Introduction au domaine de recherche

Théo Ballu, encadré par Kilian Raschel et Cédric Boutillier

Table des matières

Résumé

La compactification de Martin a été introduite par Martin en 1941 pour le mouvement brownien. Dans ce texte, nous nous intéresserons au cas discret des marches aléatoires, initié par Doob dans [3] en 1959. Grossièrement, on part d'une marche aléatoire transiente et on rajoute des points à l'infini (on compactifie) pour faire converger la marche. Cette compactification donne lieu à des liens avec l'étude des fonctions harmoniques.

Dans un premier paragraphe 1, on introduit la notion générale de compactification de l'espace d'états d'une marche aléatoire et on fait le lien avec le problème de Dirichlet. En section 2, on définit l'objet central de ce texte : la frontière de Martin, ainsi que les principaux résultats généraux la concernant, à savoir les théorèmes de représentation et de convergence.

Les parties 3 et 4 s'intéressent à la description de la frontière de Martin dans des cas particuliers. En partie 3, on rappelle les résultats historiques de Ney et Spitzer en 1966 dans le cas homogène d'une marche sur $\mathbb{Z}^d$. Dans cette partie, nous avons inclus des éléments de preuves en se basant sur la preuve de [8]. Ces esquisses de preuves montrent la richesse des techniques utilisées (techniques probabilistes évidemment, mais aussi de l'analyse de Fourier et l'utilisation de fonctions analytiques). En partie 4, on présente deux exemples d'étude de la frontière de Martin dans des cas inhomogènes, traités par Irina

Ignatiouk-Robert dans les années 2000. Il s'agit de marches sur le demi-espace $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$, la première étant tuée lorsqu'elle sort du demi-espace et la seconde étant réfléchie. Les techniques utilisées (non détaillées dans ce texte) combinent des résultats généraux sur les processus de Markov additifs et des principes de grandes déviations.

Enfin, en partie 5, on présente des pistes de recherche pour le travail de thèse ainsi que quelques liens possibles avec des modèles issus de la physique statistique.

1 Compactification, marches aléatoires et problème de Dirichlet

L'étude de la frontière de Martin est reliée à la théorie du potentiel qui étudie les fonctions harmoniques, c'est-à-dire de laplacien nul. Dans le cadre de marches aléatoires, le laplacien que l'on choisit est $I - P$, où I est l'identité et P la matrice de transition de la chaîne de Markov. Ainsi, on commence par introduire le problème de Dirichlet avec condition au bord sur la frontière de l'espace d'état d'une marche aléatoire, puis on fait le lien avec la convergence de cette marche aléatoire.

C'est Doob en 1959 (voir [3]) qui fait le lien entre compactification de Martin et théorie du potentiel. On se réfère principalement à [8] pour une approche plus moderne.

Cadre 1.1. *Soit X un espace métrique discret séparable (qui sera en général $\mathbb{Z}^d$ ou une partie de $\mathbb{Z}^d$). On considère une compactification de X, c'est-à-dire un espace topologique compact (et encore séparable) $\hat{X}$ contenant X et dans lequel X est un ouvert dense. On note ∂X la frontière de X dans $\hat{X}$.*

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire transiente irréductible sur X, de matrice de transition P. On note $\mathbb{P}_x$ la probabilité conditionnellement à $Z_0 = x$. Une fonction f définie sur X est dite harmonique (pour P) si $Pf = f$, autrement dit si $\forall x \in X,\ \sum_{y\in X} P(x, y)f(y) = f(x)$.

Remarque 1.2. *La transience de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet de définir sa fonction de Green (ou de potentiel) $G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y)$, qui sera centrale à partir de la section 2.*

Définition 1.3. *Une fonction f bornée sur X est dite harmonique (pour la matrice de transition P) si $Pf = f$, autrement dit si pour tout $x \in X$, $f(x) = \sum_{y\in X} P(x, y)f(y)$.*

Remarque 1.4. *Sous l'hypothèse d'irréductibilité, on dispose d'un principe du maximum (resp. minimum) pour les fonctions harmoniques.*

Définition 1.5. *Soit φ une fonction continue bornée sur ∂X. Résoudre le problème de Dirichlet avec condition φ au bord consiste à trouver les fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ harmoniques telles que pour tout $\xi \in \partial X$, $f(x) \underset{x\to\xi}{\longrightarrow} \varphi(\xi)$.*

