Introduction au domaine de recherche : Représentations unitaires et algèbres de von Neumann

Basile Morando

2022

Introduction

Pour cette introduction au domaine de recherche, je me propose de parler des représentations unitaires des groupes localement compacts. Le sujet est vaste : plus d'un siècle de travaux mathématiques s'y rapportent tant du côté de l'analyse harmonique abstraite et de la théorie des groupes - dont ces représentations sont le sujet d'étude central - qu'en théorie des nombres, en systèmes dynamiques ou en physique mathématique. Je souhaite ici donner un aperçu de la structure des représentations unitaires des groupes localement compacts à base dénombrable. Pour les groupes abéliens, ces questions se ramènent à l'étude des caractères et à l'usage de la transformée de Fourier. Pour les groupes compacts, on retombe essentiellement sur la théorie de Schur et Frobenius des représentations linéaires des groupes finis. Une théorie générale des représentations unitaires se doit donc de proposer une approche unifiée à ces deux théories -pourtant bien différentes sur certains aspects. On s'attachera à montrer qu'une telle unification et généralisation est possible, et qu'elle est suffisamment puissante pour permettre d'élucider la structure des représentations unitaires de nombreux groupes ni compacts, ni abéliens : les groupes de type I. Mais pour les groupes qui ne sont pas de type I - et c'est tout de même le cas de « la plupart » des groupes discrets infinis non abéliens-, on s'apercevra que cette approche est essentiellement vouée à l'échec, et qu'on ne peut plus décrire grand chose. La plupart des résultats qu'on présentera sont simplement des résultats d'existence et d'unicité, et c'est souvent un travail considérable, passionnant, et parfois hors de portée, que de construire explicitement les objets que nous introduisons, même pour les groupes de type I.

L'étude des représentations unitaires des groupes est indissociable de la théorie des algèbres d'opérateurs : deux des livres de référence sur les représentations unitaires ([Dix69b] et [Dix69a]) sont des traités sur les algèbres d'opérateurs. Plutôt que d'introduire en profondeur la difficile théorie des algèbres de von Neumann (on peut trouver une bonne introduction à ces objets dans l'IDR d'Amine Marrakchi sur le sujet, et les difficiles traités de référence en la matière sont les ouvrages [Tak79]), je préfère donner plusieurs exemples d'algèbres de von Neumann associées à des représentations, afin de se figurer ces objets et de se convaincre qu'elles sont particulièrement adaptées à une étude fine des groupes localement compacts.

Dans un dernier temps, je décrirai quelques questions ouvertes qui motivent la thèse que je commencerai en septembre à l'ENS Lyon : elles concernent les algèbres de von Neumann associées aux représentations des groupes totalement discontinus : peu étudiés avant la dernière décennie, ils semblent pourtant proposer une approche fructueuse aux groupes localement compacts plus généraux.

L'exposé se veut essentiellement illustratif et on omettra ainsi les preuves, même faciles. Je me suis beaucoup appuyé sur [Fol95], qui démontre les résultats fondamentaux, et sur [BH19] qui rentre bien plus dans les détails, notamment en ce qui concerne les algèbres de von Neumann.

1 Représentations unitaires, espace dual et décomposition d'une représentation

Commençons par définir la notion centrale de cet exposé : elle s'attache à décrire comment un groupe topologique peut agir continûment sur un espace de Hilbert en préservant le produit scalaire. C'est une généralisation en dimension infinie des représentations linéaires des groupes finis, et de nombreuses définitions s'adaptent naturellement à ce cadre. On suppose toujours que les groupes étudiés sont localement compacts, ce qui nous permet de définir la mesure de Haar sans laquelle la théorie ne peut pas être développée. Dans ce texte, on supposera de plus que la topologie de G est à base dénombrable, afin de s'épargner des difficultés liées à la cardinalité ; cela nous permet notamment de se limiter aux représentations dans des espaces de Hilbert séparables.

Définition 1.1. *Soit G un groupe localement compact, à base dénombrable.*

1. *Une* représentation unitaire *de G est un couple $(\pi, \mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ un morphisme de groupe continu lorsqu'on munit $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ de la topologie forte des opérateurs.*
2. *Deux représentations $(\pi, \mathcal{H})$ et $(\rho, \mathcal{K})$ sont dites (unitairement) équivalentes s'il existe un opérateur unitaire $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\rho$ tel que $\forall g \in G, U\pi(g) = \rho(g)U$. On écrit $\pi \simeq \rho$.*
3. *Si V est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}_\pi$ qui est $\pi(G)$-invariant, on dit que $(\pi_{|V}, V)$ est une sous-représentation de $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$, et on note $\pi_{|V} \leq \pi$. Dans ce cas, $\pi = \pi_V \oplus \pi_{V^\perp}$*
4. *Une représentation $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est dite* irréductible *si $\mathcal{H}_\pi \neq \{0\}$ et si les seuls sous-espaces fermés $\pi(G)$-invariants de $\mathcal{H}_\pi$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{H}_\pi$.*

Exemples.

1. Représentation triviale. *C'est la représentation $(1_\mathcal{H}, \mathbb{C})$, où $1_\mathcal{H}$ est le morphisme trivial. Il ne se passe rien...*
2. Représentation régulière gauche. *C'est la représentation la plus importante. Notons μ_G une mesure de Haar sur G. On définit la représentation régulière gauche $\lambda_G : G \mapsto \mathcal{U}(L^2(G, \mu_G))$ en posant*
$$\forall g, h \in G, \varphi \in L^2(G) \;\; (\lambda_G(g)\varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$$
3. Représentations de Koopman. *On peut construire des représentations unitaires de G d'origine géométrique en considérant des actions de groupes de G sur un espace mesuré (X, μ). Si l'application naturelle $G \times X \to X$ est mesurable, et si pour tout $g \in G$, les mesures μ et $g_*\nu$ sont équivalentes, alors l'application $\kappa_\nu : G \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(X, \mu))$ définie, pour $g \in G$, $\xi \in L^2(X, \mu)$, $x \in X$ par*
$$(\kappa_\nu(g)\xi)(x) \coloneqq \sqrt{\frac{dg_*\nu}{\nu}(x)}\xi(g^{-1}(x))$$
définit un morphisme de groupe. Sous de bonnes hypothèses topologiques sur G et sur X, ce morphisme est continu pour la topologie forte et κ_ν définit une représentation de G, dite représentation de Koopmann associée à l'action de G sur X.

