Introduction au Domaine de Recherche Quelques modèles d'animaux gourmands

Julien Verges

15 mai 2022

Résumé

Etant donnés une répartition aléatoire de masses sur les sommets de $\mathbb{Z}^d$, on s'intéresse aux propriétés de certains processus définis comme la masse maximale d'une partie connexe – un *animal* – qui vérifie certaines contraintes, ainsi qu'aux propriétés de celles qui réalisent ce maximum – les *animaux gourmands*. Ces objets trouvent leur intérêt en *percolation de premier passage*, c'est-à-dire pour l'étude de distance aléatoires sur un $\mathbb{Z}^d$ construites en attribuant un temps de passage aléatoire sur chaque arête.

Table des matières

1 Présentation des modèles

1.1 Animaux gourmands discrets

Le modèle présenté ici est dû à Cox, Gandolfi, Griffin et Kesten [3]. Soit $d \geq 2$ un entier. Dans la suite, on munit $\mathbb{Z}^d$ d'une structure de graphe dans laquelle les points x et y sont voisins si et seulement si leur distance euclidienne est exactement 1. On appelle *animal discret* une partie connexe finie de $\mathbb{Z}^d$ et on note $\mathcal{A}(n)$ l'ensemble des animaux discrets de taille n qui contiennent l'origine.

Soit $(X_v)_{v\in\mathbb{Z}^d}$ une famille de variables i.i.d. positives, de loi μ. On voit ces variables comme des masses placées sur chaque point de $\mathbb{Z}^d$. On appelle *masse* d'un animal discret ξ la quantité

$$S(\xi) \coloneqq \sum_{v\in\xi} X_v, \tag{1.1}$$

c'est-à-dire la somme des masses de ses points.

On définit un processus stochastique $(N(n))_{n\geq 1}$ en posant

$$N(n) \coloneqq \max_{\xi\in\mathcal{A}(n)} S(\xi). \tag{1.2}$$

Les animaux $\xi \in \mathcal{A}(n)$ qui réalisent le maximum dans (1.2) sont appelés *animaux gourmands* de taille n.

Le processus $(N(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une loi des grands nombres sous une bonne hypothèse d'intégrabilité [3, 6].

Théorème 1.1 (Cox-Gandolfi-Griffin-Kesten 93, Gandolfi-Kesten 94)—

- Si $\mathbb{E}\left[X_0^d\right] = \infty$, alors
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = \infty. \tag{1.3}$$
- S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\mathbb{E}\left[X_0^d(\log^+ X_0)^{d+\varepsilon}\right] < \infty, \tag{1.4}$$
alors il existe une constante finie N telle que
$$\frac{N(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps et } \mathrm{L}^1} N. \tag{1.5}$$

Martin [12] a prouvé la même convergence sous l'hypothèse plus faible [1]

$$\int_0^\infty \mu\left([w\,;\infty[\right)^{1/d} \mathrm{d}w < \infty. \tag{1.6}$$

1. La condition (1.6) est par exemple une conséquence de $\mathbb{E}\left[X_0^d(\log^+ X_0)^{d+\varepsilon}\right] < \infty$.

Théorème 1.2 (Martin 2002)—
Sous l'hypothèse (1.6), il existe une constante finie N telle que

$$\frac{N(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps et L}^1} N. \tag{1.7}$$

De plus, il existe une constante universelle $c > 0$ telle que

$$N \le c \int_0^\infty \mathbb{P}(X_0 \ge w)^{1/d} \, \mathrm{d}w < \infty. \tag{1.8}$$

Des arguments de preuve sont donnés en Section 3.

Si la loi μ des X_v admet un moment d'ordre d mais ne vérifie pas (1.6), on ne sait pas si la suite $\left(\frac{N(n)}{n}\right)$ est convergente, ni si elle est bornée. Les questions suivantes sont ouvertes.

Question 1.3. Existe-t-il une loi μ pour laquelle la suite $\left(\frac{N(n)}{n}\right)$ est bornée mais non convergente ?

Question 1.4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour la convergence (ou pour le caractère borné) de la suite $\left(\frac{N(n)}{n}\right)$.

Les Théorèmes 1.1 et 1.2 ont des analogues où l'on remplace les animaux discrets par des chemins *auto-évitants* issus de l'origine, et l'adaptation des preuves pose peu de difficultés.

