

Introduction au domaine de recherche : Limites d'échelle de permutations aléatoires

Victor Dubach
sous la direction de Valentin Féray

Octobre 2022

Résumé

La théorie des permutons est un cadre naturel aux limites d'échelles de permutations aléatoires. C'est un domaine émergent et prometteur qui a pour l'instant surtout été étudié en analogie avec la théorie des graphons. Mais contrairement aux graphes, les permutations ont une structure algébrique riche. Il serait pertinent d'étudier les liens entre cette structure algébrique et la convergence en permutons. La notion de plus longue sous-suite croissante, et plus généralement la correspondance Robinson-Schensted, seraient des exemples intéressants de sujets d'étude. La résolution de questions dans cette direction permettrait en outre de résoudre certaines conjectures sur les permutations aléatoires (e.g. une conjecture de Bukh et Zhou).

Table des matières

1	Introduction	2
2	Espace des permutons	3
2.1	Définition et liens avec les permutations	3
2.2	Convergence et densités de motifs	4
2.3	Liens avec les graphons	5
2.4	Passage à la limite de propriétés algébriques des permutations	6
3	Notion de plus longue sous-suite croissante	7
3.1	Rappels et extension aux permutons	7
3.2	Comportement asymptotique	8
3.3	Application à une conjecture	9
4	Bibliographie	9

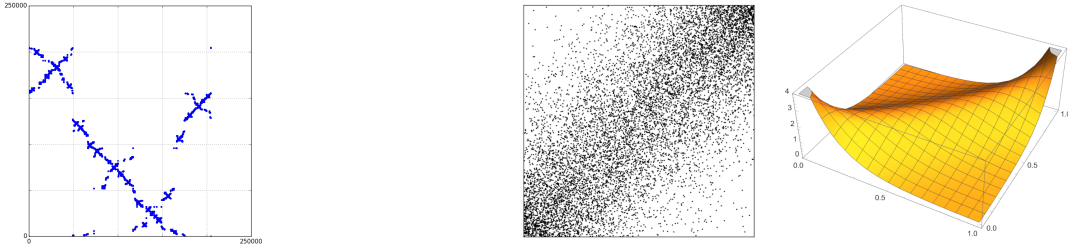


FIGURE 1 – À gauche, une simulation du permuton séparable Brownien via une permutation séparable aléatoire ([6]). À droite, la matrice d’adjacence d’une permutation aléatoire de Mallows et la densité du permuton limite ([30]).

1 Introduction

Les permutations aléatoires sont parmi les objets les plus classiques des probabilités discrètes, dont les travaux fondateurs remontent jusqu’aux années ’40. On peut par exemple citer Goncharov ([15]) et Feller ([13]) sur la décomposition en cycles disjoints d’une permutation aléatoire uniforme. C’est un domaine qui demeure très actif avec des applications par exemple en physique statistique ([27]), en informatique ([14]), en statistique ([25]), et en biologie ([18]) et qui présente encore de nombreuses questions ouvertes en raison de sa richesse.

Plus récemment, la question de trouver des limites d’échelles à différents objets combinatoires en probabilités discrètes a connu plusieurs développements. Il s’agit d’exhiber une limite, après renormalisation, de l’objet en lui-même plutôt que de certaines statistiques spécifiques. Un exemple essentiel est le fameux théorème de Donsker ([7]), qui énonce la convergence de marches aléatoires vers le mouvement Brownien. D’autres exemples concernent les diagrammes de Young sous la mesure de Plancherel ([31]) ou encore les arbres aléatoires ([1]).

Dans le cas des permutations, un cadre naturel pour les limites d’échelles est celui des permutons. La théorie des permutons est un sujet émergent et plusieurs résultats de convergences ont été prouvés pour divers modèles de permutations aléatoires non uniformes. On peut entre autres citer les permutations de Mallows ([30]), choisies selon un poids mis sur le nombre d’inversions, ou encore la convergence de permutations à motifs exclus (dites séparables) vers le permuton Brownien séparable ([6]) : voir la figure 1. C’est en outre un sujet qui a des applications en dehors des questions de limites d’échelles, par exemple pour caractériser les permutations quasi-aléatoires ([20]).