Lemme 1.2 (Lemme de Schur)**.** *Soit G un groupe localement compact et $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G, V un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Notons $P_V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la projection orthogonale sur V, et $\pi(G)' \coloneqq \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall g \in G, T\pi(g) = \pi(g)T\}$ le commutant de $\pi(G)$.*

1. *V est $\pi(G)$-invariant (et définit donc une sous-représentation de π) si et seulement si $P_V \in \pi(G)'$.*
2. *Une représentation $(\pi, \mathcal{H})$ est irréductible si et seulement si $\pi(G)' = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_\mathcal{H}$.*

Ce lemme fondamental met en avant l'importance du *commutant* de $\pi(G)$. C'est un exemple d'*algèbre de von Neumann* :

Définition 1.3. *Soit M une sous-$*$-algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H. On dit que M est une* algèbre de von Neumann *si*
$$M = M''$$

On remarque aussi qu'une algèbre de von Neumann est une sous-$*$-algèbre unifère de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ fermée pour la topologie forte des opérateurs. En fait, le théorème suivant nous dit que cette propriété caractérise les algèbres de von Neumann.

Théorème 1.4 (Théorème du bicommutant de von Neumann)**.** *Soit M une sous-$*$-algèbre unifère de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $M = M''$

2. M est fermé pour la topologie forte des opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

L'étude des représentations d'un groupe localement compact G comprend plusieurs pans complémentaires.

1. Décrire l'ensemble des représentations irréductibles de G à équivalence près, sous la forme du *dual unitaire* de G :

$$\widehat{G} := \{\text{Représentations unitaires irréductibles de G}\}/\{\text{Équivalence unitaire}\}$$

2. Déterminer comment les représentations unitaires de G peuvent se décomposer en représentations irréductibles.
3. Expliciter cette décomposition pour des représentations unitaires spécifiques, et en particulier pour la représentation régulière gauche λ_G : dans ce cas, on appelle cette décomposition *formule de Plancherel.*

Dans cet exposé, nous rajouterons la question suivante :

4. Étudier l'algèbre de von Neumann $L(\pi) := \pi(G)''$.

C'est une question naturelle, étant donné le lemme de Schur. Ainsi, ces algèbres naturellement associées aux représentations permettent souvent de prendre du recul sur les trois questions précédentes. Mais elles autorisent aussi l'utilisation de méthodes puissantes propres aux algèbres d'opérateurs pour étudier certaines situations dégénérées où les réponses de théorie des groupes aux trois premières questions ne sont pas satisfaisantes.

2 Groupes localement compacts abéliens

Soit G un groupe localement compact abélien à base dénombrable.

2.1 Caractères, dual de Pontryagin

Les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont unidimensionnelles : c'est une conséquence simple du lemme de Schur. Le dual unitaire de $\widehat{G}$ s'identifie alors à l'ensemble des morphismes de groupes continus de G dans $\mathbb{U}$, aussi appelés *caractères* de G. L'ensemble de ces caractères est naturellement muni d'une structure de groupe (pour la multiplication point par point) topologique (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact) localement compact et à base dénombrable. On appelle ce groupe topologique *dual de Pontryagin* de G. Le terme « dual » trouve ici sa justification historique, puisque le groupe G est canoniquement isomorphe à son bidual de Pontryagin $\widehat{\widehat{G}}$. Enfin, ce dual est naturellement muni de sa tribu borélienne, sur laquelle on peut considérer la mesure de Haar $\mu_{\widehat{G}}$. Quelques exemples : $\widehat{\mathbb{Z}^n} = \mathbb{S}^n$, $\widehat{\mathbb{S}^n} = \mathbb{Z}^n$, $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$.

2.2 Représentations canoniques

Soit μ une mesure de radon sur $\widehat{G}$. On appelle *représentation canonique associée à μ* la représentation $\pi_\mu : G \to \mathcal{U}(L^2(\widehat{G}), \mu)$ définie par

$$\forall g \in G, \forall f \in L^2(\widehat{G}, \mu), \forall \chi \in \widehat{G}, (\pi_\mu(g)f)(\chi) = \chi(g)f(\chi)$$

Appuyons sur les points suivants : si μ et ν sont deux mesures de Radon équivalentes sur $\widehat{G}$, les deux mesures canoniques associées sont unitairement équivalentes. À l'inverse, si ces mesures sont disjointes, les représentations canoniques associées sont *disjointes* : aucune représentation de G n'est contenue à la fois dans π_μ et dans π_ν. Enfin, si μ n'a pas d'atomes, π_μ ne contient pas de sous-représentation irréductibles... mais n'est pas irréductible pour autant. Ainsi, si $(\mu_i)_{i\geq 0}$ est une suite de mesures non équivalentes sur $\widehat{G}$ telles que pour tout i, μ_i est absolument continue par rapport à μ_{i-1}, la représentation π_{μ_1} contient π_{μ_2} qui contient π_{μ_3} etc...

