

# Méthodes Structure-Preserving pour les équations de Navier-Stokes incompressibles

Valentin Carlier

Septembre 2022

## 1 Introduction

La simulation des fluides et plasmas est un des principaux problèmes de l'analyse numérique. La complexité des équations sous-jacentes (Navier-Stokes, magnétohydrodynamique non-linéaire, équations de Vlasov-Poisson) et leur non-linéarité rend la création de schémas numériques efficaces et robustes difficile. De plus la multiplicité des applications autant dans l'industrie (aéronautique, énergies renouvelables,...) que dans la recherche (hydrodynamique, fusion nucléaire, astrophysique,...) fait de cette thématique un enjeu crucial.

Les méthodes "structure-preserving" viennent de la simulation des équations de l'électromagnétisme (équations de Maxwell). Ces équations peuvent-être réécrites naturellement dans le langage de la géométrie différentielle. On s'aperçoit alors que les conservations de la charge et du caractère solénoïdal du champ magnétique découlent naturellement du fait que  $d \circ d = 0$  (où  $d$  est la dérivée extérieure des formes différentielles) [9]. En discrétisant les champs solutions des équations de Maxwell comme des formes différentielles, on peut alors obtenir une version discrète de la suite de De Rham et les propriétés de conservation des solutions exactes sont directement transférées aux approximations calculées. Ces méthodes permettent, sur les équations de l'électromagnétisme, d'obtenir des approximations d'ordre élevé, possédant des propriétés de stabilité en temps long [1, 3]. Ce succès a motivé l'extension de ces méthodes, en particulier les schémas dits "Conga" où les espaces de discrétisation (conformes) sont remplacés par des espaces discontinus (non-conformes) et munis d'une projection vers les espaces conformes [4, 15]. L'utilisation d'espace discontinus permet une plus grande efficacité [16] (les matrices du système deviennent creuses et donc plus faciles à inverser) tout en gardant les propriétés de conservation et la stabilité en temps long [7]. Un autre avantage des méthodes discontinues est l'utilisation de flux numériques pouvant permettre la stabilisation du schéma [11]. Il devient alors intéressant d'essayer d'adapter ces méthodes à des systèmes non-linéaires pour lesquels la stabilité en temps long est compliquée à obtenir.

De récents progrès ont été faits sur les méthodes structure-preserving pour la mécanique des fluides, avec la création de schémas préservant de nombreux invariants [6, 14]. Les avancées sur les méthodes discontinues vont aussi dans ce sens, cherchant à préserver un maximum de constantes physiques [8, 5]. D'autres recherches s'intéressent aussi à des propriétés telles que la positivité de la densité ou de la création d'entropie [17] dans le but d'améliorer la stabilité des méthodes. La différence entre nos travaux et ces derniers est que nous cherchons à construire des méthodes respectant la structure des équations. Nous transformons dans un second temps en méthode discontinue (tout en gardant l'aspect structure-preserving), alors que les méthodes

discontinues conservatives "traditionnelles" partent de schémas non-conformes qu'elles modifient pour retrouver la préservation des invariants.

Un des buts de la recherche du département NMPP (Numerische Methoden in der Plasmaphysik, Méthodes numériques pour la physique des plasmas) du Max-Planck-Institut für Plasmaphysik où je suis doctorant est de trouver des moyens de faire des simulations de plasmas stables en temps long. La motivation première de ces recherches est leur utilisation pour les plasmas de fusion tels que ceux qui seront créés par le réacteur expérimental ITER. Les échelles de temps de la fusion étant très variées, il est nécessaire d'avoir des simulations fiables en temps long, d'où l'intérêt porté à ces méthodes.

Dans ce mémoire nous expliquons comment appliquer les méthodes présentées ci-dessus dans le cadre des équations de Navier-Stokes incompressibles. Ces équations sont un modèle réduit des équations de la MHD, pour lesquelles la création d'un schéma conservant certains invariants constitue un des objectifs de ma thèse. Nous abordons les différents problèmes rencontrés et présentons certains résultats numériques justifiant cette approche.

## 2 Équations de Navier-Stokes et propriétés

Nous nous intéresserons ici aux équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad (1)$$

avec la condition d'incompressibilité suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse et  $p$  la pression. L'équation est posée dans un domaine  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  ici par simplicité et on négligera les bords. Ces équations permettent de modéliser les fluides dans la limite d'une densité uniforme et d'un fluide incompressible (négligeant donc les aspects thermodynamiques). La première équation se trouve en appliquant le principe fondamental de la dynamique (ou deuxième loi de Newton) à une particule mésoscopique de fluide. L'équation d'incompressibilité quant à elle découle d'un bilan de masse appliqué localement aux particules de fluide suivant l'écoulement.