Jusqu’à présent une majorité des travaux autour des permutons se sont faits en analogie avec la théorie des graphons, globalement plus étudiée ([16],[21]). Bien qu’intéressant et ayant porté ses fruits, ce point de vue ne profite pas de la structure algébrique des permutations qui est pourtant une richesse supplémentaire par rapport aux graphes. Certaines questions sont partiellement résolues mais de nombreuses autres demeurent ouvertes dans cette direction. Par exemple : si une suite de permutations (aléatoires) converge vers un permuton limite, que dire du comportement asymptotique la plus longue sous-suite croissante de cette suite ? Bien qu’en général on ne puisse rien conclure, on verra certaines hypothèses sous lesquelles l’ordre de grandeur est connu ([11], [3]).

2 Espace des permutons

2.1 Définition et liens avec les permutations

Définition. On appelle permuton une mesure de probabilités μ sur le carré unité $[0, 1]^2$ dont les marginales sont uniformes (*i.e.* si (X, Y) est distribué sous μ alors X et Y suivent la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$). On note \mathcal{M} l'ensemble des permutons, qui est un espace métrique compact muni de la topologie de la convergence faible.

La notion de permuton a initialement été introduite et étudiée dans [17] (avec un point de vue légèrement différent) et le nom a été proposé dans [16] en analogie avec la théorie des graphons (sur laquelle nous reviendrons en section 2.3). Le lien entre permutons et permutations est double : d'une part on peut associer à toute permutation un permuton, d'autre part tout permuton donne naturellement lieu à une suite de permutations aléatoires.

Définition. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de taille n . On lui associe le permuton μ_σ de densité

$$n \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{\sigma(i-1)}{n}, \frac{\sigma(i)}{n}\right]} \quad (1)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^2$. Si $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de permutations et μ est un permuton, on dit que (σ_n) converge vers μ lorsque la suite de permutons associée converge vers μ dans \mathcal{M} .

La convergence de permutations aléatoires vers un permuton limite s'apparente donc à une convergence géométrique des matrices de permutation renormalisées. Remarquons qu'il existe d'autres manières de plonger les permutations dans \mathcal{M} . On peut par exemple définir μ_σ^{\nearrow} de manière similaire à μ_σ , mais en remplaçant chaque carré du support par sa diagonale (la notion de convergence reste la même).

Définition. Soient $\mu \in \mathcal{M}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ distribués i.i.d. sous μ . Notons $(X'_1, Y'_1), \dots, (X'_n, Y'_n)$ leur réordonnement vérifiant

$$X'_1 < \dots < X'_n. \quad (2)$$

On définit alors $\text{Sample}(n, \mu)$ comme l'unique permutation σ vérifiant

$$Y'_{\sigma^{-1}(1)} < \dots < Y'_{\sigma^{-1}(n)}. \quad (3)$$

Par exemple si μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^2$ alors $\text{Sample}(n, \mu)$ suit la loi uniforme sur \mathfrak{S}_n . Remarquons que, les marginales de tout permuton étant sans atome, la définition précédente est bien valide (les abscisses et ordonnées des points sont p.s. toutes distinctes).

Théorème 2.1 ([17]). *Pour tout permuton μ , la suite $(\text{Sample}(n, \mu))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers μ :*

$$\mu_{\text{Sample}(n, \mu)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \quad \text{p.s.} \quad (4)$$

Ainsi l'ensemble des permutations est dense vu dans \mathcal{M} ; la notion de permutons n'est donc pas "trop large" pour l'étude des limites d'échelle de permutations aléatoires.

2.2 Convergence et densités de motifs

Dans de nombreux objets combinatoires il est pertinent d'étudier des notions de sous-structures, et plus particulièrement le nombre d'occurrences d'une certaine sous-structure dans un grand objet donné. Un aspect incontournable des permutons est qu'ils caractérisent exactement ces nombres d'occurrences à une échelle linéaire.