Remarque 1.6. *D'après le principe du maximum (resp. minimum), il y a unicité de la solution au problème de Dirichlet.*

Nous allons construire, sous certaines hypothèses, une famille de probabilités harmoniques puis de solutions au problème de Dirichlet.
Supposons que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. vers une variable Z_∞ à valeurs dans ∂X, et posons $\nu_x(B) = \mathbb{P}_x(Z_\infty \in B)$ pour B borélien de ∂X. Une application de la propriété de Markov au premier pas conduit à $\nu_x = \sum_{y\in X} P(x,y)\nu_y$, on dira que la famille des ν_x est harmonique. On définit nos candidates solutions au problème de Dirichlet par

$$h_\varphi(x) = \int_{\partial X} \varphi(z)\mathrm{d}\nu_x(z). \tag{1}$$

L'harmonicité de h_φ découle de l'harmonicité des ν_x. Pour que la convergence de la définition 1.5 ait lieu pour toutes les fonctions φ continues, il faut et il suffit que pour tout $\xi \in \partial X$, on ait $\nu_x \xrightarrow[x\to\xi]{loi} \delta_\xi$.

La construction précédente a été réalisée sous l'hypothèse de convergence presque sûre de (Z_n) vers Z_∞. Il est remarquable que cette convergence soit en fait une condition nécessaire à l'existence d'une solution au problème de Dirichlet :

Théorème 1.7. *Le problème de Dirichlet associé à P possède une solution pour toute condition au bord continue bornée si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Il existe une variable Z_∞ à valeurs dans ∂X telle que $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P.S.} Z_\infty$;*
2. *pour tout $\xi \in \partial X$, $\nu_x \xrightarrow[x\to\xi]{loi} \delta_\xi$ (où les ν_x sont définies comme précédemment, et existent grâce à la condition 1).*

2 Compactification de Martin et frontière de Martin

2.1 Définitions

Dans la section précédente, on se plaçait dans le cadre d'une compactification assez générale. On va maintenant définir une compactification particulière, celle de Martin, et sa frontière associée qui est au cœur de ce mémoire.

Rappelons que l'on dispose d'une marche aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ transiente irréductible sur un espace d'états X, de matrice de transition P. La fonction de Green (ou noyau de potentiel) G est définie par

$$G(x,y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(Z_n=y)}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(x,y).$$

La transience de la marche aléatoire assure que G est finie, et l'irréductibilité que $G(x,y) > 0$ pour tous $x, y \in X$. On définit alors, pour $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $Gf(x) = \sum_{y\in X} G(x,y)f(y)$. Par somme géométrique, l'opérateur $G = \sum_{n=0}^{\infty} P^n$ est l'inverse du laplacien $I - P$.

Définition 2.1. *On fixe un point de référence $o \in X$. Le noyau de Martin de la marche $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction K définie par*

$$K(x,y) = \frac{G(x,y)}{G(o,y)}.$$

On peut motiver l'introduction du noyau de Martin par des arguments harmoniques, c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Notons B l'ensemble convexe des fonctions f surharmoniques (i.e. $Pf \leq f$) positives telles que $f(o) = 1$. Alors les points extrémaux de B sont :*

1. *Les fonctions $K(\cdot, y)$;*
2. *Les fonctions f qui sont harmoniques minimales (ce qui signifie que f est harmonique positive et que $f \leq h$ pour h harmonique entraîne que $\frac{f}{h}$ est constante).*

Pour définir la compactification de Martin, nous aurons besoin de comparer les compactifications. Prenons $\hat{X}_1$ et $\hat{X}_2$ deux compactifications de X. On dira que $\hat{X}_1 \leq \hat{X}_2$ si l'identité sur X se prolonge en une surjection continue de $\hat{X}_2$ sur $\hat{X}_1$. Cela définit un ordre partiel.

Définition 2.3. *La compactification de Martin $\mathcal{M}(X,P)$ de X relativement à la matrice de transition P est la plus petite compactification de X (au sens précédent) pour laquelle toutes les fonctions $K(x,\cdot)$ se prolongent continûment.*

La frontière de Martin est alors $\partial X = \mathcal{M}(X,P) \setminus X$.