Ces équations sont l'objet de recherches théoriques afin de démontrer leur caractère bien posé. Parmi les résultats connus on peut citer l'existence et l'unicité de solution lisse en temps court (avec donnée initiale suffisamment régulière) ainsi que l'existence de solution faible en temps long [12, 13]. Le principal problème ouvert reste de savoir s'il existe des singularités en temps fini, ou bien si les solutions lisses peuvent être étendues.

Nous avons décidé de nous intéresser dans un premier temps à ce système, bien que notre intérêt principal soit les plasmas de fusion. En effet, il nous a paru intéressant de commencer par traiter uniquement le terme d'auto-advection non linéaire ( $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ). Ce terme est le plus difficile à comprendre, tant d'un point de vue physique que numérique ; nous avons donc commencé par traiter ce système avant d'ajouter la densité variable, le couplage thermodynamique, et enfin, le couplage magnétique. Par simplicité, dans cet exposé nous négligerons aussi le terme de viscosité et considérerons donc les équations d'Euler incompressibles :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

## 2.1 Invariants

Les équations d'Euler possèdent certains invariants qui traduisent des propriétés physiques très importantes. Leur préservation au niveau discret permet d'espérer une certaine stabilité des schémas et donc un bon comportement des solutions en temps long. Nous nous intéressons ici à deux invariants :

la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{u} dV = 0 , \quad (4)$$

la conservation d'énergie (cinétique) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 dV = 0 . \quad (5)$$

La conservation de ces deux quantités vient du fait que le système (dans sa globalité) n'est soumis à aucune force. La deuxième loi de Newton appliquée à l'ensemble du fluide nous donne alors que l'impulsion totale est conservée. Comme aucun mécanisme dissipatif n'est pris en compte, il est nécessaire que l'énergie soit conservée aussi.

## 2.2 Réécriture avec une suite de De Rham

Nous réécrivons les équations dans le cadre de la géométrie différentielle en faisant apparaître la courte suite de De Rham suivante.

$$V^1 \xrightarrow{\text{div}} V^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

Avec  $V^1 \subset H(\text{div})$  et  $V^2 \subset L^2$ , en effet une 1-forme peut être vue comme un champ de vecteurs  $H(\text{div})$  et une 2-forme comme une fonction  $L^2$ , la différentielle extérieure étant alors la divergence.

Nous considérons aussi la suite duale suivante :

$$\tilde{V}^0 \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \tilde{V}^1$$

où  $\tilde{V}^0$  est le domaine de l'opérateur adjoint.

Il est aussi nécessaire d'avoir des produits intérieurs, pour  $\mathbf{a}$  un champ de vecteurs :

$$\tilde{i}_{\mathbf{a}}^0 : \tilde{V}^1 \longrightarrow \tilde{V}^0, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \quad (6)$$

On utilise alors une formulation faible des équations d'Euler, on cherche  $\mathbf{u}$  dans  $V^1$  et  $p$  dans  $\tilde{V}^0$ , on multiplie par une fonction test  $\mathbf{v} \in \tilde{V}^1$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \tilde{\nabla} p \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (7)$$

En faisant une intégration par partie et en utilisant la condition d'incompressibilité, on arrive alors à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \sum_{k=1}^d \tilde{i}_{e_k}^0 \mathbf{v} \tilde{\nabla} \tilde{i}_{e_k}^0 \mathbf{u} - \tilde{i}_{e_k}^0 \mathbf{u} \tilde{\nabla} \tilde{i}_{e_k}^0 \mathbf{v}$$

où  $d$  est la dimension de l'espace (2) et les  $e_k$  sont les vecteurs de la base canonique. Il convient de remarquer que  $s$  est antisymétrique, c'est d'ailleurs de là que vient "mathématiquement" la conservation de l'énergie.

