieurs des ensembles  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)/G$ .

# Bibliographie

- [1] N.J. Hitchin. Lie groups and teichmüller space. *Topology*, 31(3) :449–473, 1992.
- [2] Suhyoung Choi and William M. Goldman. Convex real projective structures on closed surfaces are closed. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 118(2) :657–661, 1993.
- [3] Francois Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Inventiones mathematicae*, 165, 02 2004.
- [4] Olivier Guichard and Anna Wienhard. Anosov representations : domains of discontinuity and applications. *Inventiones mathematicae*, 190(2) :357–438, feb 2012.
- [5] Thierry Barbot. Deformations of fuchsian ads representations are quasi-fuchsian, 2013.
- [6] Jeffrey Danciger, François Guéritaud, and Fanny Kassel. Convex cocompactness in pseudo-riemannian hyperbolic spaces, 2017.
- [7] Olivier Guichard, François Labourie, and Anna Wienhard. Positivity and representations of surface groups, 2021.