1.2 Liens avec la percolation de de premier passage

Les animaux et chemins gourmands apparaissent comme outil de preuve en percolation de premier passage (PPP). Présentons, par exemple, le modèle introduit par Fontes et Newman [5]. À chaque sommet $v \in \mathbb{Z}^d$ est associé une *couleur* aléatoire Y_v, de sorte que les Y_v soient i.i.d. On pose alors, pour tout $u, v \in \mathbb{Z}^d$,

$$T(u,v) \coloneqq \inf_\gamma \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{Y_{\gamma_{i-1}}, Y_{\gamma_i}} = \inf_\gamma \tau(\gamma), \tag{1.9}$$

où l'infimum porte sur l'ensemble des chemins $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ tels que $\gamma_0 = u$ et $\gamma_n = v$.

Autrement dit, le temps de passage le long d'un chemin est le nombre de changements de couleur le long de ce chemin. Fontes et Newman donnent une condition sur la loi des Y_v pour que

$$\mu \coloneqq \lim_{n\to\infty} \frac{T(0, ne_1)}{n} > 0, \tag{1.10}$$

où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Plus précisément, ils prouvent que $\mu > 0$ si et seulement si chaque couleur est en régime sous-critique de percolation, c'est-à-dire si pour toute couleur y,

$$\mathbb{P}(Y_v = y) < p_c^{\text{site}}(\mathbb{Z}^d), \tag{1.11}$$

où $p_c^{\text{site}}(\mathbb{Z}^d)$ désigne le paramètre critique pour la percolation sur site. La nécessité de cette condition est naturelle. En effet, si une couleur y vérifie

$$\mathbb{P}(Y_v = y) > p_c^{\text{site}}(\mathbb{Z}^d), \tag{1.12}$$

alors il existe des chemins infinis dont tous les sommets sont de couleur y. On peut ainsi utiliser ces "autoroutes" pour voyager loin de l'origine en peu de temps. Pour prouver la suffisance de cette condition, ils remarquent par des arguments élémentaires que pour tout chemin γ de 0 à ne_1,

$$\frac{1+\tau(\gamma)}{n} \geq \left[\frac{1}{|\gamma|}\sum_{v\in\gamma}|\mathcal{C}_v|\right]^{-1}, \tag{1.13}$$

où $\mathcal{C}_v$ désigne la composante connexe monochrome de v. Ainsi, $\mu > 0$ est un conséquence de directe de

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\xi\in\mathcal{A}(n)} \frac{1}{n}\sum_{v\in\xi}|\mathcal{C}_v|. \tag{1.14}$$

Or, en régime sous-critique de percolation, la taille d'une composante connexe a une queue de distibution qui décroît à vitesse exponentielle. En particulier, les variables $|\mathcal{C}_v|$ vérifient la condition d'intégrabilité du Théorème 1.1. Modulo un argument non trivial pour contourner la dépendance des $\mathcal{C}_v$, cela conclut.

Par ailleurs, de nombreux outils et stratégies de preuve classiques en PPP sont aussi pertinents pour l'étude des animaux gourmands : nous évoquons la concentration et le théorème de Kingman ci-dessous. Citons également les inégalités FKG et BK et l'utilisation d'arguments de modification [11].

1.3 Cas d'une famille de masses signées

De manière assez surprenante, le Théorème 1.1 est encore vrai si l'on retire l'hypothèse de positivité des X_v, et si l'on impose l'hypothèse d'intégrabilité sur X_v^+ ([4],Théorème 2.1.). Dans ce cas la limite $N := \lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n}$ peut être négative. Dans ce cadre on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$G_n := \max_{\xi} S(\xi), \tag{1.15}$$

où le maximum porte sur l'ensemble des animaux ξ inclus dans la boîte $[\![-n\,;n]\!]^d$. Le signe de N détermine alors deux régimes (Théorèmes 3.1. et 3.2. dans [4])

Théorème 1.5 (Dembo-Gandolfi-Kesten, 2001)—
Supposons que la loi des X_v vérifie[2] (1.4).

(i) Si $N < 0$, alors presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{G_n}{n} < \infty. \tag{1.16}$$

(ii) Si $N > 0$, alors presque sûrement,

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{G_n}{n^d} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{G_n}{n^d} < \infty. \tag{1.17}$$

2. Le résultat est encore valable avec la condition de Martin (1.6), avec une preuve quasiment identique... mais l'article de Martin a été publié après celui de DGK.