Soit π une représentation unitaire de G. Il existe alors une suite (possiblement finie) de mesures $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que π est équivalente à la somme directe $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \pi_{\mu_k}$. On peut préciser un peu ce théorème afin d'obtenir une décomposition canonique des représentations de G en représentations canoniques. Considérons pour $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ la représentation $(n\pi, \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}) := (\underbrace{\pi \oplus \pi \oplus ... \oplus \pi}_{\text{n fois}}, \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H})$

On isole alors les parties de $\widehat{G}$ qui apparaissent dans π avec une multiplicité donnée, et on obtient :

Proposition 2.1. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, et $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de G. Alors il existe une unique partie $I \subset \overline{\mathbb{N}*} = \{1, 2, ...\infty\}$ et une unique suite (éventuellement finie) $\{[\rho_k]\}_{(k\in I)}$ de classes d'équivalences de représentations sans multiplicités deux à deux disjointes telles que pour tout choix de représentation $\pi_k \in [\rho_k]$, on ait :*

$$\pi \simeq \bigoplus_{k\in I} k\pi_k$$

2.3 Formule de Plancherel et transformée de Fourier

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(G, \mu_G) \to L^2(\widehat{G}, \mu_{\widehat{G}})$ définie pour $f \in L^1(G)\cap L^2(G)$ et $\chi \in \widehat{G}$ par

$$(\mathcal{F}f)(\chi) = \int_G \overline{\chi(g)} f(g) d\mu_G$$

s'étend en un opérateur unitaire de $L^2(G, \mu_G)$ dans $L^2(\widehat{G}, \mu_{\widehat{G}})$. Elle entrelace la représentation régulière gauche de G et la représentation canonique $\pi_{\mu_{\hat{G}}}$ associée à la mesure de Haar sur $\widehat{G}$.

Ainsi, toutes les représentations irréductibles de G appartiennent au support de la mesure définissant la représentation régulière gauche, toutes avec une multiplicité 1. Néanmoins, aucune de ces dernière n'est contenue dans λ_G si la mesure de Haar de $\widehat{G}$ n'a pas d'atome (par exemple si $G = \mathbb{R}$).

2.4 Algèbres de von Neumann commutatives

Pour toute représentation unitaire π de G, il est clair que $L(\pi)$ est une sous-algèbre de von Neumann commutative de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Or, toute algèbre de von Neumann commutative est isomorphe [1] à une algèbre de la forme $L^\infty(X, \mu) \subset L^2(X, \mu)$: c'est ce résultat qui mène parfois les mathématiciens à considérer la théorie des algèbres de von Neumann comme une théorie de la mesure non commutative.

Dans le cas des groupes abéliens, cet isomorphisme est d'ailleurs facile à trouver : si $\pi \simeq \bigoplus_{k\in I} k\pi_k$ (les mesures étant mutuellement singulières), $L(\pi) \simeq L^\infty(\widehat{G}, \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mu_k)$. Remarquons à ce sujet qu'au point de vue algébrique, les algèbres de von Neumann ne retiennent pas la multiplicité d'une représentation : $L(k\pi) \simeq L(\pi)$.

On peut aussi montrer que le commutant de $L^\infty(X, \mu)$ est très exactement $L^\infty(X, \mu)$ lui-même : il est en particulier abélien.

3 Groupes compacts

Considérons maintenant G un groupe topologique compact. Remarquons d'ailleurs que cette situation, comprise par Peter et Weyl dans les années 20, généralise la théorie des représentations des groupes finis développée par Schur, Frobenius, Burnside et Noether au début du XX[e] siècle.

1. Un isomorphisme d'algèbre de von Neumann est simplement un isomorphisme des algèbres sous-jacentes.

3.1 Espace dual d'un groupe compact : Peter-Weyl (1)

Contrairement au cas abélien, les groupes compacts admettent des représentations irréductibles de dimensions plus grandes que 1 (c'est déjà le cas pour les groupes finis). Néanmoins, les représentations irréductibles d'un groupe compact sont toutes de dimension finie, et on montre que $\widehat{G}$ est dénombrable. En effet, Peter et Weil montrent en 1927 [PW27] que l'ensemble dénombrable des coefficients matriciaux (associés à des bases orthonormales) des représentations irréductibles de G forme une base orthonormale de $L^2(G)$, espace de Hilbert séparable. Aussi, on munit naturellement $\widehat{G}$ de la topologie discrète.

3.2 Complète réductibilité : Peter-Weyl (2)

Le comportement des représentation unitaires d'un groupe compact généralise encore une fois celui des représentation des groupes finis. Ainsi, toute représentation unitaire π de G est unitairement équivalente à une somme directe de représentations irréductibles : $\pi \simeq \bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{G}} n_\sigma \sigma$. Il y a unicité d'une telle décomposition.

3.3 Représentation régulière des groupes compacts : Peter-Weyl (3)

Toujours dans le même article, Weyl et Peter calculent la multiplicité de chaque représentation irréductible de G dans la représentation régulière de G. Notons d_σ la dimension de l'espace de Hilbert de la représentation σ. Alors

$$\lambda_G \simeq \bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{G}} d_\sigma \sigma$$

Ici, toutes les représentations irréductibles de G sont contenues dans la décomposition canonique de λ_G.

3.4 Facteurs

Si $(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ est une représentation irréductible de G, le lemme de Schur affirme que $\sigma(G)' = \mathbb{C}$. Ainsi, $L(\sigma) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{M}_{d_\sigma}(\mathbb{C})$. Les algèbres de von Neumann $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ont la particularité d'avoir un centre trivial : on dit que ce sont des *facteurs*. Les facteurs sont ainsi les algèbres de von Neumann les moins commutatives qui soient, et s'opposent en un sens aux algèbres de von Neumann commutatives.

Le théorème de décomposition canonique énoncé ci-dessus nous permet de décrire $L(\pi)$ pour toute représentation de G. Si $\pi \simeq \bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{G}} n_\sigma \sigma$, alors

$$L(\pi) \simeq \bigoplus_{\{\sigma \mid n_\sigma \neq 0\}} \mathcal{M}_{d_\sigma}(\mathbb{C})$$

Encore une fois, passer aux algèbres de von Neumann ne prend pas en compte les multiplicités. Remarquons aussi que $L(\pi)$ est à nouveau isomorphe à une algèbre de von Neumann dont le commutant est abélien.

4 Groupes non compacts non abéliens

Dans cette partie, nous allons tenter de généraliser les résultats précédents à des groupes localement compacts plus généraux. Nous illustrerons les résultats à partir de deux groupes non compacts non abéliens. Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_3(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & \xi \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, \xi \in \mathbb{C} \right\}$ dont on notera simplement les éléments (a, b, ξ), et le groupe libre à deux éléments $\mathbb{F}_2$.

Les représentations des groupes de Heisenberg ont été étudiées et comprises par Weil, Stone et von Neumann, tandis qu'on doit à von Neumann et Murray les premières constatations sur celles des groupes libres.

