

Épluchage branchant de cartes aléatoires

Emmanuel Kammerer

sous la direction de Cyril Marzouk et Nicolas Curien

Introduction au domaine de recherche
2022

Table des matières

1	Introduction	1
2	Énumération des cartes planaires biparties	2
3	Cartes aléatoires de Boltzmann	3
4	Exploration branchante des cartes aléatoires	4
4.1	Épluchage branchant (arête par arête)	4
4.2	Loi de l'épluchage branchant	6
4.3	Le périmètre du cycle localement le plus grand	6
4.4	Système de cellules discret	7
4.5	Épluchage par couches et processus de hauteur	8
5	Limites d'échelle	9
6	Questions ouvertes et perspectives	10

1 Introduction

Les cartes planaires aléatoires forment un domaine de recherche très actif depuis une vingtaine d'années. Elles sont notamment étudiées car elles présentent une géométrie très différente de celle du plan. Une autre motivation importante dans l'étude des cartes planaires aléatoires vient de la physique théorique : les cartes aléatoires fournissent un modèle pour la théorie de la gravité quantique de Liouville. Deux approches principalement sont mises en œuvre dans l'étude des cartes aléatoires.

La première approche, initiée par Chassaing et Schaeffer dans [8], consiste à utiliser des bijections entre cartes et arbres qui préservent certaines propriétés géométriques. Cette approche permet notamment d'obtenir des limites d'échelle, comme la sphère brownienne, construite par Le Gall [10] et Miermont [11]. Une seconde approche est l'exploration de la carte au moyen d'un algorithme d'épluchage bien choisi, introduite par le physicien Watabiki dans [13] puis rigoureusement par Angel dans [1]. Cette exploration permet d'étudier les limites locales (où l'on regarde comment

la carte évolue au voisinage d'un point distingué), mais aussi d'obtenir des propriétés métriques asymptotiques pour la carte duale associée.

C'est la seconde approche que l'on abordera. L'épluchage présenté ci-dessous est une version branchante de l'épluchage défini par Budd dans [6]. L'épluchage des cartes planaires aléatoires est un domaine déjà bien documenté. Le cours de Curien [9] en donne un panorama complet. On peut aussi citer le mini-cours de Budd [5]. Dans ce texte, nous décrivons l'exploration branchante et quelques unes de ses applications introduites par Bertoin, Budd, Curien et Kortchemski dans [3] et [4], qui permet d'étudier les distances dans la carte duale. La plupart des résultats des sections 4 et 5 sont issus de [4].

2 Énumération des cartes planaires biparties

Définition 2.1. *Une carte planaire est un (multi-)graphe connexe (non orienté, localement fini avec boucles) plongé proprement dans la sphère et vu à homéomorphisme du plan préservant l'orientation près.*

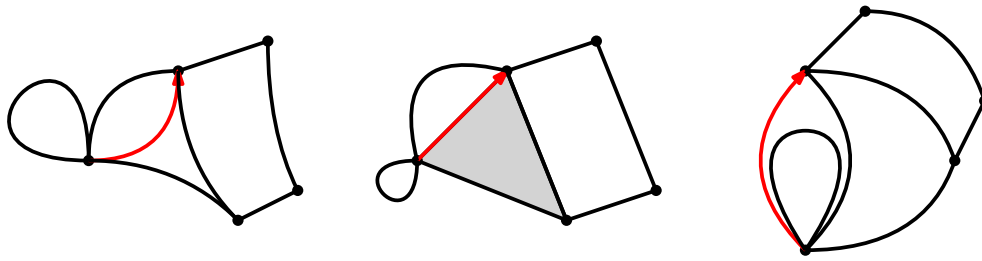


FIGURE 1 – Aucune de ces cartes planaires n'est bipartite. Les deux premières cartes sont en fait les mêmes alors que celle de droite est différente. L'arête racine est coloriée en rouge. La face racine de la carte du milieu est grisée et est de degré 3.

Dans la suite, sauf mention du contraire, toutes les cartes (planaires) sont de taille finie, i.e. ont un nombre fini d'arêtes, et sont munies d'une arête orientée distinguée appelée arête racine. Une carte planaire peut aussi être vue comme un recollement connexe de polygones homéomorphe à la sphère. Une carte est donc constituée de sommets, d'arêtes, mais aussi de faces, qui correspondent à ces polygones ou de manière équivalente aux composantes connexes de la sphère privée de l'image du plongement. Le nombre d'arêtes bordant une face f d'une carte est appelé le degré de cette face et est noté $\deg(f)$. La face à droite de l'arête racine est appelée la face racine (ou face externe) et est notée f_r . Son degré $\deg(f_r)$ est aussi appelé le périmètre de la carte. Les nombres de sommets, d'arêtes et de faces sont notoirement liés par la relation d'Euler :

Théorème 2.2. *Si \mathbf{m} est une carte planaire,*

$$\#\text{Sommets}(\mathbf{m}) + \#\text{Faces}(\mathbf{m}) = \#\text{Arêtes}(\mathbf{m}) + 2.$$

À toute carte \mathbf{m} peut être associée sa carte duale \mathbf{m}^\dagger obtenue en plaçant un sommet sur chaque face de \mathbf{m} et en reliant deux sommets correspondant à deux faces adjacentes. L'arête racine de la carte duale est définie comme l'arête correspondant à l'arête à droite de l'arête racine en tournant autour de la face racine et est orientée vers l'intérieur de la face racine (voir figure 2).