### 3 Discrétisation structure preserving

#### 3.1 Espaces et opérateurs discrets

Pour discrétiser (1) nous utilisons dans un premier temps des espaces conformes  $V_h^{1,c} \subset V^1$  et  $V_h^{2,c} \subset V^2$  possédants des projections  $\Pi_1, \Pi_2$  telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} V^1 & \xrightarrow{\text{div}} & V^2 \\ \Pi_1 \downarrow & & \downarrow \Pi_2 \\ V_h^{1,c} & \xrightarrow{\text{div}} & V_h^{2,c} \end{array}$$

Ces espaces étant de dimensions finies, ils peuvent être identifiés avec leurs duals, le produit scalaire  $L^2$  induit sur ces espaces donnant une identification canonique. Il convient alors de définir un produit intérieur discret, pour  $\mathbf{a}$  un champs de vecteurs,  $\tilde{i}_{\mathbf{a}}^{0h} \mathbf{u}_h = \tilde{P}_h^0(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_h)$  où  $\tilde{P}_h^0$  est la projection  $L^2$  sur  $V_h^{2,c}$ . On définit aussi le gradient discret  $\tilde{\nabla}_h$  comme l'adjoint de la divergence. Tout cela permet de définir un analogue discret de l'opérateur  $s$ .

$$s_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = P_h^1 \left( \sum_{k=1}^d \tilde{i}_{e_k}^{0h} \mathbf{v} \tilde{\nabla}_h \tilde{i}_{e_k}^{0h} \mathbf{u} - \tilde{i}_{e_k}^{0h} \mathbf{u} \tilde{\nabla}_h \tilde{i}_{e_k}^{0h} \mathbf{v} \right)$$

Nous proposons alors la (semi-)discrétisation suivante de (7) : trouver  $\mathbf{u}_h \in V_h^{1,c}$  et  $p_h \in V_h^{2,c}$  tels que  $\forall \mathbf{v}_h \in V_h^{1,c}$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot s_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_h p_h \cdot \mathbf{v}_h = 0 \quad , \quad (8)$$

ainsi que de la condition d'incompressibilité :  $\text{div}(\mathbf{u}_h) = 0$ .

#### 3.2 Equation pour la pression

Avec le système précédent, la pression est implicite, donnée par la condition d'incompressibilité. Nous proposons ici un schéma permettant de calculer la pression en assurant que la vitesse reste à divergence nulle.

En utilisant une forme faible de l'équation d'incompressibilité (qui est équivalente à une forme forte) et en substituant l'équation pour la vitesse, on arrive à la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot s_h(\mathbf{u}_h, \tilde{\nabla}_h q_h) + \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_h p_h \cdot \tilde{\nabla}_h q_h = 0, \quad \forall q_h \in V_h^{2,c} \quad (9)$$

ce qui nous donne alors le système suivant :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot s_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_h p_h \cdot \mathbf{v}_h = 0, & \forall \mathbf{v}_h \in V_h^{1,c} \\ \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot s_h(\mathbf{u}_h, \tilde{\nabla}_h q_h) + \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_h p_h \cdot \tilde{\nabla}_h q_h = 0, & \forall q_h \in V_h^{2,c}. \end{cases} \quad (10)$$

### 3.3 Propriétés de conservation

La divergence utilisée lors de la discrétisation étant forte, nous avons alors  $div(\mathbf{u}_h) = 0$  exactement.

Pour la conservation de la quantité de mouvement, on teste (8) avec  $e_l$  for  $l=1, \dots, d$ . En utilisant  $\tilde{i}_{e_k}^{0h} e_l = \delta_{k,l}$  on a,  $s_h(\mathbf{u}_h, e_l) = \tilde{\nabla}_h \tilde{i}_{e_l}^{0h} \mathbf{u}_h$ .

Puis

$$\int_{\Omega} e_l \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} = - \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \tilde{\nabla}_h \tilde{i}_{e_l}^{0h} \mathbf{u}_h - \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_h p \cdot e_l = 0$$

car la divergence est l'adjoint discret de  $\tilde{\nabla}_h$  et  $\mathbf{u}_h$  et  $e_l$  sont à divergence nulle.

Pour la conservation de l'énergie on a :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} = - \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot s_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_h p_h \cdot \mathbf{u}_h = 0,$$

Par antisymétrie de  $s_h$  et car la divergence de  $\mathbf{u}_h$  est nulle.

Il est important de remarquer que ces propriétés sont générales dès que l'on a une discrétisation utilisant une divergence forte et ne dépendent pas de l'utilisation d'un espace en particulier. C'est là l'intérêt de ce cadre, on peut alors utiliser différents espaces selon les besoins de la résolution, tout en conservant ces propriétés de stabilité.