Nous verrons que ces exemples posent pas mal de questions que nous ne faisons que lister dans cette partie : on y répondra dans la section suivante.

4.1 Représentations irréductibles et factorielles

Définissons avant tout une nouvelle classe de représentations unitaires, déjà aperçues précédemment.

Définition 4.1 (Représentations factorielles)**.** *On dit qu'une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ est factorielle si et seulement si pour toute décomposition $\pi = \rho_1 \oplus \rho_2$, ρ_1 et ρ_2 ne sont pas disjointes.*

Les choses sont bien faites : $(\pi, \mathcal{H})$ est factorielle si et seulement si l'algèbre de von Neumann $L(\pi)$ est factorielle.

Comme on l'a rappelé ci-dessus, les multiples de représentations irréductibles sont factorielles ; et pour les groupes compacts ou abélien, ce sont clairement les seules. Qu'en est-il pour le groupe de Heisenberg, pour le groupe libre ?

Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_3$.

Soit $h \neq 0$. On définit une représentation de ρ_h de $\mathbb{H}_3$ dans $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}))$ en posant, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$[\rho_h(a, b, \xi)f](y) = e^{2i\pi h\xi} e^{i\pi hba} e^{-2i\pi hby} f(y - x)$$

Théorème 4.2 (Théorème de Stone-von Neumann, [Neu32])**.**

1. *Les représentations ρ_h pour $h \neq 0$ sont irréductibles et deux à deux disjointes.*
2. *Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de $\mathbb{H}_3$ telle que $\pi(0, 0, t) = e^{2i\pi ht} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ avec $h \neq 0$. Alors $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_\alpha$ où les $\mathcal{H}_\alpha$ sont mutuellement orthogonaux, invariants sous l'action de $\pi(\mathbb{H}_3)$ et tels que pour tout α, $\pi_{\mathcal{H}_\alpha} \simeq \rho_h$. En particulier, si π est irréductible, $\pi \simeq \rho_h$.*

On en déduit l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathbb{H}_3$, puisqu'il n'y a plus qu'à déterminer celles qui sont nulles le centre de $\mathbb{H}_3$. Elles passent au quotient et nous ramènent à la détermination des représentations irréductibles de $\mathbb{R}^2$: ce sont les $\pi_{\alpha,\beta} : \mathbb{H}_3 \to \mathbb{U}$, avec $\pi_{\alpha,\beta}(a, b, t) = e^{2i\pi\alpha a} e^{2i\pi\beta b}$.

Ainsi, $\widehat{\mathbb{H}_3} = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^*$, et contient des représentations irréductibles de dimension infinie.

D'autre part, le second point du théorème de Stone-von Neumann dit que toute représentation factorielle de $\mathbb{H}_3$, non nulle sur le centre de $\mathbb{H}_3$ est un multiple d'une représentation ρ_h. En se ramenant aux représentations de $\mathbb{R}^2$ pour les représentations factorielles nulles sur le centre, on observe que pour le groupe de Heisenberg -comme pour les groupes compacts ou abéliens-, *les représentations factorielles sont les multiples des représentations irréductibles de $\mathbb{H}_3$.*

Le groupes libre $\mathbb{F}_2$.

Le groupe libre $\mathbb{F}_2$, au contraire, admet des représentations factorielles d'un tout autre type. Les résultats de cette section viennent d'une suite de papiers [MN43] de Murray et von Neumann publiés au tournant des années 40, qui fondent entre autre la théorie des algèbres de von Neumann (alors appelés anneaux d'opérateurs). On renvoie à [BH19] pour les démonstrations (très accessibles !).

Théorème 4.3. *La représentation régulière gauche de $\mathbb{F}_2$ est factorielle.* [2]

Théorème 4.4. *Soit Γ un groupe dénombrable discret. Alors λ_Γ contient une sous représentation irréductible si et seulement si Γ est un groupe fini.*

On observe ainsi un premier phénomène très intéressant concernant les représentations unitaires de $\mathbb{F}_2$: l'existence de représentations factorielles autres que des multiples de représentations irréductibles. Du point de vue des algèbres de von Neumann, on vient de construire un facteur qui n'est pas isomorphe à un $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Question : Peut-on identifier les groupes pour lesquels les représentations factorielles sont exactement les multiples des représentations irréductibles ?

2. Ce résultat est en fait plus général : la représentation régulière d'un groupe discret est factorielle si et seulement si les classes de conjugaison non triviales du groupe sont infinies

4.2 Topologie de Fell et structure mesurable de Mackey

Revenons sur le dual unitaire $\widehat{G}$. Dans le cas des groupes abéliens, on a muni ce dual d'une structure topologique issue d'une notion de convergence sur les fonctions sur G ; tandis que la dénombrabilité du dual d'un groupe compact imposait la topologie discrète. Dans le cas général, il est important de pouvoir topologiser $\widehat{G}$, et de le munir d'une structure mesurable.

La bonne topologie à définir sur $\widehat{G}$ est la *topologie de Fell* : selon le point de vue, on peut la construire comme la topologie faible étoile restreinte à certaines fonctions induites par les représentations irréductibles ou comme topologie de Jacobson associée aux idéaux d'une certaine algèbre naturellement associée à G. Elle redonne les topologies naturelles sur les duals unitaires des groupes abéliens et compact. On peut ensuite considérer la tribu borélienne associée à cette topologie, dite structure mesurable de Fell.

Néanmoins, il existe une autre construction de structure mesurable parfois plus naturelle : la structure mesurable de Mackey. C'est la tribu la moins fine rendant mesurable les coefficients matriciaux des représentations irréductibles.

Question : Quand-est-ce que les structures mesurables de Mackey et de Fell coïncident-elles ?

Pour le moment munissons simplement $\widehat{G}$ de la topologie de Fell et de la structure mesurable de Mackey.

Indiquons enfin quelle est la topologie de Fell sur $\widehat{\mathbb{H}_3} = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^*$: en restriction à $\mathbb{R}^2$ et à $\mathbb{R}^*$, c'est la topologie euclidienne standard. Par contre, une suite de points dans $\mathbb{R}^*$ qui tend vers 0 au sens usuel tend simultanément vers tous les points de $\mathbb{R}^2$ dans la topologie de Fell : elle n'est pas séparée.