Dans le régime $N > 0$, il y a en fait convergence ([8], Théorème 1.2.).

Théorème 1.6 (Hammond, 2006)—
Supposons que la loi des X_v vérifie (1.6), et que $N > 0$. Alors il existe une constante déterministe $0 < G < \infty$, telle que

$$\frac{G_n}{n^d} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} G. \tag{1.18}$$

Par ailleurs, dans ce régime, les animaux gourmands "remplissent" l'espace laissé à leur disposition ([8], Théorème 1.1.). Pour tout $l > 0$, on appelle *percolation de l-boîtes* de paramètre p un famille de boîtes $\left(la + [\![0\,;a-1]\!]^d\right)_{a\in P}$, où P est une percolation de paramètre p sur $\mathbb{Z}^d$. Autrement dit, les évènements $\{x \in P\}$, pour $x \in \mathbb{Z}^d$, sont indépendants et de paramètre p.

Théorème 1.7 (Hammond, 2006)—
Supposons que la loi des X_v vérifie (1.6), et que $N > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe des entiers l et C, et une percolation de l-boîtes P telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, chaque animal ξ qui réalise G_n rencontre chaque boîte de P dans $[\![-(n-1) + Cl\,; n-1-Cl]\!]^d$.

Remarquons que la percolation de l-boîtes qui intervient dans le théorème *ne* dépend *pas* de n.

1.4 Animaux gourmands continus

L'objectif de mon stage de M2 était de prouver une loi des grands nombres pour un analogue continu du modèle de [3]. La notion voisine de *chemin gourmand continu* a été introduite par [7] dans la preuve d'un *théorème de forme* pour un modèle de percolation de premier passage continu.

On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne $\|.\|$. La famille de masses $(X_v)_{v\in\mathbb{Z}^d}$ est remplacée par un processus ponctuel de Poisson $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{R}^d \times [0\,;\infty[$ d'intensité $\mathrm{Leb} \otimes \mu$, où μ est une mesure de probabilité sur $[0\,;\infty[$. Autrement dit, $\mathcal{N}$ est un ensemble de couples $(x_i, w_i) \in \mathbb{R}^d \times [0\,;\infty[$, construit de la manière suivante : on tire l'ensemble aléatoire de points $\{x_i\}$, de densité moyenne 1 puis on associe à chaque x_i une masse w_i qui suit la loi μ, les w_i étant indépendants. On appelle *animal continu* un graphe fini connexe $\xi = (V, E)$, d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arêtes E, tel que $V \subseteq \mathbb{R}^d$.

On appelle *taille* d'un animal $\xi = (V, E)$ la quantité

$$|\xi| \coloneqq \sum_{\{x,y\}\in E} \|x - y\|\,, \tag{1.19}$$

et *masse* de cette animal la quantité

$$S(\xi) \coloneqq \sum_{\substack{x\in V\\(x,w)\in\mathcal{N}}} w. \tag{1.20}$$

De manière analogue au modèle discret, étant donné $l > 0$, on note $\mathcal{A}(l)$ l'ensemble des animaux continus de taille au plus l qui contiennent l'origine et on définit

$$N(l) \coloneqq \sup_{\xi\in\mathcal{A}(l)} S(\xi). \tag{1.21}$$

Les animaux qui réalisent la borne supérieure [3] dans (1.21) sont appelés *animaux gourmands continus* de taille l.

La structure de la preuve de [12] s'adapte dans une grande mesure au cadre continu.

Théorème 1.8—
Supposons que μ vérifie

$$\int_0^\infty \mu\left([w\,;\infty[\right)^{1/d}\,\mathrm{d}w < \infty. \tag{1.22}$$

Alors il existe une constante déterministe N telle que

$$\frac{N(l)}{l} \xrightarrow[l\to\infty]{\text{ps et L}^1} N. \tag{1.23}$$

2 Grandes déviations

2.1 Déviations supérieures

Le Théorème 1.2 implique, sous l'hypothèse (1.22) la convergence

$$\mathbb{P}(N(n)/n \in A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.1}$$

pour toute partie A de $\mathbb{R}$ telle que $N \notin \bar{A}$. Peut-on décrire la vitesse de cette convergence ? A notre connaissance, le seul résultat connu est dû à Dembo, Gandolfi et Kesten ([4],Théorème 4.1.) :