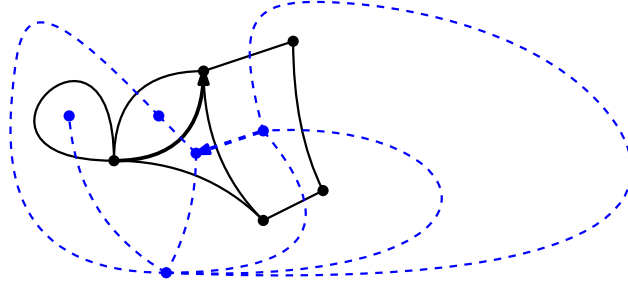


FIGURE 2 – Une carte \mathbf{m} en noir et sa carte duale \mathbf{m}^\dagger en pointillés bleus. Les arêtes racines de \mathbf{m} et de \mathbf{m}^\dagger sont en gras.

Une classe de cartes dont l'énumération est particulièrement simple est celle des cartes biparties. Une carte est dite bipartie si son graphe est biparti, c'est-à-dire s'il peut être colorié de deux couleurs de sorte que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs différentes. On peut remarquer qu'une carte est bipartie si et seulement si ses faces sont de degrés pairs. Tutte a démontré dans [12] une formule dénombrant les cartes planaires biparties non enracinées dont les faces ont des degrés prescrits.

Théorème 2.3. (*formule des tranches¹ de Tutte*)

Le nombre de cartes planaires biparties non enracinées avec k faces étiquetées de 1 à k de degrés respectifs $2\ell_1, \dots, 2\ell_k$ ayant chacune un coin distingué est égal à

$$S(\ell_1, \dots, \ell_k) = \frac{(e-1)!}{v!} \prod_{i=1}^k \frac{(2\ell_i)!}{\ell_i! (\ell_i - 1)!},$$

où $e = \sum_i \ell_i$ et $v = 2 + e - k$ sont respectivement le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'une telle carte.

Dans tout ce qui suivra, les cartes seront aussi supposées biparties.

3 Cartes aléatoires de Boltzmann

Les cartes aléatoires sont souvent tirées uniformément au hasard à taille fixée. Une manière plus générale de tirer les cartes est de leur associer des poids de Boltzmann. Soit $\mathbf{q} = (q_k)_{k \geq 1}$ une suite non nulle de réels positifs appelée la suite des poids. Le poids d'une carte \mathbf{m} (planaire, finie, bipartie, enracinée) est

$$w_{\mathbf{q}}(\mathbf{m}) = \prod_{f \in \text{Faces}(\mathbf{m}) \setminus \{f_r\}} q_{\deg(f)/2}.$$

Pour tout $\ell \geq 1$, notons $\mathcal{M}^{(\ell)}$ l'ensemble des cartes de périmètre 2ℓ et introduisons la fonction de partition

$$W^{(\ell)} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}^{(\ell)}} w_{\mathbf{q}}(\mathbf{m}).$$

1. Le terme de "tranches" peut sembler obscur. Il vient du fait que Tutte considérait des objets combinatoires équivalents aux cartes obtenus en saucissonnant une sphère privée d'un nombre fini de composantes simplement connexes délimitées par des lacets simples disjoints en reliant des sommets placés sur ces lacets.

Cette dernière peut être vue comme une série formelle en \mathbf{q} ou comme un élément de $[0, \infty]$.

Définition 3.1. *La suite des poids \mathbf{q} est dite admissible si pour tout $\ell \geq 1$, $W^{(\ell)} < +\infty$ et s'il existe une constante $c_{\mathbf{q}}$ telle que*

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{W^{(\ell+1)}}{W^{(\ell)}} = c_{\mathbf{q}}.$$

Remarque 3.2. *Les conditions ci-dessus peuvent être remplacées par l'unique condition $W^{(1)} < +\infty$. Nous n'entrerons pas dans les détails de la preuve de ce résultat qui nécessiterait l'introduction d'autres objets comme les cartes munies d'un sommet cible (elle fait aussi bien sûr appel à la formule des tranches de Tutte du théorème 2.3).*

Si \mathbf{q} est admissible, on note $\mathbb{P}^{(\ell)}$ la mesure de probabilité associée, appelée mesure de Boltzmann, définie par

$$\mathbb{P}^{(\ell)}(\mathbf{m}) = \frac{w_{\mathbf{q}}(\mathbf{m})}{W^{(\ell)}}.$$

Notons $\mathbb{E}^{(\ell)}$ l'espérance associée. Une carte aléatoire suivant la loi $\mathbb{P}^{(\ell)}$ est appelée une carte de \mathbf{q} -Boltzmann de périmètre 2ℓ .

4 Exploration branchante des cartes aléatoires

4.1 Épluchage branchant (arête par arête)

Lors de l'exploration par l'épluchage d'une carte, la région déjà explorée correspond à une carte munie de trous qui délimitent des zones inexplorées (voir figure 3).