Définition. Soient $k \leq n$ deux entiers et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Considérons $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ une partie à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On définit alors le motif σ_I comme l'unique permutation de \mathfrak{S}_k ayant les mêmes inversions que la restriction de σ à I :

$$\forall s, t \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \sigma_I(s) < \sigma_I(t) \iff \sigma(i_s) < \sigma(i_t). \quad (5)$$

Si $\tau \in \mathfrak{S}_k$, on définit alors la proportion d'occurrences de τ comme motif de σ par

$$\text{occ}(\tau, \sigma) := \mathbf{P}(\sigma_I = \tau) \quad (6)$$

où I est choisi de manière aléatoire uniforme parmi les parties à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On peut également définir une notion analogue pour les permutons.

Définition. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\tau \in \mathfrak{S}_k$, $\mu \in \mathcal{M}$. On définit la densité de τ dans μ par

$$\text{dens}(\tau, \mu) := \mathbf{P}(\text{Sample}(k, \mu) = \tau). \quad (7)$$

Remarquons que $\text{occ}(\tau, \sigma) \neq \text{dens}(\tau, \mu_\sigma)$ en général, mais ces deux quantités sont équivalentes quand $n \rightarrow \infty$. A l'aide du théorème 2.1 et de la compacité de \mathcal{M} , on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.2 ([17]). *Les quantités $\text{dens}(\tau, \mu)$ pour $\tau \in \mathfrak{S}$ caractérisent tout permuton μ . Elles caractérisent même la convergence dans \mathcal{M} :*

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \iff \forall \tau \in \mathfrak{S}, \text{dens}(\tau, \mu_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{dens}(\tau, \mu) \quad (8)$$

pour toute suite de permutons (μ_n) .

Ce théorème justifie en fait la définition de convergence d'une suite de permutations que l'on a donnée précédemment. En effet, avant la formalisation et le développement de la notion de permutons, on disait qu'une suite de permutations (σ_n) convergeait lorsque les quantités $\text{occ}(\tau, \sigma)$ convergeaient toutes.

L'étude des motifs de permutations aléatoires est un sujet de recherche vaste et encore très actif, qui est l'une des premières motivations pour l'introduction des permutons.

Un premier exemple concerne la notion de "forcibilité finie" ([16]), *i.e.* si un permuton μ est caractérisé par une collection finie de quantités $\text{dens}(\tau, \mu)$. Par exemple le permuton uniforme est caractérisé par ces quantités pour les permutations τ de taille au plus 4 ; cela offre donc une nouvelle caractérisation des suites de permutations dites "quasi-aléatoires" ([20]).

Un second exemple concerne les permutations à motifs exclus, c'est-à-dire ne comportant aucune occurrence de certains motifs fixés. Ces dernières années une série d'articles a été publiée sur la convergence de permutations aléatoires uniformes dans certaines classes (dont des modèles à motifs exclus), à l'aide de techniques de combinatoire analytique ([4], [5]). Dans [6], les auteurs prouvent la convergence en loi des permutations séparables aléatoires vers un permuton dit brownien séparable.

2.3 Liens avec les graphons

Comme évoqué en introduction, les permutons sont aux permutations ce que les graphons sont aux graphes, cette dernière théorie étant globalement plus étudiée. Voyons en quoi cette analogie est justifiée.

Définition. On appelle graphon toute fonction $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ mesurable symétrique.

Définition. Soit G un graphe à n sommets étiquetés de 1 à n . On lui associe un graphon défini par :

$$W_G = \sum_{i \sim j} \mathbf{1}_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]}. \quad (9)$$

Définition. Soit W un graphon. On va lui associer, pour tout entier n , un graphe aléatoire à n sommets. Pour cela on considère X_1, \dots, X_n distribués i.i.d. uniformément sur $[0, 1]$ ainsi que des variables indépendantes $(U_{i,j})_{i < j}$ également i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$. Le graphe $\text{Sample}(n, W)$ est alors le graphe de sommets $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel

$$\forall i < j, \quad i \sim j \iff U_{i,j} < W(X_i, X_j). \quad (10)$$

Plus exactement, on considère en général que $\text{Sample}(n, W)$ est la version non étiquetée du graphe précédent (*i.e.* sa classe d'équivalence pour la relation d'isomorphisme de graphes).