Question : Que dire des propriétés de séparation de la topologie de Fell sur $\widehat{G}$. Sous quelles conditions est-elle T_1 ? T_2 Séparée ?

4.3 Intégrales directes et désintégration en irréductibles

Le dual unitaire $\widehat{G}$ muni de la structure mesurable de Mackey permet de générer de nombreuses représentations non irréductibles. Soit μ une mesure sur $\widehat{G}$; on peut définir une représentation

$$\left(\int_{\widehat{G}}^{\oplus} \sigma d\mu(\sigma)\right) : G \to \mathcal{U}\left(\int_{\widehat{G}}^{\oplus} H_\sigma d\mu(\sigma)\right)$$

Plus généralement, on peut définir des champs de représentations irréductibles au dessus d'un espace mesurable X : ce sont des applications mesurables $X \ni x \mapsto \pi_x \in \widehat{G}$. Ainsi, on donne un sens à la représentation $\int_X^{\oplus} \pi_x d\mu(x)$ pour μ une mesure sur X.

Qu'importe la description exacte (et pénible) des intégrales directes qu'on utilise ici ; disons simplement que la représentation $\int_{\widehat{G}}^{\oplus} \chi d\mu(\chi)$ ne dépend (à équivalence unitaire près) que de la classe de la mesure μ, laquelle détermine quelles représentations irréductibles de $\widehat{G}$ sont prises en compte par $\int_{\widehat{G}}^{\oplus} \chi d\mu(\chi)$. Ainsi, si $\mu = \delta_{\chi_1} + \delta_{\chi_2} + ... + \delta_{\chi_n}$, les χ_i étant deux à deux non-équivalentes, alors $\int_{\widehat{G}}^{\oplus} \chi d\mu(\chi) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \chi_i$. Si G est un groupe abélien, μ une mesure sur $\widehat{G}$, alors $\int_{\widehat{G}}^{\oplus} H_\chi d\mu(\chi) = L^2(\widehat{G}, \mu)$ et $\int_{\widehat{G}}^{\oplus} \chi d\mu(\chi) = \pi_\mu$.

On retrouve alors un théorème semblable à celui décomposant les représentations irréductibles des groupes localement compacts abéliens :

Théorème 4.5. *Soit G un groupe localement compact, $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G. Alors il existe un espace borélien standard X, une mesure σ-finie μ sur X, un champ mesurable de représentations irréductibles $x \mapsto (\pi_x, \mathcal{H}_x)$ telles que*

$$\pi \simeq \int_X^{\oplus} \pi_x d\mu(x)$$

Nous avons donné un exemple explicite de telle décomposition dans la partie sur les groupes abéliens : si G est abélien, $\lambda_G \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \chi d\mu_{\widehat{G}}(\chi)$. La décompposition de la représentation régulière des groupes compacts que nous avons donné s'exprime aussi de cette façon.

La question de l'unicité de cette décomposition est quant à elle bien plus délicate. Ainsi, la représentation régulière du groupe libre $\mathbb{F}_2$ admet deux décompositions en irréductibles $\lambda_{\mathbb{F}_2} \simeq$

$\int_X^\oplus \pi_x d\mu(x) \simeq \int_Y^\oplus \sigma_y d\nu(y)$ telles que pour tout couple $(x,y) \in X \times Y$, π_x et σ_y sont non-équivalentes.

Question : Quelles sont les représentations qui admettent une unique désintégration en représentation irréductible ? Pour quels groupes est-ce le cas de toutes les représentations ?

5 Groupes de type I

Les nombreuses questions posées ci-dessus trouvent leurs réponses dans la notion de groupe de type I. Nous allons voir que les groupes de type I sont exactement les groupes sur lesquels on peut étudier les représentations unitaires de manière « classique ». Pour les autres, les questions 1), 2) et 3) du début de cet exposé n'admettent pas de réponse satisfaisante.

5.1 Définition

Définition 5.1 (Groupe de type I)**.** *Un groupe est de type I si toutes ses représentations factorielles sont multiples de représentations irréductibles.*

Ainsi, les groupes compacts ou abéliens sont de type I, de même que le groupe de Heisenberg. Les groupes libres (et plus généralement les groupes discrets à classes de conjugaison infinie) ne sont pas de type I. C'est généralement une question centrale - mais très difficile - que de déterminer si un groupe donné est de type I, puisqu'il faut comprendre toutes ses représentations factorielles et irréductibles. Notons enfin qu'on peut généraliser cette notion aux groupes qui ne sont pas à base dénombrable, mais la théorie s'en trouve notablement compliquée.

5.2 Théorème de Glimm

Le théorème suivant répond à la plupart des questions soulevées précédemment.

Théorème 5.2 (Glimm, [Gli61])**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est de type I.*
2. *La topologie de Fell sur $\widehat{G}$ est T_0.*
3. *Les structures mesurables de Fell et de Mackey sur $\widehat{G}$ coïncident.*
4. *La structure mesurable de Mackey sur $\widehat{G}$ est dénombrablement séparée.*
5. *La structure mesurable de Mackey sur $\widehat{G}$ est standard.*
6. *Pour tout couple de désintégration d'une représentation $\pi = \int_X^\oplus \pi_x d\mu(x) = \int_Y^\oplus \sigma_y d\nu(y)$, alors $\{\pi_x \mid x \in X\} = \{\sigma_y \mid y \in Y\}$ (à des ensembles de mesure nulle près)*[3]

On ne peut ainsi généralement pas décrire le dual unitaire d'un groupe qui n'est pas de type I, et la notion de désintégration d'une représentation n'y exprime pas grand chose. À l'inverse, on peut essentiellement généraliser l'analyse harmonique abstraite aux groupes de type I : la notion de mesure de Plancherel y aura un sens, celle de transformée de Fourier aussi. Reste qu'il faut-être prudent : le dual d'un groupe, même de type I, est la plupart du temps très difficile à décrire.