Définition 4.1. *Une carte à trous est une carte \mathbf{e} dont certaines faces sont distinguées et appelées les trous de \mathbf{e} , ces trous étant disjoints et simples (ce qui équivaut au fait que deux coins d'un même trou ou de deux trous différents ne peuvent être rattachés au même sommet). De plus, la face racine n'est pas un trou. On appelle cycle le bord d'un trou, constitué des arêtes qui le bordent.*

Explorer un trou h d'une carte à trous revient à recoller une carte \mathbf{u} de périmètre $\deg(h)$ à l'intérieur de ce trou. Comme il y a $\deg(h)$ choix pour l'arête du trou à laquelle on colle l'arête racine de \mathbf{u} , on se donne une fonction déterministe qui choisit pour chaque carte à trous \mathbf{e} une arête distinguée sur chaque trou de \mathbf{e} . Ainsi, le recollement est bien défini et est rigide, au sens où deux choix différents de cartes \mathbf{u} donnent après recollement deux cartes différentes.

Définition 4.2. *Si \mathbf{m} est une carte (resp. une carte à trous) et \mathbf{e} est une carte à trous, on dit que \mathbf{e} est une sous-carte de \mathbf{m} et on note $\mathbf{e} \subset \mathbf{m}$ si \mathbf{m} s'obtient en recollant dans les trous de \mathbf{e} des cartes (resp. des cartes à trous). Voir figure 3².*

Si \mathbf{e} est une carte à trous, on note $\partial^*\mathbf{e}$ et on appelle frontière active de \mathbf{e} l'ensemble des arêtes bordant les trous de \mathbf{e} .

Définition 4.3. *Un algorithme d'épluchage \mathcal{A} est une application qui à une carte à trous \mathbf{e} associe un élément de $\partial^*\mathbf{e} \cup \{\dagger\}$, où \dagger est un point cimetièrre.*

2. La figure 3 et presque toutes les suivantes ont été dessinées à l'aide d'un éditeur de cartes planaires conçu par Timothy Budd.

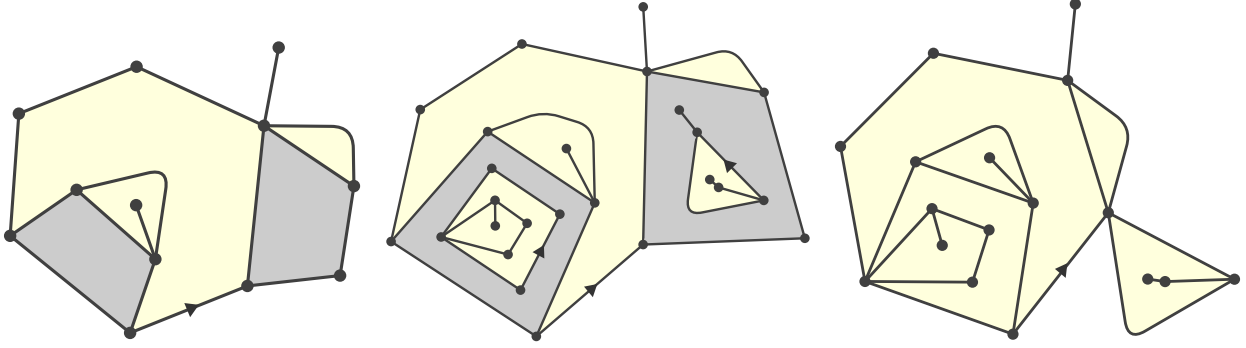


FIGURE 3 – À gauche, une carte à trous \mathbf{e} , sous-carte de la carte \mathbf{m} à droite. Les trous sont grisés et l'arête racine est marquée d'une flèche. Au milieu sont situées dans les trous de \mathbf{e} des cartes dont les périmètres coïncident avec ceux des trous. Ces cartes, une fois recollées aux trous, redonnent la carte \mathbf{m} .

Étant donné un algorithme d'épluchage, pour définir l'exploration d'une carte \mathbf{m} , il reste à expliquer ce qu'il se passe lorsqu'on épluche une arête a de la frontière active d'une sous-carte \mathbf{e} de \mathbf{m} . Éplucher l'arête a revient à découvrir quelle face de \mathbf{m} est derrière cette arête (du côté du trou). Notons $\text{Épluche}(\mathbf{e}, a, \mathbf{m})$ la sous-carte de \mathbf{m} obtenue. Deux cas se présentent :

- soit la face f derrière a n'est pas une face de \mathbf{e} , auquel cas $\text{Épluche}(\mathbf{e}, a, \mathbf{m})$ s'obtient en recollant à a du côté du trou la face f . Si $\deg(f) = 2k$, on note ce cas C_k .
- soit la face f derrière a est déjà dans \mathbf{e} auquel cas l'arête épluchée a est recollée à l'arête de f dans \mathbf{e} qui lui correspond dans \mathbf{m} . Dans ce cas, le trou h sur lequel était a se scinde en deux trous plus petits, l'un à gauche de a , l'autre à droite de a , dont les degrés $2k_1$ et $2k_2$ sont tels que $2k_1 + 2k_2 = \deg(h) - 2$. Ce cas est noté G_{k_1, k_2} .