Remarque 2.4. *Il n'est a priori pas évident qu'il existe une plus petite compactification, ni qu'elle est unique. Pour s'en assurer, des constructions plus explicites existent, notamment en donnant une certaine métrique à X puis en le complétant (voir [8] page 258, c'est aussi l'approche de [3]).*

Remarque 2.5. *On peut donner une définition plus pratique de la frontière de Martin. Une suite (y_n) converge vers un point ξ de la frontière de Martin si elle tend vers ∞ (i.e. quitte toute partie finie de X) et si la suite de fonctions $(K(\cdot, y_n))$ converge simplement vers une fonction $K(\cdot,\xi)$. On identifie deux points ξ_1 et ξ_2 de la frontière de Martin si les fonctions $K(\cdot,\xi_1)$ et $K(\cdot,\xi_2)$ sont égales (cette identification permet de satisfaire la condition de minimalité). Ainsi, la description de la frontière de Martin se fait par le calcul asymptotique des noyaux de Martin, comme nous le verrons dans la suite.*

Pour finir cette introduction à la théorie de la frontière de Martin, nous énonçons deux résultats fondamentaux, dits de représentation et de convergence.

2.2 Théorème de représentation

Le théorème de représentation permet de décrire les fonctions harmoniques positives et les fonctions harmoniques minimales.

Théorème 2.6 (Représentation de Poisson-Martin). *Pour toute fonction harmonique positive h, il existe une mesure borélienne ν_h sur $\mathcal{M}(X,P)$ telle que pour tout $x \in X$,*

$$h(x) = \int_{\mathcal{M}(X,P)} K(x,\xi)\mathrm{d}\nu_h(\xi).$$

De plus, si h est minimale, alors ν_h est (un multiple d') une mesure de Dirac, de sorte que h est un multiple d'un $K(\cdot,\xi)$, $\xi \in \mathcal{M}(X,P)$.

2.3 Théorème de convergence

Pour le théorème de convergence, nous avons besoin d'introduire la frontière de Martin minimale.

Définition 2.7. *La frontière de Martin minimale $\mathcal{M}_{\min}$ est l'ensemble des points ξ de la frontière de Martin tels que $K(\cdot,\xi)$ soit harmonique minimale.*

Théorème 2.8 (Convergence). *Pour tout $x \in X$, la marche aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}_x$-presque sûrement vers une variable Z_∞ à valeurs dans $\mathcal{M}_{\min}$. De plus, en notant μ_x la loi de Z_∞ conditionnellement à $Z_0 = x$, on a*

$$\mu_x(B) = \int_B K(x,\xi)\mathrm{d}\mu_o(\xi)$$

pour tout borélien B de $\mathcal{M}_{\min}$ (on rappelle que o est le point de référence utilisé pour définir le noyau de Martin).

3 Frontière de Martin sur $\mathbb{Z}^d$

La définition de la frontière de Martin du paragraphe précédent est abstraite. Dans la suite, on cherche à connaître plus explicitement la frontière de Martin dans des cas particuliers. On commence dans cette section par les résultats fondamentaux de Ney et Spitzer dans [6] en 1966. Dans le premier cas étudié, la frontière de Martin est réduite à un point ; dans le second cas étudié, elle est homéomorphe à une sphère. Dans les deux cas, le résultat découle d'une étude asymptotique de la fonction de Green G.

3.1 Cas centré

Le résultat est le suivant :

Théorème 3.1. *Soit $d \geq 3$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire irréductible sur $\mathbb{Z}^d$ dont les incréments sont de loi μ (autrement dit $Z_n = X_1 + \ldots + X_n$ où les X_i sont iid de loi μ). On suppose que μ est centrée et possède un moment d'ordre pair $2r$ tel que $2r > \max(2, d-2)$. Alors la compactification de Martin est obtenue en rajoutant un point à l'infini à $\mathbb{Z}^d$.*

Remarque 3.2. *Sous les hypothèses précédentes, la marche aléatoire est bien transiente. En effet, lorsque $d \geq 3$, une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ irréductible admettant un moment d'ordre 2 est transiente (même si elle est centrée), voir par exemple [7]. Cela généralise le cas bien connu de la marche simple, qui est récurrente pour $d \leq 2$ et transiente pour $d \geq 3$.*

Ce théorème est une conséquence facile du résultat suivant.