## 4 Discrétisation non conforme

Nous utilisons maintenant des espaces non conformes  $V_h^1 \not\subset V^1$  et  $V_h^2 \not\subset V^2$  mais conservant la propriété suivante :  $V_h^{1,c} \subset V_h^1$  et  $V_h^{2,c} \subset V_h^2$ , avec des projections conformes  $P_1^c : V_h^1 \rightarrow V_h^{1,c}$  et  $P_2^c : V_h^2 \rightarrow V_h^{2,c}$ . On peut alors utiliser la même discrétisation en remplaçant  $div$  par  $div_h = div P_1^c$  et en gardant  $\tilde{\nabla}_h$  comme l'adjoint discret de  $div_h$ . La discrétisation satisfait alors les conservations de  $div_h(\mathbf{u}_h) = 0$ , de l'impulsion et de l'énergie.

### 4.1 Projection conforme conservant les moments

Les espaces non-conformes sont en général des espaces de polynômes brisés (fonctions polynomiales par morceaux sur un maillage) et il existe de nombreuses façons de faire une projection vers un espace possédant plus de régularité. Par exemple si les valeurs des polynômes sont stockées à certains points, et qu'une interpolation est faite pour reconstruire la solution discrète, une façon directe de faire serait de moyenner les valeurs aux faces afin de retrouver la continuité sur certaines composantes.

Cependant cette façon "naïve" de faire les projections entraîne des problèmes de convergence pour les ordres élevés et une réduction de la convergence à l'ordre 1. Cela est probablement dû au fait que, dans notre schéma, il est fait usage de  $\tilde{\nabla}_h$  défini par  $div_h^* = P^{c*} div^*$ . Or avec une construction basique telle que celle présentée plus haut,  $P^{c*}$  est seulement d'ordre 1 créant ainsi une réduction globale de l'ordre de convergence.

Une façon de résoudre ce problème est alors d'utiliser une projection préservant un certain nombre de moments polynomiaux :

$$\int_K P^c \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h = \int_K \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{P}^p(K), \quad \forall K \in T \quad (11)$$

Avec cette propriété, on est assuré que  $P^{c*}$  est exacte sur les polynômes d'ordre inférieurs à  $p$  et on a alors une projection d'ordre élevé.

## 4.2 Ajout de dissipation via pénalisation des sauts

Les méthodes discontinues sont connues pour leur instabilité au niveau des sauts, afin de stabiliser le schéma et de diminuer cet effet, nous proposons d'ajouter un terme de pénalisation s'écrivant  $\int_{\Omega} (Id - P^c) \mathbf{u}_h \cdot (Id - P^c) \mathbf{v}_h$ . Le schéma stabilisé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot s_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_h p_h \cdot \mathbf{v}_h + \alpha \int_{\Omega} (Id - P^c) \mathbf{u}_h \cdot (Id - P^c) \mathbf{v}_h = 0, & \forall \mathbf{v}_h \in V_h^{1,c} \\ \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot s_h(\mathbf{u}_h, \tilde{\nabla}_h q_h) + \int_{\Omega} \tilde{\nabla}_h p_h \cdot \tilde{\nabla}_h q_h + \alpha \int_{\Omega} (Id - P^c) \tilde{\nabla}_h p_h \cdot (Id - P^c) \mathbf{v}_h = 0, & \forall q_h \in V_h^{2,c} \end{cases} \quad (12)$$

On vérifie facilement que ce schéma respecte la contrainte d'incompressibilité et la conservation du moment. La pénalisation au niveau des sauts dissipe de l'énergie selon l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{u}_h|^2}{2} = -\alpha \int_{\Omega} |(Id - P^c) \mathbf{u}_h|^2 \quad (13)$$

## 5 Tests numériques

Le test présenté ici est fait sur le Tore de dimension 2 et de taille  $\pi$ . Sur ce domaine, une solution des équations de Navier-Stokes est  $(1 - 2\cos(2(x-t))\sin(2(y-t)), 1 + 2\cos(2(y-t))\sin(2(x-t)))$  que nous allons essayer d'approcher. Ce test lisse va nous permettre de vérifier la précision du schéma ainsi que sa capacité à préserver les invariants décrits plus haut. Pour les simulations non-conformes, le Tore est découpé en patchs et aucune condition de continuité n'est imposée aux frontières entre patchs.

### 5.1 Détails de simulation

Les espaces utilisés pour faire les simulations sont des espaces de splines. Ce sont des espaces de polynômes d'un certain ordre dans un découpage de l'espace que l'on appelle *cellule*, ces cellules sont quant à elles réparties en *patch*. Ainsi dans chaque cellule, la solution est représentée sous forme d'un polynôme. A l'intérieur d'un même patch, les raccords entre les différentes cellules sont réguliers. Entre les différents patchs, on n'impose aucune condition de régularité et la solution peut donc être discontinue (voir Fig. 1). Pour les simulations conformes, il n'y a qu'un seul patch et

la solution est donc bien cherchée sous forme d'une fonction continue. Pour les simulations non-conformes, au contraire, on utilise plusieurs patches et la non-conformité vient des sauts entre ces derniers.