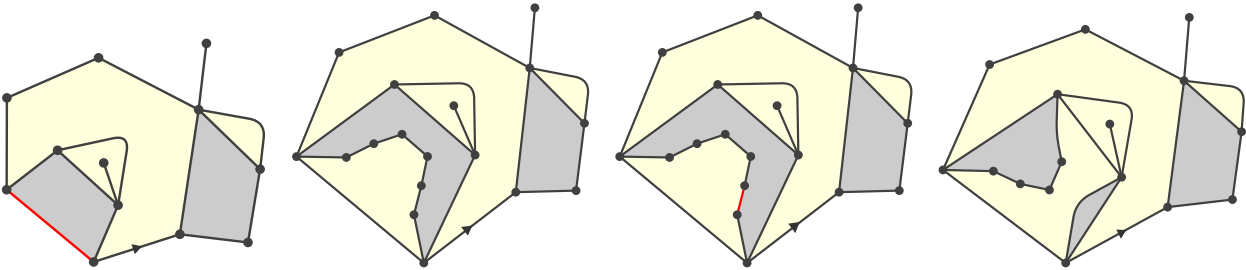


FIGURE 4 – À gauche, une carte à trous \mathbf{e} , avec en rouge l'arête épluchée $\mathcal{A}(\mathbf{e})$. L'épluchage de cette arête provoque un évènement C_4 . Puis, l'algorithme choisit une nouvelle arête à éplucher pour la carte à trou obtenue. L'épluchage de cette arête donne un évènement $G_{3,1}$.

Par ailleurs, on pose $\text{Épluche}(\mathbf{e}, \dagger, \mathbf{m}) = \mathbf{e}$. L'exploration branchante de \mathbf{m} d'algorithme \mathcal{A} est alors définie comme la suite de cartes à trous

$$\mathbf{e}_0(\mathbf{m}) \subset \cdots \subset \mathbf{e}_n(\mathbf{m}) \subset \cdots \subset \mathbf{m},$$

où $\mathbf{e}_0(\mathbf{m})$ est la carte à trou constituée de la face racine f_r de \mathbf{m} recollée à un unique trou de même

degré et où pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbf{e}_{n+1}(\mathbf{m}) = \text{Épluche}(\mathbf{e}_n(\mathbf{m}), \mathcal{A}(\mathbf{e}), \mathbf{m})$$

Remarque 4.4. *L'exploration peut aussi être vue de manière plus élémentaire en considérant \mathbf{m}^\dagger . À chaque carte à trou $\mathbf{e}_n(\mathbf{m})$ correspond $\mathbf{e}_n^\circ(\mathbf{m})$ défini comme l'ensemble connexe des arêtes de \mathbf{m}^\dagger duales à une arête interne de $\mathbf{e}_n(\mathbf{m})$. L'ensemble $\mathbf{e}_n^\circ(\mathbf{m})$ permet inversement de reconstituer $\mathbf{e}_n(\mathbf{m})$ en prenant pour faces celles qui forment une extrémité d'un élément de $\mathbf{e}_n^\circ(\mathbf{m})$ et en recollant ces faces selon les élément de $\mathbf{e}_n^\circ(\mathbf{m})$. L'exploration branchante peut donc être définie de manière équivalente comme la suite croissante*

$$\emptyset = \mathbf{e}_0^\circ(\mathbf{m}) \subset \dots \subset \mathbf{e}_n^\circ(\mathbf{m}) \subset \dots \subset \text{Arêtes}(\mathbf{m}^\dagger),$$

où $\mathbf{e}_{n+1}^\circ(\mathbf{m})$ est obtenue en ajoutant à $\mathbf{e}_n^\circ(\mathbf{m})$ l'arête duale à l'arête épluchée.

4.2 Loi de l'épluchage branchant

Soit $\ell \geq 1$. Travaillons sur l'espace canonique $(\mathcal{M}^{(\ell)}, \mathbb{P}^{(\ell)})$. Si \mathbf{e} est une carte à trous, on pose

$$\tilde{w}(\mathbf{e}) = \prod_{\substack{f \in \text{Faces}(\mathbf{e}) \setminus \{f_r\} \\ f \text{ n'étant pas un trou}}} q_{\deg(f)/2}.$$

La proposition ci-dessous explicite la loi du processus d'exploration pour l'épluchage branchant et donne une propriété de Markov spatiale.

Proposition 4.5. *Soit $n \geq 0$. Soit \mathbf{e} une carte à trous pouvant être obtenue après n étapes d'épluchage d'une carte de périmètre 2ℓ . Notons ℓ_1, \dots, ℓ_k les demi-périmètres des trous de \mathbf{e} . Alors*

$$\mathbb{P}^{(\ell)}(\mathbf{e}_n = \mathbf{e}) = \frac{\tilde{w}(\mathbf{e})}{W^{(\ell)}} \prod_{i=1}^k W^{(\ell_i)}.$$

De plus, conditionnellement à $\{\mathbf{e}_n = \mathbf{e}\}$, les cartes aléatoires remplissant les trous de \mathbf{e}_n dans \mathbf{m} sont des cartes indépendantes de \mathbf{q} -Boltzmann de périmètres correspondants.