Définition. Soient $k < n$ deux entiers, H un graphe à k sommets, G un graphe à n sommets, et W un graphon. On définit $\text{occ}(H, G)$ comme la probabilité que le graphe induit par G sur I soit isomorphe à H , où I est une partie aléatoire uniforme à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On définit également $\text{dens}(H, W)$ comme la probabilité que $\text{Sample}(k, W)$ soit isomorphe à H .

Définition. Comme pour les permutations, on dit qu'une suite de graphes (G_n) converge vers un graphon W lorsque :

$$\text{pour tout graphe } H, \quad \text{occ}(H, G_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{dens}(H, W). \quad (11)$$

Pour que cette dernière notion de convergence corresponde à une topologie, il faut cependant quotienter l'ensemble des graphons par une pseudo-métrique appelée cut-distance. On note \mathcal{W} ce quotient, dans lequel les éléments sont caractérisés par leurs densités de sous-graphes. De même que plusieurs définitions sur les graphes ont encore un sens sur les graphes non étiquetés, on étendra par abus certaines fonctions sur les graphons à \mathcal{W} (notamment les $\text{Sample}(n, \cdot)$).

Les liens entre permutons et graphons ne s'arrêtent pas aux simples définitions : il y a en fait une "bonne" manière d'associer à tout permuton un graphon (à équivalence près) qui étend la notion de graphe d'inversion.

Définition. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit le graphe $\text{inv}_\ell(\sigma)$ comme ayant sommets $\llbracket 1, n \rrbracket$ et arêtes

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i \sim j \iff (j - i)(\sigma(j) - \sigma(i)) < 0. \quad (12)$$

On note ensuite $\text{inv}(\sigma)$ la version non étiquetée de ce graphe.

Théorème 2.3 ([16]). *Il existe une unique application $\widetilde{\text{inv}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{W}$, continue, vérifiant*

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{inv}(\text{Sample}(n, \mu)) \stackrel{\text{loi}}{=} \text{Sample}(n, \widetilde{\text{inv}}(\mu)). \quad (13)$$

La preuve du théorème précédent repose essentiellement sur le fait que les éléments de $W \in \mathcal{W}$ sont caractérisés par les lois des $\text{Sample}(n, W)$ ainsi que le lemme suivant, qui fait le pont entre les occurrences de sous-structures pour les permutations et pour les graphes.

Lemme 2.4. *Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et H un graphe non étiqueté à $k \leq n$ sommets. Alors :*

$$\text{occ}(H, \text{inv}(\sigma)) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k, \text{inv}(\tau)=H} \text{occ}(\tau, \sigma). \quad (14)$$

Remarquons que l'application $\widetilde{\text{inv}}$ n'envoie pas le permuton μ_σ vers le graphon $W_{\text{inv}(\sigma)}$. Pour que le diagramme commute, il faut plutôt considérer les permutons μ_σ^\nearrow évoqués plus tôt.

La théorie des graphons étant globalement plus développée que celle des permutons, la correspondance décrite permet de transférer des résultats de la première vers la seconde. Par exemple les auteurs de [3] s'en servent pour montrer que si une suite de permutations (σ_n) converge vers le permuton brownien séparable alors :

$$\text{LIS}(\sigma_n) = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(n) \quad (15)$$

où LIS désigne la longueur maximale des sous-suites croissantes. Avec les résultats de la section 3, on peut également déduire la formule

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \quad \text{dens}(\text{id}_n, \mu)^{1/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \widetilde{\text{LIS}}(\mu) \quad (16)$$

de son analogue pour les graphons ([9]). Les objets d'intérêts ne sont cependant pas toujours les mêmes dans ces deux théories : par exemple si μ désigne le permuton uniforme sur le carré alors $\text{LIS}(\text{Sample}(n, \mu))$ est de l'ordre de \sqrt{n} ([2]) tandis que si W désigne le graphon constant à $1/2$, la grandeur analogue $\alpha(\text{Sample}(n, W))$ (nombre d'indépendance) est de l'ordre de $\log(n)$ ([12]).