Pour l'intégration en temps, on utilise un schéma de Crank-Nicholson (point milieu) et une itération de point fixe à deux pas (pression-vitesse) pour résoudre le système non-linéaire induit.

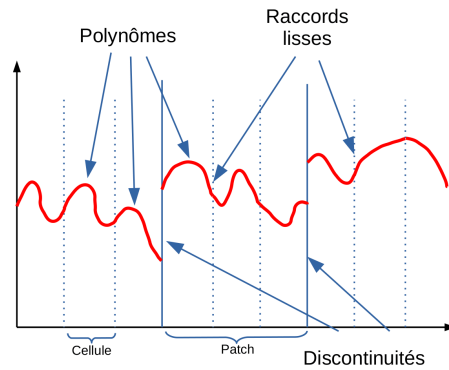


Figure 1: Splines, cellules et patches

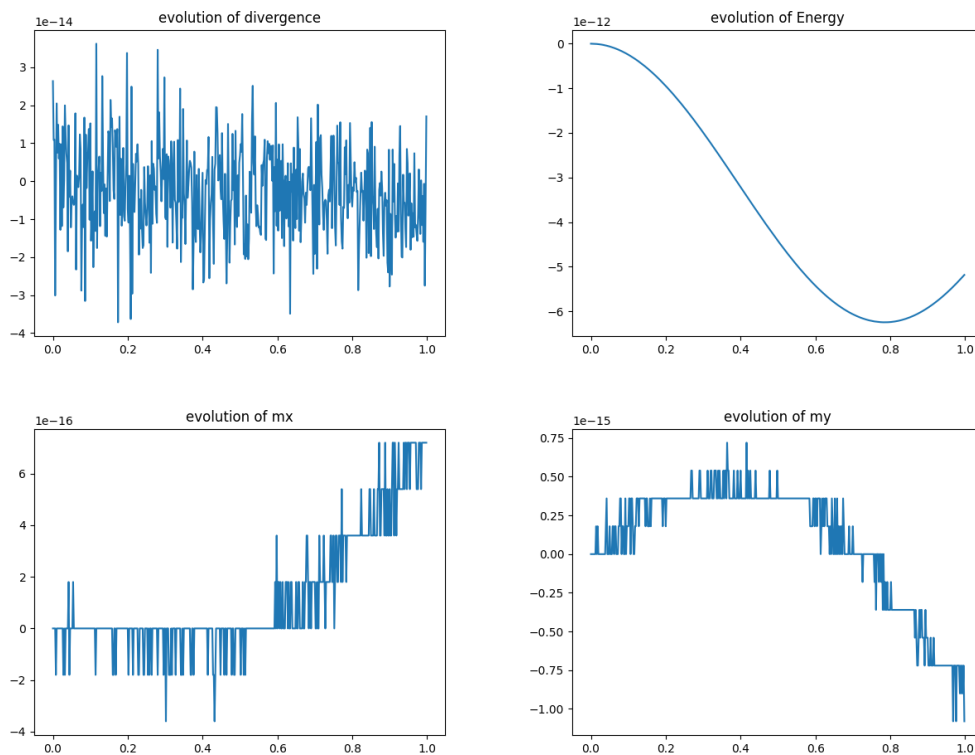


Figure 2: Préservation des invariants avec espace conforme

## 5.2 Conservation des invariants

Les simulations sont faites jusqu'à  $t = 1$ . Pour les simulations non-conformes, l'espace est découpé en 9 patchs ( $3 \times 3$ ). Pour la dissipation aux bords, on prend  $\alpha = 100$ . On vérifie alors que les invariants sont bien conservés avec une précision proche de l'erreur machine (Figs. 2 and 3). Ces premières simulations justifient l'utilisation de cette méthode et permettent de confirmer la théorie développée ci-dessus.