Théorème 2.1—
Supposons que μ admet un moment exponentiel. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, existe une constante $c(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \geq N + \varepsilon\right) = \mathrm{O}\left(-\mathrm{e}^{-c(\varepsilon)n}\right). \tag{2.2}$$

Il est facile d'obtenir une minoration de cette probabilité dans les cas non triviaux, avec une constante différente. Ainsi, si μ admet un moment exponentiel, alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{-\log \mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \geq N + \varepsilon\right)}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log \mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \geq N + \varepsilon\right)}{n} < +\infty. \tag{2.3}$$

Question 2.2. A quelle condition sur μ est-ce que pour tout $\varepsilon > 0$, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \geq N + \varepsilon\right)}{n} \tag{2.4}$$

existe-t-elle ?

Le développement naturel au-delà de cette question serait d'établir un *principe des grandes déviations* à la vitesse n pour la suite $\frac{N(n)}{n}$:

3. L'existence presque sûre d'un tel animal découle du caractère fini du processus de Poisson sur les compacts.

Question 2.3. A quelle condition sur μ existe-t-il une fonction semi-continue inférieurement I : $[0\,;\infty[\, \to [0\,;\infty]$ telle que, pour tout $A \subseteq [0\,;\infty[$,

$$\inf_{x\in\overline{A}} I(x) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{-\log \mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \in A\right)}{n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log \mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \in A\right)}{n} \le \inf_{x\in\mathring{A}} I(x) \qquad ? \tag{2.5}$$

2.2 Déviations inférieures

Répondre à la question 2.3 ne dévoilerait néanmoins pas tout le tableau des grandes déviations. En effet, il est raisonnable de conjecturer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \le N - \varepsilon\right)$$

est de l'ordre de $\mathrm{e}^{-c'(\varepsilon)n^d}$ pour une constante $c'(\varepsilon) > 0$. L'idée est la suivante : pour que $N(n)$ soit anormalement petit, il faut que tous les animaux de taille n passant par l'origine aient une masse petite. Cela implique que l'environnement est particulièrement défavorable dans une boule centrée en l'origine, d'où l'exposant en n^d. Il est donc naturel d'établir aussi un *principe des grandes déviations* à la vitesse n^d pour la suite $\frac{N(n)}{n}$:

Question 2.4. A quelle condition sur μ existe-t-il une fonction semi-continue inférieurement J : $[0\,;\infty[\, \to [0\,;\infty]$ telle que, pour tout $A \subseteq [0\,;\infty[$,

$$\inf_{x\in\overline{A}} J(x) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{-\log \mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \in A\right)}{n^d} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log \mathbb{P}\left(\frac{N(n)}{n} \in A\right)}{n^d} \le \inf_{x\in\mathring{A}} J(x) \qquad ? \tag{2.6}$$

Ce phénomène de cohabitation entre deux principes de grandes déviations non triviaux et de vitesses différentes se produit en percolation de premier passage, où les grandes déviations ont été davantage explorées, voir par exemple [1, 2, 9].

3 Idées de preuve du Théorème 1.2

Dans toute cette section, on fixe une loi de probabilité μ sur $[0\,;\infty[$ qui vérifie (1.6). On notera respectivement $\mathbb{P}_\mu$ et $\mathbb{E}_\mu$ les probabilités et les espérances pour rappeler le choix de la loi μ. Par exemple, $\mathbb{P}_\mu(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A lorsque les X_v suivent la loi μ. Les définitions des objets sont parfois simplifiées par rapport à l'article de Martin, mais les différences sont inoffensives à notre niveau de détail.