Proposition 3.3. *Sous les hypothèses du théorème 3.1, on a*

$$G(0,k) \underset{\|k\|\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \left(\pi \left\langle k, \Sigma^{-1}k\right\rangle\right)^{-(d-2)/2} \tag{2}$$

où Σ est la matrice de covariance de μ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$.

Preuve du théorème 3.1. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$K(x,k) = \frac{G(x,k)}{G(0,k)} = \frac{G(0,k-x)}{G(0,k)} \underset{\|k\|\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\langle k-x, \Sigma^{-1}k-x\rangle}{\langle k, \Sigma^{-1}k\rangle}\right)^{-(d-2)/2} \xrightarrow[\|k\|\to+\infty]{} 1.$$

La compactification de $\mathbb{Z}^d$ obtenue en rajoutant un point à l'infini permet donc bien de prolonger par continuité le noyau de Martin. Puisqu'on n'a ajouté qu'un seul point, cette compactification est minimale, c'est donc celle de Martin. □

La preuve de la proposition 3.3 est assez technique, donnons-en les grandes lignes.

Éléments de preuve de la proposition 3.3. — On peut se ramener au cas où la marche est apériodique. En effet, supposons avoir prouvé le résultat dans le cas périodique et posons $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(\delta_0 + \mu)$. La marche $(\tilde{Z}_n)$ devient apériodique, la fonction de Green devient $\tilde{G} = 2G$ et la matrice de covariance devient $\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2}\Sigma$, si bien que le résultat pour $\tilde{G}$ entraîne celui pour G.

— En remplaçant G par $\hat{G}$ définie par $\hat{G}(0,k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n\pi)^d \det\Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2n}\left\langle k, \Sigma^{-1}k\right\rangle\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{(2\pi)^d\det\Sigma}\left(\left\langle k, \Sigma^{-1}k\right\rangle\right)^{(d-2)/2}\hat{G}(0,k) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\langle k, \Sigma^{-1}k\rangle}{n}\right)^{d/2}\frac{1}{\langle k, \Sigma^{-1}k\rangle}e^{-\frac{1}{2n}\langle k,\Sigma^{-1}k\rangle} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} t_n(k)^{-d/2}\exp\left(-\frac{1}{2t_n(k)}\right)(t_{n+1}(k)-t_n(k)) \\
&\qquad (\text{où } t_n(k) = \tfrac{n}{\langle k,\Sigma^{-1}k\rangle}) \\
&\xrightarrow[\|k\|\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} t^{-d/2}\exp\left(-\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t \\
&\qquad (\text{la somme de Riemann converge car } t_{n+1}(k)-t_n(k) \xrightarrow[\|k\|\to+\infty]{} 0) \\
&= 2^{(d-2)/2}\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \\
&\qquad (\text{changement de variable } u = \tfrac{1}{2t})
\end{aligned}$$

d'où l'équivalent souhaité pour $\hat{G}$.

— Il reste à montrer que $G(0,k) \underset{\|k\|\to+\infty}{\sim} \hat{G}(0,k)$, autrement dit que $G(0,k) - \hat{G}(0,k) = \underset{\|k\|\to+\infty}{o}\left(\|k\|^{-(d-2)}\right)$ au vu de l'équivalent de $\tilde{G}$. En écrivant $G(0,k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n(0,k)$, on écrit la différence $G(0,k) - \hat{G}(0,k)$ comme une somme de série. L'hypothèse sur le moment permet d'en contrôler les termes uniformément en k grâce à un théorème central limite. Un découpage intelligent de la somme en 3 morceaux permet de conclure.

$\square$

3.2 Cas décentré

On étudie désormais le cas où μ n'est pas centrée. Grâce au décentrage, on n'a plus besoin d'exiger que $d \geq 3$ pour que la marche soit transiente : on suppose maintenant que $d \geq 2$, et on ajoute l'hypothèse que μ est à support fini. On peut plonger $\mathbb{Z}^d$ dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$ via $\psi : k \mapsto \frac{1}{1+\|k\|}k$. L'adhérence de $\psi\left(\mathbb{Z}^d\right)$ est alors le compact $\overline{\psi\left(\mathbb{Z}^d\right)} = \psi\left(\mathbb{Z}^d\right) \cup S^{d-1}$.[1]

On peut alors énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 3.4. *Dans le cas décentré, la construction précédente est la compactification de Martin de la marche aléatoire, et donc la frontière de Martin est (homéomorphe à) S^{d-1}.*

À nouveau, la description de la frontière de Martin découle d'une étude asymptotique de la fonction de Green qui fait l'objet du résultat suivant, et pour lequel on a besoin d'introduire quelques notations.