Démonstration. C'est une conséquence de la définition déterministe de l'épluchage et de la rigidité du recollement. En effet, sommer les poids des cartes $\mathbf{m} \in \mathcal{M}^{(\ell)}$ telles que \mathbf{e} soit une sous-carte de \mathbf{m} revient à sommer sur tous les k -uplets de cartes $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ de demi-périmètres respectifs ℓ_1, \dots, ℓ_k le poids de la carte obtenue en recollant les \mathbf{u}_i aux trous de \mathbf{e} . Or, par multiplicativité du poids, le poids d'une telle carte \mathbf{m} obtenue par recollement est $w_{\mathbf{q}}(\mathbf{m}) = \tilde{w}(\mathbf{e}) \prod_{i=1}^k w_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}_i)$, ce qui conclut la première assertion. Pour le deuxième point, il suffit d'appliquer une seconde fois la multiplicativité des poids. \square

4.3 Le périmètre du cycle localement le plus grand

Soit \mathbf{m} une carte et \mathcal{A} un algorithme d'épluchage. La famille des cycles localement les plus grands $(\mathcal{C}_*(i))_{i \geq 0}$ lors de l'exploration branchante de \mathbf{m} est une famille de cycles pris dans l'exploration à des temps $(\sigma_i)_{i \geq 0}$ stationnant possiblement en un point cimetièrè \dagger définie par récurrence de la façon suivante : $\mathcal{C}_*(0)$ est l'unique cycle de \mathbf{e}_0 . Si $\mathcal{C}_*(i) = \dagger$, alors $\mathcal{C}_*(i+1) = \dagger$. Sinon, soit $\sigma_{i+1} = \inf\{j > \sigma_i; \mathcal{A}(\mathbf{e}_j) \in \mathcal{C}_*(i)\}$, avec par convention $\inf \emptyset = +\infty$. Si $\sigma_{i+1} = +\infty$, on pose $\mathcal{C}_*(i+1) = \mathcal{C}_*(i)$. Dans le cas contraire, on définit $\mathcal{C}_*(i+1)$ de façons différentes suivant les évènements liés à l'épluchage de l'arête $\mathcal{A}(\mathbf{e}_{\sigma_{i+1}})$.

- Si l'évènement C_k a lieu, on définit $\mathcal{C}_*(i+1)$ comme le nouveau trou créé.
- Si l'évènement $G_{0,0}$ a lieu, on pose $\mathcal{C}_*(i+1) = \dagger$.
- Si l'évènement G_{k_1, k_2} a lieu avec $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$, un ou deux trous sont créés. On définit $\mathcal{C}_*(i+1)$ comme le cycle associé au trou de plus grand degré (si $k_1 = k_2$, on choisit l'un des deux de façon déterministe).

Notons $P_*(i)$ le demi-périmètre du cycle $\mathcal{C}_*(i)$, valant par convention zéro si $\mathcal{C}_*(i) = \dagger$.

Proposition 4.6. *Sous $\mathbb{P}^{(\ell)}$, le processus $(P_*(i))_{i \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur \mathbb{N} issue de ℓ absorbée en zéro et de probabilités de transition*

$$\mathbb{P}^{(\ell)}(P_*(i+1) = k+m \mid P_*(i) = m) = \begin{cases} \nu(k) \frac{W^{(k+m)}}{c_{\mathbf{q}}^k W^{(m)}} & \text{si } k > \frac{-m-1}{2} \\ \frac{1}{2} \nu(k) \frac{W^{(k+m)}}{c_{\mathbf{q}}^k W^{(m)}} & \text{si } m-1 \text{ est pair et } k = \frac{-m-1}{2} \end{cases}$$

où ν est la mesure de probabilité sur \mathbb{Z} définie par

$$\nu(k) = \begin{cases} q_{k+1} c_{\mathbf{q}}^k & \text{pour } k \geq 0 \\ 2W^{(-1-k)} c_{\mathbf{q}}^k & \text{pour } k \leq -1. \end{cases}$$

Démonstration. La première égalité est immédiate par rigidité du recollement. Le seul point délicat à vérifier est le fait que ν est une mesure de probabilité. Par le lemme de Fatou et en faisant tendre m vers l'infini dans la première égalité, ν est une sous-probabilité. Pour montrer que ν est bien une probabilité, une manière de faire est d'introduire les cartes de périmètre 2ℓ avec une face cible de degré $2p$, le périmètre du trou contenant cette face cible évolue alors comme une h -transformée de Doob de la marche simple de pas ν . \square