Nous pouvons préciser un peu nos résultats concernant la topologie de l'espace $\widehat{G}$: on dit d'un groupe de type I qu'il est CCR si $\widehat{G}$ vérifie la propriété de séparation T_1. Les groupes pour lesquels la topologie de Fell sur $\widehat{G}$ est séparée sont exactement les groupes moyennables. On dit que le groupe G a *la propriété (T) de Kazhdan* si la représentation triviale 1_G est isolé dans $\widehat{G}$: l'étude de cette propriété (de même que celle de la moyennabilité) est incroyablement fertile (voir [BHV08]).

3. Cette caractérisation ne fait pas à proprement parler du théorème de Glimm, et est due à Dixmier

5.3 Décomposition canonique des groupes de type I

Définissons les représentations

$$\pi_{I,([\mu_k])_{k\in I}} := \bigoplus_{k\in I\subset\mathbb{N}\cup\{\infty\}} k\int_{\widehat{G}}^{\oplus} \chi d\mu_k(\chi)$$

en imposant aux classes de mesures $[\mu_i]$ d'être mutuellement disjointes. Le théorème suivant généralise la proposition 2.1 aux groupes de type I.

Théorème 5.3 (Décomposition canonique des représentations de type I)**.** *Si π est une représentation unitaire d'un groupe de type I, il existe une unique partie $I \subset \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ et une unique famille de classes de mesures $([\mu_i])_{i\in I}$ telle que $\pi \simeq \pi_{I,([\mu_i])_{i\in I}}$. On appelle cette décomposition* décomposition canonique d'une représentation de type I.

Les descriptions que nous avons donné des représentations régulières des groupes compacts et abéliens sont les décompositions canoniques de ces dernières : elles mettent néanmoins en avant une mesure particulière sur $\widehat{G}$, et pas seulement une classe de mesure (ni une suite de telles classes). On peut faire de même pour les groupes de type I, et construire définir ainsi la *mesure de plancherel* $\mu_{\mathcal{P}}$ sur $\widehat{G}$, laquelle appartient à la classe de $\sum_{i\in I}\mu_i$. C'est l'unique mesure sur $\widehat{G}$ qui permet à la « transformée de fourier généralisée » d'entrelacer unitairement, $(\lambda_G, L^2(G))$ et $\left(\int_{\widehat{G}}^{\oplus}\sigma d\mu_{\mathcal{P}}(\sigma), \int_{\widehat{G}}^{\oplus}\mathcal{H}_\sigma d\mu_{\mathcal{P}}(\sigma)\right)$.

Ainsi la mesure de plancherel sur $\widehat{\mathbb{H}_3} = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^*$ est supportée par $\mathbb{R}^*$; elle vaut $d\mu_{\mathcal{P}}(\rho_h) =\mid h \mid dh$.

5.4 Exemples

Un travail mathématique considérable pendant la seconde moitié du XX^e siècle a consisté à identifier des groupes de type I, à décrire aussi précisément que possible leurs duals unitaires et à calculer leurs mesures de Plancherel.

Proposition 5.4. *Les groupes des familles suivantes sont de type I :*

1. *Les groupes de Lie connexes semi-simples (comme $SL_n(\mathbb{R})$).*
2. *Certaines classes de groupes de Lie résolubles connexes (pas tous !).*
3. *Les groupes de Lie connexes nilpotents (comme les groupes de Heisenberg $\mathbb{H}_n$).*
4. *Les groupes algébriques réductifs au dessus d'un corps local.*
5. *Les groupes discrets virtuellement abéliens sont exactement les groupes discrets de type I.*
6. *Le groupe* $\mathrm{Aut}(\mathrm{T}_d)$ *des automorphismes d'un arbre régulier.*

L'affirmation 1) est due à Harish-Chandra, de même qu'un travail considérable sur les représentations unitaires de ces groupes : il obtient ainsi en 1969 la formule de Plancherel pour ces groupes. Remarquons qu'on ne sait néanmoins toujours pas décrire intégralement le dual unitaire de tous les groupes de Lie semi-simple (mais on a assez de représentations unitaires pour obtenir la formule de Plancherel). Il existe des groupes connexes résolubles qui ne sont pas de type I, mais on sait identifier certains critères permettant de s'assurer que ce n'est pas le cas. Auslander et Kostant classifient par la suite les représentations irréductibles des groupes résolubles de type I. Ce sont Dixmier et Kirillov qui montrent 3), et Kirillov décrit le dual de ces groupes et obtient leurs formules de Plancherel. L'affirmation 5) est le théorème de Thoma, démontré dans [Tho68]. Enfin, la dernière affirmation est due à Olshansky : notons que $\mathrm{Aut}(\mathrm{T})$ est un groupe localement compact à base dénombrable totalement discontinu, et pourtant de type I.

5.5 Algèbres de von Neumann de type I

On termine cette section en définissant une algèbre de von Neumann de type I. Si p est une projection d'une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$, son *support central* est la plus petite projection q de $\mathcal{M}\cap\mathcal{M}'$ telle que $qp = p$.

Définition 5.5. *Une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ est dite de type I si une des deux conditions équivalente suivante est vérifiée :*

— *$\mathcal{M}$ est isomorphe à une algèbre de von Neumann dont le commutant est abélien.*
— *Il existe une projection p dans M dont le support central est* Id *telle que pMp est abélienne (on dit que p est une projection abélienne).*

Ainsi, les algèbres de von Neumann associées à des groupes abéliens sont de type I puisqu'elles ont un commutant abélien. De même, nous avons mentionné le fait que les algèbres de von Neumann de représentations de groupes compacts sont isomorphes à des algèbres de von Neumann de la forme $\bigoplus_{I\subset\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ où $\mathcal{H}_k$ est un espace de Hilbert de dimension k ont un commutant abélien : ce sont des algèbres de von Neumann de type I. Les choses étant bien faites :

Théorème 5.6. *Soit G un groupe localement compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est de type I.*
2. *Pour toute représentation π de G, l'algèbre de von Neumann $L(\pi)$ est de type I.*
3. *Pour toute représentation π de G, l'algèbre de von Neumann $L(\pi)'$ est de type I.*
4. *Pour toute représentation factorielle π de G, le facteur $L(\pi)$ est de la forme $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Ce théorème permet de raffiner la notion de type I : on dit ainsi qu'une représentation π d'un groupe G est de type I si $L(\pi)$ est une algèbre de von Neumann de type I.