— Pour $u \in S^{d-1}$, on note R_u la rotation qui envoie u sur le premier vecteur de la base canonique et qui laisse invariant le supplémentaire orthogonal du plan engendré par (u, e_1) (si $u = e_1$, c'est l'identité).
On définit alors la matrice Q_u de taille $d-1$ par :

$$(Q_u)_{i,j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (R_u k)_i (R_u k)_j \mu(k)$$

pour $i, j \in [\![2, d]\!]$. C'est une matrice symétrique définie positive.

— On veut définir une nouvelle loi μ_c qui remplace μ, de la forme $\mu_c(k) = e^{\langle c,k\rangle}\mu(k)$. Pour que μ_c soit une probabilité, le paramètre c doit vérifier $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{\langle c,k\rangle}\mu(k) = 1$. On notera $\mathcal{C}_1$ l'ensemble de ces paramètres convenables. En d'autres termes, $\mathcal{C}_1 = \varphi_\mu^{-1}(\{1\})$ où $\varphi_\mu(c) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{\langle c,k\rangle}\mu(k)$.
On remarque que pour chaque $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, il existe $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\mu(k) > 0$ et $\langle x, k\rangle > 0$ (sans quoi le support de μ serait inclus dans un demi-plan, ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité de la chaîne). Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\varphi_\mu(tx) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. De plus, $\varphi_\mu(0) = 1$. Par conséquent,

1. En effet, sur tout compact de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, les points de $\psi\left(\mathbb{Z}^d\right)$ sont en nombre fini et ne peuvent donc s'accumuler que sur la sphère. Réciproquement, si $u \in S^{d-1}$, on l'approche par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{p_n^{(1)}}{q_n^{(1)}}, \dots, \frac{p_n^{(d)}}{q_n^{(d)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels et alors $nq_n^{(1)}\dots q_n^{(d)}u_n \in \mathbb{Z}^d$. Comme $nq_n^{(1)}\dots q_n^{(d)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $\psi\left(nq_n^{(1)}\dots q_n^{(d)}u_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$.

pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, il existe un élément de $\mathcal{C}_1$ dans la demi-droite $\mathbb{R}_+ x$. Un argument de stricte convexité montre que cet élément est unique, on le note $c(x)$.
— La moyenne de la nouvelle loi μ_c est notée $\mathfrak{m}_c$. On remarque que $\mathfrak{m}_c = \nabla \varphi_\mu(c)$.

Théorème 3.5. *Dans le cas décentré, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, lorsque $\|l\| \to +\infty$:*

$$G(k,l) \sim \frac{1}{\|\mathfrak{m}_c\| \sqrt{(2\pi\|l\|)^{d-1} \det Q_u}} \exp\left(\langle c(l), k-l \rangle\right)$$

où $u = \frac{l}{\|l\|}$ et $c(l)$ dépendent de l.

Par conséquent, lorsque $\|l\| \to +\infty$ et $\frac{l}{\|l\|} \to u \in S^{d-1}$, on a

$$K(k,l) \longrightarrow e^{\langle c(u), k \rangle}.$$

Idée de preuve. On étudie plutôt $G_c(k,l) := G(k,l) e^{\langle c(l), l-k \rangle}$, ce qui, à l fixé, correspond à la fonction de Green du processus où l'on a remplacé μ par $\mu_{c(l)}$.