4.4 Système de cellules discret

Notons $\mathbb{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ l'arbre d'Ulam constitué des mots finis d'entiers, le mot vide étant noté \emptyset . À l'exploration branchante de \mathbf{m} on associe une famille de processus à valeurs entières $((P_u(i))_{i \geq 0})_{u \in \mathbb{U}}$ appelée système de cellules discret (à chaque mot de \mathbb{U} correspond une cellule et le processus $(P_u(i))_{i \geq 0}$ donne la taille de la cellule à partir de sa naissance). Par définition, $P_\emptyset = P_*$ est le processus du périmètre du cycle localement le plus grand. Notons $(\beta_j)_{j \geq 0}$ les instants de sauts strictement négatifs de P_\emptyset . Chacun de ces sauts correspond à un évènement du type G_{k_1, k_2} . Le demi-périmètre du cycle localement le plus petit \mathcal{C}_j créé lors du j -ème saut négatif est alors $P_\emptyset(\beta_j) - P_\emptyset(\beta_j + 1) - 1$. On définit le processus $(P_j(i))_{i \geq 0}$ comme le processus du périmètre du cycle localement le plus grand associé à la sous-carte de \mathbf{m} délimitée par le cycle \mathcal{C}_j . Il est issu de $\Delta_- P_\emptyset(\beta_j) := P_\emptyset(\beta_j) - P_\emptyset(\beta_j + 1) - 1$. On définit de même par récurrence le processus $(P_{u_j}(i))_{i \geq 0}$ à partir de $(P_u(i))_{i \geq 0}$: notons $(\beta_{u_j})_{j \geq 0}$ les instants de sauts strictement négatifs de P_u . Chaque instant de saut négatif β_{u_j} correspond à la création d'un autre cycle \mathcal{C}_{u_j} en plus du cycle localement le plus grand. Par définition, P_{u_j} est le processus du périmètre du cycle localement le plus grand associé à la partie de la carte délimitée par le cycle \mathcal{C}_{u_j} . Il est issu de $\Delta_- P_u(\beta_{u_j}) := P_u(\beta_{u_j}) - P_u(\beta_{u_j} + 1) - 1$. L'instant de naissance b_u de la cellule $u \in \mathbb{U}$ est défini par récurrence par $b_\emptyset = 0$ et $\forall u \in \mathbb{U}, \forall j \in \mathbb{N}, b_{u_j} = b_u + \beta_j$.

Par la propriété de Markov spatiale de la proposition 4.5 et par la proposition 4.6, pour tout $u \in \mathbb{U}$, conditionnellement à P_u , les P_{u_j} sont des processus de Markov sur \mathbb{N} indépendants de même loi que P_* mais issus de $\Delta_- P_u(\beta_{u_j})$ et sont indépendants des P_v pour tout $v \in \mathbb{U}$ qui n'est pas un descendant de u .

4.5 Épluchage par couches et processus de hauteur

On présente ici un algorithme $\mathcal{A}_{\text{couches}}$ permettant d'étudier la métrique de graphe dual. Soit \mathbf{m} une carte. Munissons \mathbf{m}^\dagger de la distance de graphe, notée d_{gr}^\dagger ³. Si $f \in \text{Faces}(\mathbf{m}) = \text{Sommets}(\mathbf{m}^\dagger)$, appelons hauteur de f la distance à la face racine $d_{\text{gr}}^\dagger(f, f_r)$. Si a est une arête bordant f avec un trou de l'autre côté, on appelle hauteur de e la hauteur de f . L'algorithme d'épluchage par couches permet d'explorer les faces de \mathbf{m} dans l'ordre croissant des hauteurs. Plus précisément, cet algorithme préserve la propriété suivante :

(P) : Il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que toutes les arêtes d'un cycle de $\mathbf{e}_n(\mathbf{m})$ soient de hauteur h ou $h+1$.
De plus, sur chaque cycle, les arêtes de hauteur h forment un intervalle connexe.

Définissons $\mathcal{A}_{\text{couches}}$ sur les sous-cartes \mathbf{e} de \mathbf{m} satisfaisant (P) et vérifions que la carte obtenue en épluchant l'arête choisie $\hat{\text{Épluche}}(\mathbf{e}, \mathcal{A}_{\text{couches}}(\mathbf{e}), \mathbf{m})$ satisfait de nouveau la condition (P). Si $\mathbf{e} = \mathbf{m}$, on pose $\mathcal{A}_{\text{couches}}(\mathbf{e}) = \dagger$. Sinon, soit h donné par la condition (P) tel qu'il existe une arête de hauteur h dans un cycle de \mathbf{e} .

- Si pour chaque cycle de \mathbf{e} , les arêtes de ce cycle ont la même hauteur (toutes de hauteur h ou toutes de hauteur $h+1$), l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{couches}}$ choisit de façon déterministe une arête de hauteur h dans un des cycles.
- S'il existe un cycle ayant à la fois des arêtes de hauteur h et de hauteur $h+1$, l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{couches}}$ choisit de façon déterministe une arête de hauteur h se situant à droite d'une arête de hauteur $h+1$ dans un tel cycle (voir figure 5).

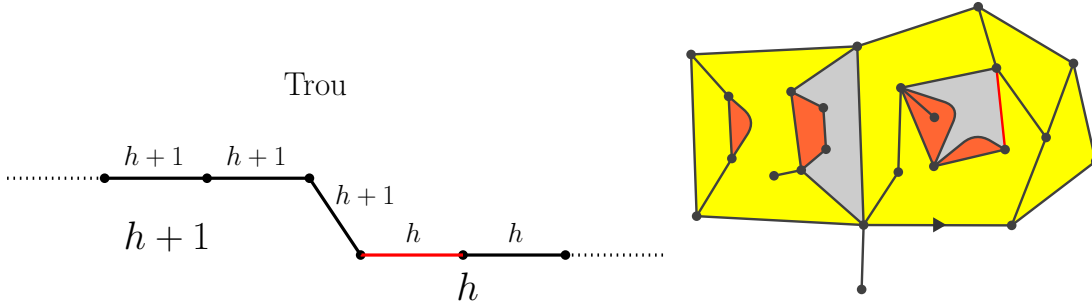


FIGURE 5 – À gauche, l'arête épluchée lorsqu'un des cycles a des arêtes de hauteur h et de hauteur $h+1$. À droite, une carte à trous (grisés) avec en rouge un choix possible d'arête épluchée par $\mathcal{A}_{\text{couches}}$. La face racine, de hauteur 0, est en blanc, les faces de hauteur 1 en jaune et les faces de hauteur 2 en orange.