La notion d'algèbre de von Neumann de type I n'est en fait que le début d'une classification en type de toutes les algèbres de von Neumann. Ainsi, Murray et von Neumann classifient les facteurs : sans détailler tous les termes utilisés, disons qu'un poids normal est la généralisation non-commutative de la notion de mesure régulière aux espaces « mesurables non-commutatifs » que sont les algèbres de von Neumann. Deux projections p et q d'une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ sont équivalentes s'il existe $u \in \mathcal{M}$ tel que $p = u^*u$ et $q = uu^*$.

Théorème 5.7 (Classification des facteurs)**.** *Soit M un facteur séparable. Alors il existe un unique poids normal φ sur M (à multiplication par un scalaire positif près) tel que pour tout couple de projections équivalentes p et q, $\varphi(p) = \varphi(q)$. À normalisation près, l'image de l'ensemble des projections de M par φ coïncide avec un des ensembles suivants : $\{0, 1, 2..., n\}$, $\{0, 1, 2..., \infty\}$, $[0, 1]$, $[0, \infty]$ et $\{0, \infty\}$. On définit grâce à cette disjonction une classification des facteurs, dont on appelle les différentes classes* types *:*

$\varphi(\mathcal{P}(M))$	Type du facteur
$\{0, 1...n\}$	Type I_n
$\{0, 1, 2...\infty\}$	Type I_∞
$[0, 1]$	Type II_1
$[0, \infty]$	Type II_∞
$\{0, \infty\}$	Type III

Figure 1 – Classification des facteurs en types

L'unique facteur de type I_n est $M_n(\mathbb{C})$, et le poids correspondant est la trace matricielle. Le seul facteur de type I_∞ est $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ où H est un espace de Hilbert de dimension infinie (séparable). Sur un facteur de type II_1, le poids évoqué est en fait une trace, au sens où il vérifie $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ pour tout x, y dans le facteur. Ainsi, le facteur $L(\lambda_{\mathbb{F}_2})$ est un facteur de type II_1, dont la trace est provient de $Tr(x) = \langle x\delta_0, \delta_0\rangle$, prolongée par linéarité et continuité.

De manière similaire aux représentations, les algèbres de von Neumann se décomposent (canoniquement) en intégrales directes de facteurs. Les algèbres de von Neumann de type I sont alors exactement les intégrales directes de facteurs de type I. Elles sont isomorphes à un facteur de la forme $\bigoplus_{I\subset\mathbb{N}\cup\{\infty\}} L^\infty(X, \mu_k) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ où $\mathcal{H}_k$ est un espace de Hilbert de dimension k.

Examiner les algèbres de von Neumann associées à des représentations (et en particulier à la représentation régulière) permet donc d'en apprendre beaucoup sur ces dernières, et de là sur le groupe qui nous intéresse y compris s'il n'est pas de type I. La théorie des algèbres de von Neumann s'est considérablement développée depuis les articles fondateurs de Murray et von Neumann (qui contiennent déjà tout ce que nous avons dit des algèbres de von Neumann dans ce texte), comme théorie propre, mais aussi en interaction avec de nombreux autres domaines (jusqu'en théorie des nœuds). Pourtant, les facteurs restent des objets très mystérieux, et malgré des décennies de travail, la question fondamentale de savoir si $L(\lambda_{\mathbb{F}_2})$ et $L(\lambda_{\mathbb{F}_3})$ sont isomorphes n'est toujours pas résolue !

6 Groupes totalement discontinus

On sait reconnaître les groupes discrets de type I : ce sont les groupes virtuellement abélien (théorème de Thoma). On sait aussi déterminer quels sont les groupes discrets dont la représentation régulière est factorielle : ce sont ceux qui ont des classes de conjugaison non triviales infinies. Par contre, on est très loin de pouvoir en dire autant pour les groupes localement compact généraux. Une classe de groupes particulièrement intéressante à étudier pour aborder ces questions est celle des groupes totalement discontinus [CW21].

En effet, tout groupe localement compact G est une extension

$$1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \longrightarrow G/G_0 \longrightarrow 1$$

où G_0 est la composante connexe de l'identité de G : c'est un sous-groupe normal connexe fermé de G. Les groupes connexes peuvent être approximés par des groupes de Lie (c'est le théorème de Gleason-Yamabe), longuement étudiés au XX$^{\mathrm{e}}$ siècle. À l'inverse, les groupes totalement discontinus localement compacts (abrégé tdlc), tels que G/G_0 ont longtemps été délaissés par la recherche dès lors qu'ils n'étaient pas discrets. Or, comprendre les groupes localement compact généraux implique d'obtenir des résultats sur ces derniers, et depuis quelques années leur compréhension progresse rapidement.

Voici quelques exemples de groupes tdlc, en général non discrets :

1. Si T est un arbre localement fini, son groupe d'automorphisme $\mathrm{Aut}(T)$ est naturellement muni d'une structure topologique tdlc. Il en est de même de tout groupe qui agit proprement sur un arbre localement fini.
2. Les groupes profinis.
3. Étant donné un groupe discret Γ et $\Lambda < \Gamma$ un sous-groupe *presque normal*, l'étude de la paire (Γ, Λ) se ramène par la complétion de Schlichting [Sch80] à celle d'une paire $(\overline{\Gamma}, \overline{\Lambda})$, où $\overline{\Lambda}$ est un sous-groupe compact ouvert du groupe tdlc $\overline{\Gamma}$.
4. Certains groupes algébriques sur des corps locaux : $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ par exemple.