2.4 Passage à la limite de propriétés algébriques des permutations

Une vaste question qui n'a pour l'instant que des réponses partielles est celle des liens entre structure algébrique des permutations et convergence dans l'espace des permutons. Le cadre général est le suivant : soit (σ_n) une suite de permutations (souvent aléatoires) possédant une certaine "régularité" et convergeant vers un permuton limite μ . Que dire asymptotiquement de la structure cyclique de (σ_n) , des plus longues sous-suites croissantes, ou encore de la paire de tableaux d'Young associée via la bijection Robinson-Schensted ?

Dans [26], l'auteur considère une suite de permutations aléatoires $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge en probabilité vers un permuton à densité ρ continue strictement positive. Sous une hypothèse dite d'équicontinuité, il prouve entre autres que le nombre de points fixes de π_n converge vers une loi de Poisson de paramètre

$$\int_0^1 \rho(x, x) dx. \quad (17)$$

Il obtient plus généralement que les nombres de cycles de petites tailles convergent conjointement vers des lois de Poisson indépendantes. Le paramètre de la loi de Poisson limite du nombre de k -cycles est donné par

$$\frac{1}{k} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \rho(x_1, x_2) \cdots \rho(x_k, x_1) dx_1 \cdots dx_k. \quad (18)$$

On peut également se demander comment la loi de groupe se comporte vis-à-vis des permutons. Supposons que l'on dispose de deux suites de permutations (σ_n) et (τ_n) qui convergent vers des permutons à densités respectives ρ et ρ' . On pense que, sous certaines hypothèses de régularité à déterminer, la suite $(\sigma_n \circ \tau_n)$ converge vers le permuton à densité ρ'' définie par

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \rho''(x, y) = \int_0^1 \rho'(x, z)\rho(z, y)dz. \quad (19)$$

Cette formule a été prouvée dans [19] lorsque les suites de permutations suivent indépendamment des lois de Mallows dans un certain régime. On peut également en donner une justification heuristique dans le cas général : $n\rho(x, y)$ correspond asymptotiquement au nombre de points de σ_n dans un petit rectangle $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$, et de même pour τ_n avec ρ' . La proportion asymptotique de points de $\sigma_n \circ \tau_n$ dans $[x, x + dx] \times [y, y + dy]$ va donc donner la formule (19). On s'attend à ce que des hypothèses dans l'esprit de celles de [26], sur une régularité du comportement local des permutations, aident à justifier ces approximations.

La section suivante est consacrée à une dernière grandeur d'intérêt : la longueur maximale des sous-suites croissantes. Nous finirons par expliquer comment des résultats sur les comportements de LIS et des compositions de permutations seraient d'une grande aide dans la résolution d'une conjecture de Bukh et Zhou.

3 Notion de plus longue sous-suite croissante

3.1 Rappels et extension aux permutons

Définition. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. On peut définir la grandeur LIS (pour Longest Increasing Subsequence) par :

$$\text{LIS}(\sigma) := \max \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \text{occ}(\text{id}_k, \sigma) > 0\}. \quad (20)$$

L'étude de la plus grande taille d'une sous-suite croissante d'une permutation aléatoire est un sujet complexe et fascinant. Son lien avec la correspondance de Robinson-Schensted est fondamental ([29]), et on peut montrer dans le cas uniforme qu'elle est asymptotiquement de l'ordre de $2\sqrt{n}$ où n est la taille de la permutation ([2]). Plus généralement cette grandeur intervient dans des domaines tels la percolation de dernier passage ou la théorie des matrices aléatoires ([28]). On peut en fait définir une grandeur analogue sur l'espace des permutons.