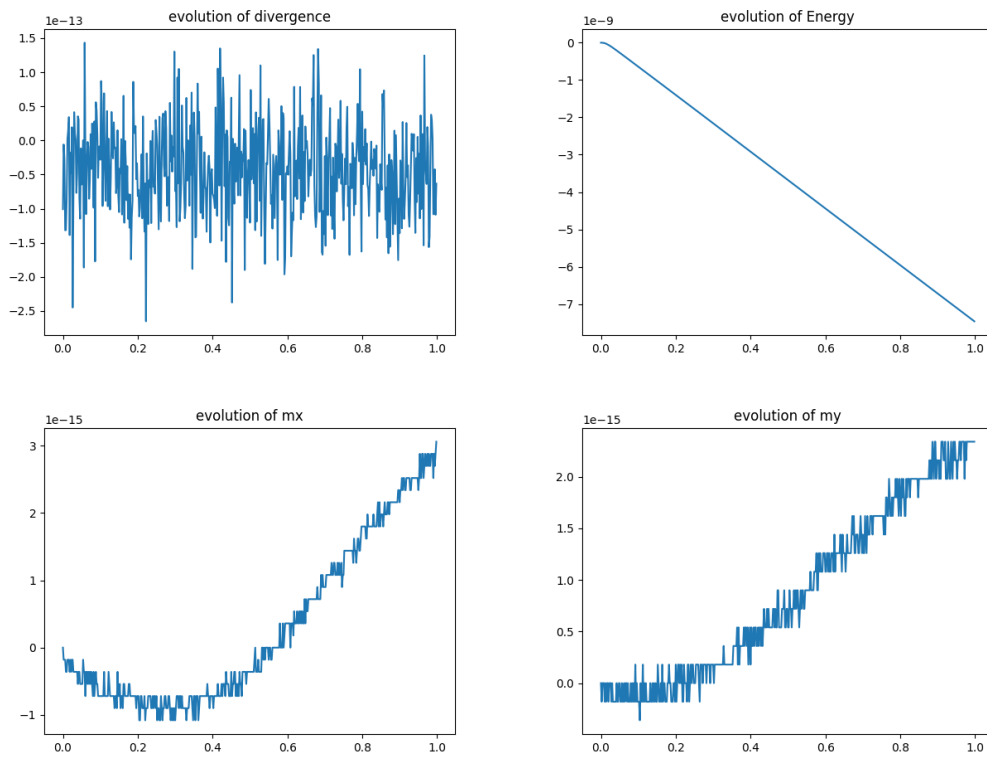


Figure 3: Préservation des invariants avec un espace non-conforme

### 5.3 Ordre de convergence

On utilise, pour la vitesse, des espaces de polynômes multivariés d'ordre 3 dans une direction et 2 dans l'autre ( $\mathcal{P}_3 \otimes \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \otimes \mathcal{P}_3$ ) à l'intérieur des cellules. Pour la pression, on utilise un polynôme d'ordre 2 dans chaque direction. Cette discrétisation permet (en théorie) d'obtenir une convergence à l'ordre 3. Pour la discrétisation conforme, le pas spatial est réduit en augmentant le nombre de cellules tandis que pour celle non-conforme, on augmente le nombre de patches (en gardant le nombre de cellules dans chaque patch constant). Le paramètre  $\alpha$  évolue avec le nombre de patches selon la formule suivante :  $\alpha = 10 \times n_{patches}$ . On remarque sur Fig. 4 que l'ordre de convergence théorique est bien respecté, tant pour les simulations conformes que non-conformes, et qu'aucune différence de performance majeure n'est visible entre les deux discrétisations.

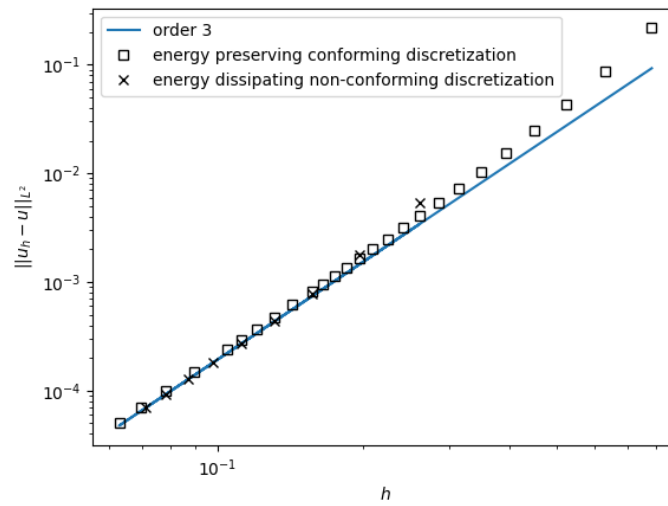


Figure 4: Convergence à l'ordre 3 avec des discrétisations conforme et non-conforme, le paramètre  $h$  correspond à la taille d'une cellule

## 5.4 Simulations en temps long

On s'intéresse ici à l'évolution de l'erreur en temps long (jusqu'à  $t = 10$ .) pour les deux discrétisations et différents pas spatiaux. On voit sur Fig. 5 que l'erreur est plus stable pour la discrétisation conforme. Une étude plus approfondie montre que, plus le paramètre  $\alpha$  est grand, plus l'erreur est stable et proche de celle obtenue avec une simulation conforme. Cela justifie bien l'introduction de ce terme comme pénalisation de la non-conformité de la solution.