— On commence par montrer que

$$G_{c(l)}(k,l) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{-i\langle l,v \rangle}}{1 - \phi_{c(l)}(v)} \mathrm{d}v$$

où ϕ_c est la fonction caractéristique de μ_c.
— Dans cette intégrale, la partie prépondérante vient de l'intégrale au voisinage de 0 : on se contente d'étudier l'intégrale sur une boule $B(0,r)$, avec $r > 0$ à fixer.
— Pour utiliser des résultats propres aux fonction analytiques, on étend la transformée de Fourier ϕ_c en une transformée de Laplace en posant $\mathfrak{L}_u(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{\langle z, R_u k \rangle} \mu_c(k)$ pour $z \in \mathbb{C}^d$. On a alors $\phi_c(v) = \mathfrak{L}_u(iR_u v)$, et donc

$$G_{c(l)}(k,l) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{e^{-i\langle l,v \rangle}}{1 - \mathfrak{L}_u(iR_u v)} \mathrm{d}v. \tag{3}$$

— Pour $z \in \mathbb{C}^d$, notons $z = (z_1, z')$ où $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^{d-1}$. À l'aide du théorème de préparation de Weierstrass, on peut écrire au voisinage de 0 : $1 - \mathfrak{L}_u(z) = (z_1 - A_u(z'))B_u(z)$ pour des fonctions analytiques A_u et B_u vérifiant $B_u(0) \neq 0$, $A_u(0) = 0$. Ce voisinage de 0 peut être choisi indépendamment de u, il définit le $r > 0$ que nous devions fixer. De plus, en calculant les dérivées de A_u, on obtient le développent limité $A_u(z') = -\frac{1}{2}\langle z', Q_u z' \rangle + O\left(\|z'\|^3\right)$.
— On injecte l'écriture de $1 - \mathfrak{L}_u$ dans (3) en restreignant l'intégrale au voisinage de 0, et on connaît un développement asymptotique du dénominateur au voisinage de 0. La fin de la preuve consiste en des manipulations techniques d'intégrales.

□

Remarque 3.6. *Les esquisses des preuves de la proposition 3.3 et du théorème 3.5 sont sans doute trop détaillées, mais je tenais à les faire apparaître pour exposer la richesse des techniques utilisées : outre les probabilités, on y utilise des arguments d'analyse de Fourier ou encore d'analyse complexe.*

4 Marches sur un demi-espace

Le cas de $\mathbb{Z}^d$ étudié précédemment est un cas typiquement homogène en espace. Les descriptions de la frontière de Martin dans des cas inhomogènes sont plus délicates.

Nous présentons ici les résultats d'Irina Ignatiouk-Robert dans [4] et [5]. Elle y décrit la frontière de Martin de marches aléatoires sur des demi-espaces $\mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{N}$. Les modèles étudiés partent d'une marche homogène sur $\mathbb{Z}^d$ que l'on modifie lorsqu'elle atteint $\mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_-$. Les deux possibilités étudiées sont :

— tuer la marche lorsqu'elle atteint $\mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_-$ dans [4].

— réfléchir la marche (par rapport à l'hyperplan $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$) lorsqu'elle atteint $\mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_-$ dans [5].

4.1 Marche tuée

Dans [4], l'auteure utilise des principes de grandes déviations et la théorie des processus de Markov additifs pour décrire les fonctions harmoniques minimales et la frontière de Martin de la marche tuée.

Rappelons la définition des processus de Markov additifs, dont la marche aléatoire tuée fait partie.

Définition 4.1. *Un processus de Markov additif est une chaîne de Markov $(A_n, M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace d'états $\mathbb{Z}^d \times E$ où E est un ensemble dénombrable (a priori sans structure particulière) dont la matrice de transition P vérifie*

$$P\big((x, y), (x', y')\big) = P\big((0, y), (x' - x, y')\big)$$

pour tous $x, x' \in \mathbb{Z}^d$ et $y, y' \in E$.

Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Sous les hypothèses de [4] :*

— *La compactification de Martin est obtenue en prenant l'adhérence du plongement de $\mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{N}^*$ dans la boule unité par $\psi : k \mapsto \frac{1}{1+\|k\|}k$.*

— *La frontière de Martin est homéomorphe à la demi-sphère $\big\{(x_1, \dots, x_d) \in S^{d-1} \mid x_d \geq 0\big\}$.*

4.2 Marche réfléchie

Dans [5], la marche homogène est réfléchie lorsqu'elle atteint $\mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_-$. Plus précisément, on suppose que la dernière coordonnée de la marche homogène ne peut pas diminuer plus que de 1 à chaque étape, de sorte que lorsque la marche atteint $\mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_-$, elle atteint en fait $\mathbb{Z}^{d-1} \times \{0\}$. Lorsqu'elle touche $\mathbb{Z}^{d-1} \times \{0\}$, on définit une autre probabilité de transition qui force la dernière coordonnée à rester positive.