Définition. Soit A une partie du carré $[0, 1]^2$. On dit que A est croissante lorsque

$$\forall X, Y \in A, (Y_1 - X_1)(Y_2 - X_2) \geq 0. \quad (21)$$

Définition. Soit $\mu \in \mathcal{M}$. On définit

$$\widetilde{\text{LIS}}(\mu) := \sup_{A \subset [0, 1]^2 \text{ fermée et croissante}} \mu(A). \quad (22)$$

On peut en fait voir, par compacité de la métrique de Hausdorff, que ce sup est un max. Il est également possible de donner une définition équivalente faisant intervenir les sous-mesure croissantes plutôt que les parties du carré ; ce point de vue a d'autres avantages et inconvénients.

Cette fonction ne porte cependant qu'une information limitée, et peut facilement s'annuler. Par exemple pour le permuton uniforme :

$$\widetilde{\text{LIS}}(\text{Leb}_{[0,1]^2}) = 0. \quad (23)$$

De manière plus générale si μ est un permuton absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur le carré alors $\widetilde{\text{LIS}}(\mu) = 0$. En particulier :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}, \quad \widetilde{\text{LIS}}(\mu_\sigma) = 0, \quad (24)$$

ce qui peut sembler un peu dommage pour une fonction que l'on prétend être une extension de LIS. Cependant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \widetilde{\text{LIS}}(\mu_\sigma^\nearrow) = \frac{\text{LIS}(\sigma)}{n}. \quad (25)$$

La fonction $\widetilde{\text{LIS}}$ comporte donc a priori une information d'ordre linéaire sur le comportement de $\text{LIS}(\sigma)$. Cela limite le champs d'intérêt aux permutations dont le diagramme d'Young associé est "très allongé", mais les applications restent pertinentes dans cette direction.

Evoquons enfin qu'il serait pertinent d'étendre aux permutons les lignes suivantes du diagramme d'Young donné par la bijection Robinson-Schensted, puis d'en étudier les propriétés (par exemple l'analogue de la formule de Greene pour les permutations).

3.2 Comportement asymptotique

La fonction $\widetilde{\text{LIS}}$ introduite est en fait analogue à une fonction notée $\tilde{\alpha}$ sur l'espace des graphons. On peut notamment prouver des résultats similaires tels les deux suivants :

Théorème 3.1. *L'application $\widetilde{\text{LIS}} : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ est semi-continue supérieurement.*

En particulier si $\widetilde{\text{LIS}}(\mu) = 0$ et (σ_n) est une suite de permutations convergeant vers μ alors, d'après (25), la suite $(\text{LIS}(\sigma_n))$ a un comportement sous-linéaire (c'est le cas par exemple pour le permuton brownien séparable). L'application $\widetilde{\text{LIS}}$ n'est pas continue en ses valeurs non nulles d'après (24), mais on a le résultat utile suivant :

Proposition 3.2.

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \quad \frac{\text{LIS}(\text{Sample}(n, \mu))}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \widetilde{\text{LIS}}(\mu). \quad (26)$$

Ce résultat se prouve en utilisant le théorème 3.1 pour un sens, puis une partie croissante maximale et la loi des grands nombres pour l'autre sens. Ainsi, lorsque $\widetilde{\text{LIS}}(\mu) > 0$, on observe un comportement linéaire de $\text{LIS}(\sigma_n)$ pour des suites de permutations aléatoires typiques qui convergent vers μ .