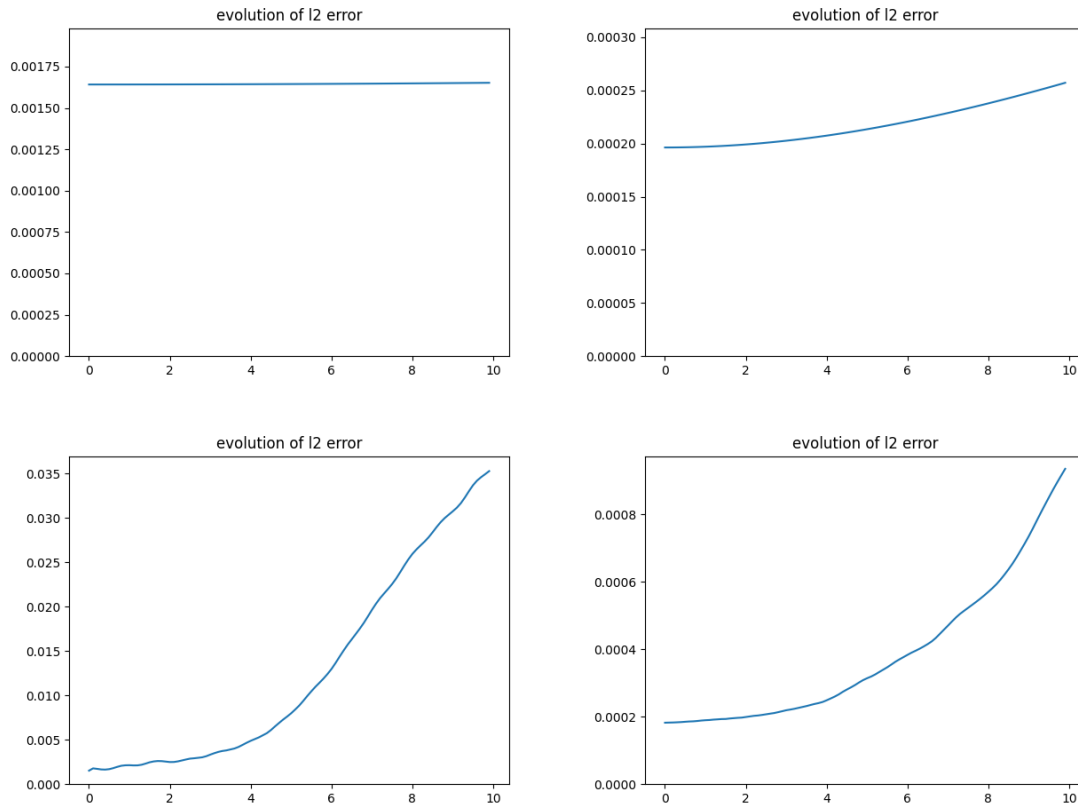


Figure 5: Évolution de l'erreur au cours du temps, avec en haut une discrétisation conforme et en bas non-conforme, ainsi qu'une meilleure discrétisation pour la colonne de droite ( $h = \frac{\pi}{16}$  and  $h = \frac{\pi}{32}$ )

## 6 Conclusion et perspectives

On a présenté ici deux schémas de résolution des équations d'Euler incompressibles basés sur une reformulation de ces équations dans le cadre de la géométrie différentielle. Ces schémas permettent d'obtenir des solutions préservant un certain nombre d'invariants physiques, tout en ayant un ordre élevé de convergence et en étant efficaces d'un point de vue informatique grâce à l'utilisation d'espaces brisés. Nous voyons ainsi qu'une meilleure compréhension de la structure des équations permet la création de schémas respectant celle-ci et ayant alors des propriétés de conservation naturelle.