3.1 Caractère presque sûrement borné du processus

Dans le cas où μ est la loi de Bernoulli de paramètre $p > 0$, on dispose pour tout n de la borne

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Ber}(p)}\left[\frac{N(n)}{n}\right] \le cp^{1/d}. \tag{3.1}$$

Notons que pour tout $v \in \mathbb{Z}^d$,

$$X_v = \int_0^\infty \mathbb{1}_{X_v \ge w} \mathrm{d}w.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} N(n) &= \max_{\xi\in\mathcal{A}(n)} \sum_{v\in\xi} X_v \\ &= \max_{\xi\in\mathcal{A}(n)} \sum_{v\in\xi} \int_0^\infty \mathbb{1}_{X_v\geq w} \mathrm{d}w \\ &= \max_{\xi\in\mathcal{A}(n)} \int_0^\infty \left|\{v\in\xi \,|\, X_v \geq w\}\right| \mathrm{d}w \\ &\leq \int_0^\infty \max_{\xi\in\mathcal{A}(n)} \left|\{v\in\xi \,|\, X_v \geq w\}\right| \mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour tout $w \geq 0$, les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{X_v\geq w})_{v\in\mathbb{Z}^d}$ sont des variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre $\mu\left([w\,;\infty[\right)$. Ainsi, par la borne 3.1 et le théorème de Fubini,

$$\frac{\mathbb{E}_{\mathrm{Ber}(p)}[N(n)]}{n} \leq c \int_0^\infty \mathbb{P}_\mu(X_0 \geq w)^{1/d}\,\mathrm{d}w. \tag{3.3}$$

De cette majoration en espérance on peut déduire une majoration presque sûre ; nous passons l'argument sous silence.

Proposition 3.1—
Presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} \leq 2(d+1)c \int_0^\infty \mathbb{P}_\mu([w\,;\infty[)^{1/d}\,\mathrm{d}w < \infty. \tag{3.4}$$

3.2 Troncature

Soit $y > 0$. Notons, pour tout animal ξ,

$$\begin{cases} S^{(y)}(\xi) & = \sum_{v\in\xi}(X_v \wedge y) \\ S^{(\geq y)}(\xi) & = \sum_{v\in\xi}(X_v - y)^+, \end{cases} \tag{3.5}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} N^{(y)}(n) & = \max_{\xi\in\mathcal{A}(n)} S^{(y)}(\xi) \\ N^{(\geq y)}(n) & = \max_{\xi\in\mathcal{A}(n)} S^{(\geq y)}(\xi). \end{cases} \tag{3.6}$$

La Proposition 3.1 implique que presque sûrement,

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{N^{(\geq y)}(n)}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{N^{(\geq y)}(n)}{n} \leq 2(d+1)c \int_y^\infty \mathbb{P}_\mu([w\,;\infty[)^{1/d}\,\mathrm{d}w, \tag{3.7}$$

qui tend vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$. Ainsi, il suffit de montrer la convergence du processus $\left(\dfrac{N^{(y)}(n)}{n}\right)$, ce qui revient à prouver le théorème dans le cas où la mesure μ est à support dans $[0\,;y]$. Pour simplifier, on supposera $y = 1$.