Dans chacun de ces cas, il est clair que $\hat{\text{Épluche}}(\mathbf{e}, \mathcal{A}_{\text{couches}}(\mathbf{e}), \mathbf{m})$ vérifie (P).

Remarque 4.7. *La hauteur minimale des arêtes de la frontière active de $\mathbf{e}_n(\mathbf{m})$ n'augmente que de 0 ou de 1 à chaque étape de l'exploration. Notons pour tout $h \geq 0$ le temps d'arrêt θ_h défini comme le premier instant n pour lequel toutes les arêtes des cycles de $\mathbf{e}_n(\mathbf{m})$ sont de hauteur h . Le sous graphe de \mathbf{m}^\dagger induit par $\mathbf{e}_{\theta_h}(\mathbf{m})$ n'est rien d'autre que la boule de rayon h autour de f_r pour la distance d_{gr}^\dagger .*

3. L'algorithme $\mathcal{A}_{\text{couches}}$ est particulièrement adapté pour l'étude de d_{gr}^\dagger , mais pourrait être totalement inopérant sur des métriques différentes. Un autre algorithme d'épluchage permet d'étudier la métrique de percolation de premier passage sur les faces, mais nous ne l'aborderons pas faute de place.

Introduisons le processus de hauteur du cycle localement le plus grand : pour tout $i \in \mathbb{N}$, $H_*(i)$ est la hauteur minimale d'une arête du cycle localement le plus grand $\mathcal{C}_*(i)$. Pour tout $u \in \mathbb{U}$, on définit de même $(H_u(i))_{i \geq 0}$ à partir du cycle localement le plus grand dans l'exploration de la sous-carte de \mathbf{m} délimitée par le cycle \mathcal{C}_u .

5 Limites d'échelle

Si $a \in]3/2, 5/2]$, on dit que la suite de poids \mathbf{q} est critique de type a si

$$W^{(\ell)} \sim \frac{p_{\mathbf{q}}}{2} c_{\mathbf{q}}^{\ell+1} \ell^{-a} \text{ quand } \ell \rightarrow +\infty,$$

où $p_{\mathbf{q}}$ est une certaine constante dépendant de \mathbf{q} dont nous ne précisons pas la valeur. Cette condition implique en particulier que $\nu(-k) \sim p_{\mathbf{q}} k^{-a}$ quand $k \rightarrow +\infty$. On peut même montrer que la mesure ν est dans le domaine strict d'attraction d'une loi $(a-1)$ -stable de paramètre de positivité ρ donné par

$$(a-1)(1-\rho) = \frac{1}{2}.$$

De façon équivalente, si (S_n) est une marche simple de pas ν , alors

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{n^{\frac{1}{a-1}}} \right)_{t \geq 0} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} (\Upsilon_a(t))_{t \geq 0},$$

pour la topologie J_1 de Skorokhod où Υ_a est un processus de Lévy $(a-1)$ -stable de paramètre de positivité ρ (c'est une variante du théorème de Donsker).

En utilisant les cartes de Boltzmann infinies de périmètre 2ℓ et une relation d'absolue continuité, on peut déterminer la limite d'échelle du périmètre du cycle localement le plus grand :

Théorème 5.1. *Supposons \mathbf{q} admissible, critique de type $a \in]3/2, 5/2]$, alors sous $\mathbb{P}^{(\ell)}$,*

$$\left(\frac{1}{\ell} P_*(\lfloor \ell^{a-1} t \rfloor) \right)_{t \geq 0} \xrightarrow[\ell \rightarrow +\infty]{\text{loi}} (X^a(t))_{t \geq 0},$$

où X^a est un processus de Markov autosimilaire (positif) de paramètre $-(a-1)$ (i.e. si on note P_x la loi du processus X^a issu de x , alors sous P_1 le processus $(xX^a(x^{-(a-1)}t))_{t \geq 0}$ suit la loi P_x).