La suite des travaux portera tout d'abord sur la prise en compte des bords, permettant ainsi la simulation d'écoulements physiques, ainsi que l'ajout de la viscosité. Pour ce dernier point, l'écriture du Laplacien comme combinaison des opérateurs div et curl, ainsi que de leurs adjoints, devrait permettre une adaptation relativement rapide. Il conviendra ensuite de s'intéresser au cas à densité variable, ce qui ajoute une équation de transport sur la densité et un facteur dans l'équation de la vitesse. L'équation de conservation devrait être facilement traitable (on possède déjà une divergence et un produit champ de vecteurs/2-forme). Cependant le produit avec la densité dans l'équation du moment devra être étudié afin de ne pas perdre les propriétés obtenues avec les schémas précédents. Par la suite nous nous intéresserons à l'extension de ces schémas aux équations de Navier-Stokes compressibles : on devra alors coupler le système fluide avec les équations de la thermodynamique. Puis nous aborderons les équations de la MHD en rajoutant les contributions magnétiques. Pour ce faire nous devons étudier de nouveaux produits intérieurs et leur discrétisations, afin de garantir la conservation des invariants physiques.

Parmi les travaux envisagés, nous voudrions aussi étudier d'autres formalismes rendant compte de la mécanique des fluides, entre autres celui développé par Arnold [2, 10] considérant l'évolution d'un fluide comme une déformation de l'espace (un difféomorphisme de variété), ou bien les récentes approches de la mécanique des fluides comme application du transport optimal. Ces reformulations pourraient donner de nouveaux schémas numériques ayant de nombreuses propriétés de stabilité. En particulier, un problème de l'approche présentée ici est qu'il paraît compliqué d'obtenir des garanties de positivité sur la densité ou d'augmentation de l'entropie, alors qu'il est connu que ces propriétés jouent un rôle central dans la stabilité en mécanique des fluides numérique.

## References

- [1] D. N. Arnold, R. S. Falk, and R. Winther. Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications. *Acta numerica*, 15:1–155, 2006.
- [2] V. I. Arnold and B. A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*, volume 125. Springer Nature, 2021.
- [3] A. Bossavit. Whitney forms: A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews)*, 135(8):493–500, 1988.
- [4] M. Campos Pinto and E. Sonnendrücker. Compatible maxwell solvers with particles i: conforming and non-conforming 2d schemes with a strong ampere law. *The SMAI journal of computational mathematics*, 3:53–89, 2017.
- [5] P. Chandrashekar. Kinetic energy preserving and entropy stable finite volume schemes for compressible euler and navier-stokes equations. *Communications in Computational Physics*, 14(5):1252–1286, 2013.
- [6] G. Coppola, F. Capuano, and L. de Luca. Discrete energy-conservation properties in the numerical simulation of the navier–stokes equations. *Applied Mechanics Reviews*, 71(1), 2019.
- [7] D. A. Di Pietro and A. Ern. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, volume 69. Springer Science & Business Media, 2011.
- [8] G. J. Gassner. A skew-symmetric discontinuous galerkin spectral element discretization and its relation to sbp-sat finite difference methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(3):A1233–A1253, 2013.
- [9] R. Hiptmair. Finite elements in computational electromagnetism. *Acta Numerica*, 11:237–339, 2002.
- [10] B. Khesin, G. Misiolek, and K. Modin. Geometric hydrodynamics of compressible fluids. *arXiv preprint arXiv:2001.01143*, 2020.
- [11] R. J. Labeur and G. N. Wells. A galerkin interface stabilisation method for the advection–diffusion and incompressible navier–stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(49-52):4985–5000, 2007.
- [12] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta mathematica*, 63(1):193–248, 1934.
- [13] W. S. Ożański and B. C. Pooley. Leray’s fundamental work on the navier-stokes equations: A modern review of’ sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace’. *arXiv preprint arXiv:1708.09787*, 2017.
- [14] A. Palha and M. Gerritsma. A mass, energy, enstrophy and vorticity conserving (meevc) mimetic spectral element discretization for the 2d incompressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 328:200–220, 2017.

- [15] M. C. Pinto and E. Sonnendrücker. Compatible maxwell solvers with particles ii: conforming and non-conforming 2d schemes with a strong faraday law. 2016.
- [16] J.-F. Remacle, J. E. Flaherty, and M. S. Shephard. An adaptive discontinuous galerkin technique with an orthogonal basis applied to compressible flow problems. *SIAM review*, 45(1):53–72, 2003.
- [17] F. Renac and V. Carlier. Invariant domain preserving high-order spectral discontinuous approximations of hyperbolic systems. *arXiv preprint arXiv:2203.05452*, 2022.