L'article [5] décrit alors la frontière de Martin. Il est remarquable que, dans ce cas, la frontière de Martin ne correspond pas à une convergence radiale : une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger vers un point de la frontière de Martin sans que $\frac{z_n}{\|z_n\|}$ ne converge.

5 Perspectives envisagées pour les travaux de thèse

L'objet de mes futures recherches est l'étude des frontières de Martin dans les cas inhomogènes (pour rappel, un exemple d'étude dans des cas inhomogènes fait l'objet de la section 4). Deux directions principales sont envisagées.

— Le cas des processus de Markov additifs (ou marches de Markov). Rappelons que ce type de processus a été introduit à la Définition 4.1. Les résultats pour un espace d'états général $\mathbb{Z}^d \times E$ sont rares.
  Par exemple, le cas d'un ensemble E fini (que l'on pourrait à tort croire simple et bien connu) est envisagé. Une interprétation de ce processus consiste à colorier les état de la marche homogène sur $\mathbb{Z}^d$ et à avoir une loi d'incrément différente pour chaque couleur. Ce modèle paraît éloigné des travaux présentés en section 4 et souligne donc l'intérêt de résultats généraux qui permettraient de traiter une grande variété de processus.

— Le cas des marches aléatoires sur des graphes isoradiaux. Un graphe planaire (et plongé dans le plan) est dit isoradial si chaque face du graphe est inscrite dans un cercle de rayon $r > 0$ (avec le même r pour chaque face) dont le centre est sur la face. Dans [1] (dont l'étude a été au centre de mon mémoire de M2), les auteurs définissent un laplacien massique sur des graphes isoradiaux et calculent un équivalent de la fonction de Green correspondante grâce à une expression intégrale puis à l'utilisation de la méthode du point-col. Dans [2], ce calcul asymptotique est utilisé pour décrire la frontière de Martin de marches sur les graphes isoradiaux dans le cas de graphes dits *quasi-cristallin* (ce qui signifie que les arêtes du graphe de losanges associé à G ne peuvent prendre qu'un nombre fini de directions). Sous une hypothèse supplémentaire (graphe asymptotiquement plat), la frontière de Martin est alors homéomorphe à la sphère, comme dans le cas des graphes réguliers $\mathbb{Z}^d$.
  Un prolongement possible de ces travaux consisterait à se passer de l'hypothèse de quasi-cristallinité. L'hypothèse plus faible qui la remplacerait serait un contrôle uniforme sur les angles du graphe de losanges (il s'agit de l'hypothèse utilisée dans [1]).

Mentionnons enfin brièvement quelques applications possibles. Le cas des processus de Markov additifs est relié à l'étude du modèle de tas de sable. Les graphes isoradiaux, eux, sont utilisés dans de nombreux modèles de mécanique statistique parmi lesquels le célèbre modèle d'Ising ou le modèle de dimères.

Références

[1] C. Boutillier, B. de Tilière and K. Raschel. *Z-invariant massive Laplacian on isoradial graphs.* Invent. Math. 208 (2017), no. 1, 109–189

[2] C. Boutillier and K. Raschel. *Martin boundary of killed random walks on isoradial graphs.* Potential Anal 57, 201–226 (2022)

[3] J. L. Doob, *Discrete potential theory and boundaries*, J. Math, and Mech. 8 (1959), 433-458.

[4] I. Ignatiouk-Robert, *Martin Boundary of a Killed Random Walk on a Half-Space*, Journal of Theoretical Probability, 2008, V 21, n 1, pp 35-68

[5] I. Ignatiouk-Robert, *Martin Boundary of a Reflected Random Walk on a Half-Space*, Probability Theory & Related Fields, 2010, Vol. 148, Issue 1/2, p197-245

[6] P. Ney and F. Spitzer, *The Martin boundary for random walk*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 121, No. 1 (Jan., 1966), pp. 116-132

[7] M. Peigné, *Marches aléatoires sur* $\mathbb{Z}^d$ *et propriétés de récurrence*, cours de M2

[8] W. Woess, *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge University Press, 2000