Lorsque $\widetilde{\text{LIS}}(\mu) = 0$, les résultats précédents n'aident pas à déterminer l'ordre de grandeur exact de $\text{LIS}(\sigma_n)$ pour (σ_n) convergeant vers μ . Par exemple dans le cas du permuton uniforme et

des permutations aléatoires canoniquement associées, on sait que l'équivalent recherché est $2\sqrt{n}$. Si μ est un permuton à densité ρ vérifiant certaines hypothèses de régularité, les auteurs de [11] ont montré que

$$\frac{\text{LIS}(\text{Sample}(n, \mu))}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \sup \int_0^1 \sqrt{\rho(x(t), y(t))x'(t)y'(t)} dt, \quad (27)$$

où le sup est pris sur les courbes (x, y) croissantes du carré et où la convergence a lieu en probabilités. On pense que la formule vaut plus généralement pour des suites de permutations (σ_n) "localement régulières" convergeant vers μ . L'explication informelle, similaire à celle de (19), est la suivante. Dans un petit rectangle de taille $x'(t)dt \times y'(t)dt$ autour de $(x(t), y(t))$, il y aura environ une proportion $\rho(x(t), y(t))x'(t)y'(t)dt^2$ de points de σ_n . Si ces points sont répartis uniformément (d'où l'hypothèse de "régularité locale") alors ils forment une sous-suite croissante d'ordre $2\sqrt{n\rho(x(t), y(t))x'(t)y'(t)dt^2}$. Ces sous-suites croissantes locales mises bout à bout le long de la courbe forment ensemble une sous-suite croissante globale, d'où (27) en intégrant sur t .

Précisons qu'il est également possible d'exhiber des permutons μ pour lesquels $\text{LIS}(\text{Sample}(n, \mu))$ est de l'ordre de n importe quelle puissance de n intermédiaire à \sqrt{n} et n , à un facteur logarithmique près.

3.3 Application à une conjecture

Une conjecture due à Bukh et Zhou ([8]) énonce que si σ_n, τ_n sont deux permutations aléatoires indépendantes de taille n et de même loi, alors leur plus longue sous-suite commune est de taille moyenne au moins $2\sqrt{n}$ asymptotiquement. Expliquons en quoi l'introduction des permutons est pertinente dans la résolution de cette conjecture.

Commençons par noter que la longueur maximale d'une sous-suite commune entre σ_n et τ_n se réécrit $\text{LIS}(\sigma_n^{-1} \circ \tau_n)$. Supposons alors que $(\sigma_n), (\tau_n)$ convergent vers des permutons à densités régulières. Sont alors soulevées les questions du comportement du produit $\sigma_n^{-1} \circ \tau_n$ puis de sa plus longue sous-suite croissante. Cela amène à considérer le problème variationnel (27) pour des densités de la forme (19); minorer cette quantité établirait la conjecture dans un certain cadre.

4 Bibliographie

- [1] D. Aldous, *The Continuum random tree II : an overview*, Stochastic Analysis : Proceedings of the Durham Symposium on Stochastic Analysis, 1990, 1991, pp. 23-70.
- [2] J. Baik and P. Deift and K. Johansson, *On the Distribution of the Length of the Longest Increasing Subsequence of Random Permutations* (1999), available at [math/9810105](https://arxiv.org/abs/math/9810105).
- [3] F. Bassino and M. Bouvel and M. Drmota and V. Féray and L. Gerin and M. Maazoun and A. Pierrot, *Linear-sized independent sets in random cographs and increasing subsequences in separable permutations* (2021).
- [4] F. Bassino and M. Bouvel and V. Féray and L. Gerin and M. Maazoun and A. Pierrot, *Universal limits of substitution-closed permutation classes*, Journal of the European Mathematical Society **22** (2020), no. 11, 3565-3639, DOI 10.4171/JEMS/993. 73 pages, 17 figures.
- [5] F. Bassino and M. Bouvel and V. Féray and L. Gerin and M. Maazoun and A. Pierrot, *Scaling limits of permutation classes with a finite specification : A dichotomy*, Advances in Mathematics **405** (2022), 108513, DOI <https://doi.org/10.1016/j.aim.2022.108513>.
- [6] F. Bassino and M. Bouvel and V. Féray and L. Gerin and A. Pierrot, *The Brownian limit of separable permutations* (2017), available at [1602.04960](https://arxiv.org/abs/1602.04960).
- [7] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 1999.