Au processus X^a , on peut associer un système de cellules continu $((X_u^a(t))_{t \geq 0})_{u \in \mathbb{U}}$. À partir du théorème 5.1, il est possible de montrer que la limite d'échelle du système de cellules discret correspond au système de cellules continu. Par ailleurs, le processus de hauteur a lui aussi une limite d'échelle pour $a \in]2, 5/2]$. À l'aide de ces résultats, il est possible d'obtenir la limite d'échelle du processus $(\mathbf{L}(h))_{h \geq 0}$ à valeurs dans $\ell^{a+1/2}(\mathbb{N})$ constitué de la suite des tailles des cycles de $\mathbf{c}_{\theta_h}(\mathbf{m})$ rangées dans l'ordre décroissant :

Théorème 5.2. *Soit \mathbf{q} une suite admissible critique de type $a \in]2, 5/2]$. Alors sous $\mathbb{P}^{(\ell)}$*

$$\left(\frac{1}{\ell} \mathbf{L}(\lfloor \ell^{a-2} h \rfloor) \right)_{h \geq 0} \xrightarrow[\ell \rightarrow +\infty]{\text{loi}} (\mathbf{Y}_a(h))_{h \geq 0}$$

dans l'espace des processus continus à gauche avec des limites à droite à valeurs dans $\ell^{a+1/2}(\mathbb{N})$ muni de la topologie J_1 de Skorokhod, où le processus \mathbf{Y}_a est construit à l'aide d'un processus de Markov autosimilaire Y_a de paramètre $2-a$ relié à X^a par un changement de temps appelé transformation de Lamperti.

Ce théorème peut s'interpréter comme un saucissonnage de la carte suivant la hauteur. En chaque hauteur h , on regarde la limite des périmètres des tranches ainsi découpées. Le processus \mathbf{Y}_a est un processus de croissance-fragmentation, donnant à chaque instant les tailles des cellules d'un système de cellules continu, ces cellules pouvant croître ou se diviser. Ce type de processus a été introduit dans [2] et étudié par Bertoin il y a quelques années.

6 Questions ouvertes et perspectives

Le théorème 5.2 suggère l'existence d'une limite d'échelle au sens de Gromov-Hausdorff (en tant qu'espaces métriques aléatoires) des cartes duales \mathbf{m}^\dagger dans les cas critiques de type $a \in]2, 5/2]$. La question ouverte la plus naturelle est donc : y a-t-il convergence et quelle est cette limite d'échelle ?

L'objectif de ma thèse est l'étude de la carte \mathbf{m}^\dagger dans le cas critique de type $a = 2$. Dans ce cas, on ne s'attend pas à obtenir une limite non triviale en renormalisant par le diamètre. En effet, en adaptant les techniques développées dans [7], j'ai obtenu la limite d'échelle du processus de hauteur dans ce cadre et en ai dérivé un analogue du théorème 5.2 en remplaçant le changement d'échelle en ℓ^{a-2} par un changement d'échelle en $\log \ell$. Les grandes faces sont donc à distance de l'ordre de $\log \ell$ les unes des autres. Or, j'ai aussi montré que la distance de la face racine à un point uniforme était de l'ordre de $(\log \ell)^2$, ce qui donne une minoration du diamètre. On espère cependant en se restreignant aux grandes faces obtenir une limite intéressante. Le saucissonnage en hauteur ne permet que d'obtenir les distances des grandes faces à la face racine (chaque grande face correspondant à un saut positif du processus limite). Une question ouverte est : comment estimer la distance entre deux grandes faces dont aucune d'entre elles n'est la face racine ? Par ailleurs, l'asymptotique du diamètre de \mathbf{m}^\dagger sous $\mathbb{P}^{(\ell)}$ quand ℓ tend vers l'infini est encore inconnue. Enfin, on espère relier les distances entre grandes faces avec des distances entre boucles du CLE_4 .

Références

- [1] O. Angel, Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation, *Geom. Funct. Anal.*, 13 (2003), pp. 935–974.
- [2] J. Bertoin, Markovian growth-fragmentation processes, *Bernoulli*, 23 (2017), pp. 1082-1101.
- [3] J. Bertoin, N. Curien et I. Kortchemski, Random planar maps & growth-fragmentations, *Ann. of Probab.*, 46 (2018), pp. 207-260.
- [4] J. Bertoin, T. Budd, N. Curien et I. Kortchemski, Martingales in self-similar growth-fragmentations and their connections with random planar maps. *Probab. Theory Relat. Fields* 172, 663–724 (2018).
- [5] T. Budd, *Peeling of random planar maps* (mini-cours donné à l'ENS Lyon), <https://hef.ru.nl/~tbudd/docs/mappeeling.pdf>.
- [6] T. Budd, The peeling process of infinite Boltzmann planar maps, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 23 (2016), pp. 1-28.
- [7] T. Budd, N. Curien, C. Marzouk, Infinite random planar maps related to Cauchy processes. *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques*, École polytechnique, 2018, 5, pp. 749-791. (10.5802/jep.82).
- [8] P. Chassaing et G. Schaeffer, Random planar lattices and integrated superBrownian excursion, *Probab. Theory Related Fields*, 128 (2004), pp. 161-212.

- [9] N. Curien, *Peeling random planar maps*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLIX–2019 (à paraître)
- [10] J.-F. Le Gall, Uniqueness and universality of the Brownian map, *Ann. Probab.*, 41 (2013), pp. 2880-2960.
- [11] G. Miermont, The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations, *Acta Math.*, 210 (2013), pp. 319-401.
- [12] W. T. Tutte, A census of slicings, *Canad. J. Math.*, 14 (1962), pp. 708-722.
- [13] Y. Watabiki, Construction of non-critical string field theory by transfer matrix formalism in dynamical triangulation, *Nuclear Phys. B*, 441 (1995), pp. 119–163.