Le premier résultat de structure sur ces groupes est le théorème de van Dantzig (1930), qui affirme qu'un groupe tdlc admet un sous-groupe compact ouvert. Ce résultat permet notamment de faire agir tout groupe tdlc proprement par isométrie sur des graphes localement finis (appelés graphes de Cayley-Abels) : on peut donc étudier ces groupes par des méthodes géométriques. D'autre part, le théorème de van Dantzig permet de définir des projections très spécifiques dans l'algèbre de von Neumann associé à une représentation unitaire, obtenue via un processus de moyenne au dessus d'un sous-groupe compact ouvert : on les appelles *projections moyennantes.*

Si les algèbres d'opérateurs de représentations de groupes totalement discontinus restent encore largement incomprises, plusieurs résultats récents montrent qu'il est possible de les faire parler :

Théorème 6.1 ([CKM22]). *Soit* T *un arbre localement fini, et* $G \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{T})$ *un sous-groupe fermé non-moyennable de* $\mathrm{Aut}(\mathrm{T})$ *agissant minimalement sur* T. *Si* $L(\lambda_G)$ *est de type I, alors l'action de* G *sur le bord de* T *est* 2*-transitive.*

Ils obtiennent ainsi, par des méthodes de théorie géométrique des groupes et de théorie des représentations unitaires, des conséquences structurelles de la propriété de type I pour certains groupes tdlc hyperboliques.

Un autre article récent de Houdayer et Raum [HR19] que j'ai étudié pour mon mémoire de M2, s'intéresse quant à lui à la propriété de moyennabilité d'une algèbre de von Neumann associé à une représentation. Une algèbre de von Neumann $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dite *moyennable* s'il existe une projection de norme 1 (on dit espérance conditionnelle) $E : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{N}$. On sait que l'algèbre de von Neumann de la représentation régulière d'un groupe discret est moyennable si et seulement si ce groupe est moyennable. Mais on ne connaît pas de caractérisation de cette propriété pour les groupes localement compacts.

Théorème 6.2 ([HR19])**.** *Soit* T *un arbre localement fini, et* $G \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{T})$ *un sous-groupe fermé non-moyennable de* $\mathrm{Aut}(\mathrm{T})$ *agissant minimalement sur* T*. Si* $L(\lambda_G)$ *est moyennable, alors* G *agit localement 2-transitivement sur* T*.*

Ce théorème, démontré avec des méthodes propres aux algèbres d'opérateurs, leur permet de régler la question du type I pour une large classe de groupes agissant sur les arbres appelés groupes de Burger-Mozes.

Je chercherai dans ma thèse à aborder certaines des questions suivantes :

1. Trouver des critères de factorialité de $L(G)$ pour G tdlc. On ne connaît toujours pas de telles caractérisation pour les groupes agissant sur des arbres. Une première étape sera de transcrire les résultats de [HI16] concernant la factorialité de produits libres amalgamés d'algèbres de von Neumann aux algèbres de von Neumann de produits libres amalgamés de groupes. Par l'intermédiaire de la théorie de Bass-Serre ([Ser03]), on peut espérer obtenir des résultats convaincants sur les groupes qui agissent sur des arbres.
2. Étudier la question du type I pour ces groupes. Dans le cas des groupes qui agissent sur des arbres, Nebbia conjecture [Neb99] qu'un groupe agissant proprement sur un arbre est de type I s'il agit 2-transitivement sur le bord de cet arbre. L'article [CKM22] s'intéresse réciproquement aux conséquences structurelles de la propriété de type I : les auteurs conjecturent qu'un groupe localement compact de type I admet un sous-groupe cocompact moyennable.
3. S'intéresser à la question de la moyennabilité d'algèbres de von Neumann de groupes tdlc, comme dans [HR19]. La notion de moyennabilité d'une algèbre de von Neumann reflète celle de moyennabilité d'un groupe dans le cas discret, mais devient une propriété distincte pour les groupes non-discrets : c'est une notion particulièrement intéressante, car elle ne possède pas de traduction générale en terme de représentations unitaires. Là-aussi, il existe des conjectures élégantes : Monod conjecture ainsi qu'un groupe localement compact sans sous-groupe normal moyennable, mais admettant un sous-groupe cocompact moyennable possède une algèbre de von Neumann moyennable.

Références

[BH19] B. Bekka et P. de la Harpe. *Unitary representations of groups, duals, and characters.* 2019.

[BHV08] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette. *Kazhdan's Property (T).* New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2008.

[CKM22] P.E. Caprace, M. Kalantar et S. Monod. *A type I conjecture and boundary representations of hyperbolic groups.* 2022.

[CW21] P. E. Caprace et G. A. Willis. *A totally disconnected invitation to locally compact groups.* 2021.

[Dix69a] J. Dixmier. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien: algèbres de von Neumann.* Gauthier-Villars, 1969.

[Dix69b] J. Dixmier. *Les C*-algèbres et leurs représentations...* Gauthier-Villars, 1969.

[Fol95] G. B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis.* Studies in advanced mathematics. CRC Press, 1995.

[Gli61] J Glimm. « Type I C*-Algebras ». In : *Annals of Mathematics* (1961).

[HI16] C. Houdayer et Y. Isono. *Unique prime factorization and bicentralizer problem for a class of type III factors.* 2016.

[HR19] C. Houdayer et S. Raum. « Locally compact groups acting on trees, the type I conjecture and non-amenable von Neumann algebras ». In : *Commentarii Mathematici Helvetici* (2019).

[MN43] F. J. Murray et J. v. Neumann. « On Rings of OperatorsI,II,III,IV ». In : *The Annals of Mathematics* (1936-1943).

[Neb99] C. Nebbia. « Groups of Isometries of a Tree and the CCR Property ». In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* (1999).

[Neu32] J.v. Neumann. « Uber Einen Satz Von Herrn M. H. Stone ». In : *Annals of Mathematics* (1932).

[PW27] F. Peter et H. Weyl. « Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe ». In : *Mathematische Annalen* 97 (1927), p. 737-755.

[Sch80] G. Schlichting. « Operationen mit periodischen Stabilisatoren ». In : *Archiv der Mathematik* (1980).

[Ser03] J-P. Serre. *Trees.* Springer, 2003.

[Tak79] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras.* Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer New York, 1979.

[Tho68] E. Thoma. « Eine Charakterisierung diskreter Gruppen vom Typ I. » In : *Inventiones mathematicae* (1968).