- [8] B. Bukh and L. Zhou, *Twins in words and long common subsequences in permutations*, Israel Journal of Mathematics **213** (2013), 183-209.
- [9] O. Cooley and M. Kang O. Pikhurko, *On a Question of Vera T. Sós About Size Forcing of Graphons*, Extended Abstracts EuroComb 2021, 2021, pp. 625 - 630.
- [10] J.N. Cooper, *Quasirandom permutations*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **106** (2004), no. 1, 123-143.
- [11] J.-D. Deuschel and O. Zeitouni, *Limiting Curves for I.I.D. Records*, The Annals of Probability **23** (1995), no. 2, 852 - 878.
- [12] M. Dolezal and J. Hladky and A. Máthé, *Cliques in dense inhomogeneous random graphs*, Random Structures and Algorithms **51** (2015).
- [13] W. Feller, *The fundamental limit theorems in probability*, Bulletin of the American Mathematical Society **51** (1945), no. 11, 800-832.
- [14] P. Flajolet and R. Sedgewick, *An Introduction to the Analysis of Algorithms : Second Edition*, Pearson Education, 2013.
- [15] V.L. Goncharov, *Some facts from combinatorics.*, Izvestia Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat (1944), 8 : 3-48.
- [16] R. Glebov and A. Grzesik and T. Klimosova and D. Kral, *Finitely forcible graphons and permutons*, posted on 2013, DOI 10.48550/ARXIV.1307.2444.
- [17] C. Hoppen and Y. Kohayakawa and C. G. Moreira and B. Ráth and R.M. Sampaio, *Limits of permutation sequences*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **103** (2013), no. 1, 93-113.
- [18] E. Irurozki and B. Calvo and J. Lozano, *Sampling and Learning Mallows and Generalized Mallows Models Under the Cayley Distance*, Methodology and Computing in Applied Probability **20** (2018).
- [19] K. Jin, *The Limit of the Empirical Measure of the Product of Two Independent Mallows Permutations*, Journal of Theoretical Probability **32** (2019), DOI 10.1007/s10959-019-00917-w.
- [20] D. Král' and O. Pikhurko, *Quasirandom permutations are characterized by 4-point densities* (2013), available at [1205.3074](#).
- [21] L. Lovász, *Large Networks and Graph Limits*, American Mathematical Society colloquium publications, American Mathematical Society, 2012.
- [22] T. Mansour and G. Yildirim, *Permutations avoiding 312 and another pattern, Chebyshev polynomials and longest increasing subsequences* (2018).
- [23] G. McKinley, *Superlogarithmic Cliques in Dense Inhomogeneous Random Graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **33** (2019), no. 3, 1772-1800.
- [24] C. Mueller and S. Starr, *The Length of the Longest Increasing Subsequence of a Random Mallows Permutation*, Journal of Theoretical Probability **26** (2011).
- [25] S. Mukherjee, *Estimation in exponential families on permutations*, The Annals of Statistics **44** (2016), no. 2.
- [26] S. Mukherjee, *Fixed points and cycle structure of random permutations*, Electronic Journal of Probability **21** (2016), no. none, 1 - 18, DOI 10.1214/16-EJP4622.
- [27] W. Mullin, *Permutation cycles in the Bose-Einstein condensation of a trapped ideal gas*, Physica B-condensed Matter - PHYSICA B **284** (2000), 7-8.
- [28] D. Romik, *The Surprising Mathematics of Longest Increasing Subsequences*, Institute of Mathematical Statistics Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [29] C. Schensted, *Longest Increasing and Decreasing Subsequences*, Canadian Journal of Mathematics **13** (1961), 179-191.
- [30] S. Starr, *Thermodynamic limit for the Mallows model on S_n* , Journal of Mathematical Physics **50** (2009), no. 9, 095208.
- [31] A.M. Vershik and S.V. Kerov, *Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **233** (1977), no. 6, 1024-1027.