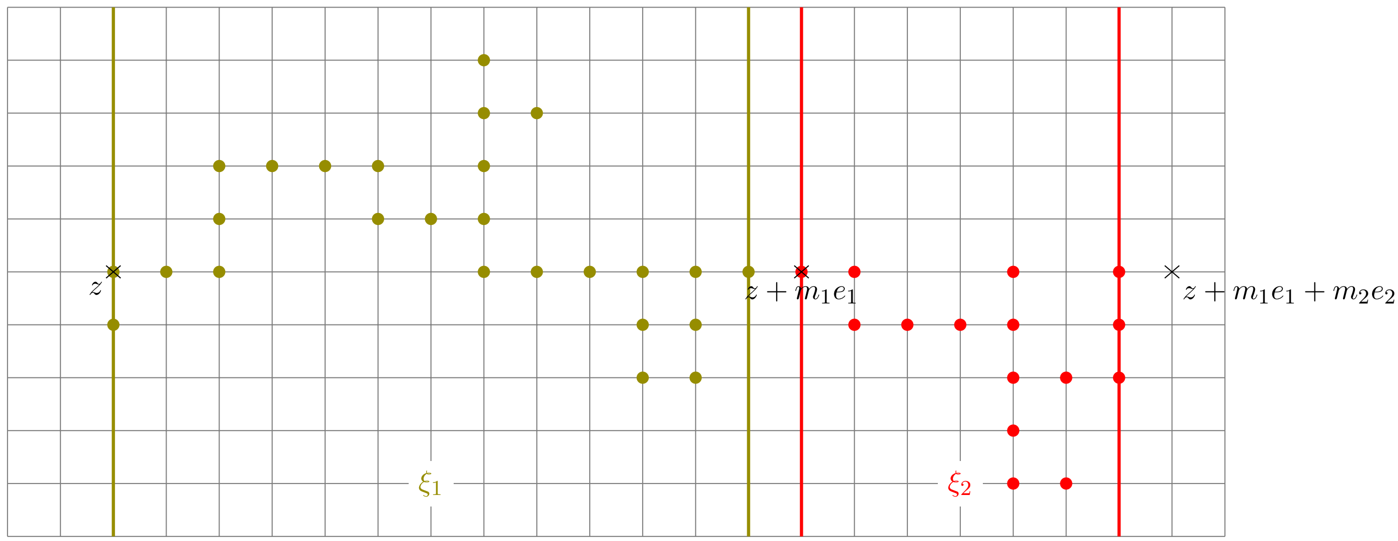

FIGURE 1 – Représentation des animaux définis en (3.10). Les points verts sont les sommets de ξ_1 et les points rouges ceux de ξ_2.

3.3 Animaux cylindriques

Pour tout $z \in \mathbb{Z}^d, m > 0, \alpha \geq 1$, on définit la variable

$$W(z, \alpha m, m) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}(z,\alpha m,m)} S(\xi), \tag{3.8}$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des animaux ξ de taille αm, qui passent par z et $z+(m-1)e_1$, et qui sont contenus entre les hyperplans $z + \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ et $z + (m-1)e_1 + \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$. On définit ainsi un processus *suradditif*, dans le sens où pour tout $z \in \mathbb{Z}^d, \alpha \geq 1, m_1, m_2 > 0$,

$$W(z, \alpha(m_1 + m_2), m_1 + m_2) \geq W(z, \alpha m_1, m_1) + W(z + m_1e_1, \alpha m_2, m_2). \tag{3.9}$$

Pour le voir, il suffit de considérer les animaux suivants (voir Figure 1)

$$\begin{cases} \xi_1 & \in \operatorname{argmax}_{\xi \in \mathcal{A}(z,\alpha m_1,m_1)} S(\xi), \\ \xi_2 & \in \operatorname{argmax}_{\xi \in \mathcal{A}(z+m_1e_1,\alpha m_2,m_2)} S(\xi), \\ \xi & := \xi_1 \cup \xi_2. \end{cases} \tag{3.10}$$

Ainsi, $\xi_1 \cap \xi_2 = \emptyset$ et $\xi \in \mathcal{A}(z, \alpha(m_1 + m_2), m_1 + m_2)$, donc

$$W(z, \alpha(m_1 + m_2), m_1 + m_2) \geq S(\xi) = S(\xi_1) + S(\xi_2) = W(z, \alpha m_1, m_1) + W(z + m_1e_1, \alpha m_2, m_2). \tag{3.11}$$

Le théorème ergodique sous-additif de Kingman [4] [10] donne alors le lemme suivant.

Lemme 3.2—
Soit $\alpha \geq 1$. Alors il existe une constante déterministe W_α, telle que

$$\frac{W(0, \alpha m, m)}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{\text{ps et } \mathrm{L}^1} W_\alpha. \tag{3.12}$$

4. En quelques mots, le théorème de Kingman est version stochastique du résultat qui assure la convergence de $\frac{a_n}{n}$ lorsque la suite (a_n) est sous-additive.

3.4 Fin de la preuve

Il reste à comparer les processus $(N(n))_{n>0}$ et $(W(z,n,m))_{\substack{z\in\mathbb{Z}^d\\ n\geq m>0}}$ pour prouver que $\frac{N(n)}{n}$ converge vers N, où $N := \sup\limits_{\alpha\geq 1}\frac{W_\alpha}{\alpha}$. À cette étape l'utilisation d'une *inégalité de concentration*, c'est-à-dire une majoration de la probabilité qu'une variable aléatoire soit loin de son espérance, est cruciale. Plus précisément, Martin utilise le Théorème 8.1.1 de Talagrand (1995) [5] [14], d'où il déduit, pour tout $z\in\mathbb{Z}^d, n\geq m>0, \varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}(W(0,n,m)\geq n\,(N+\varepsilon))\leq C\exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{16}\right), \tag{3.13}$$

où $C<\infty$ est une constante universelle. Martin prouve enfin la majoration

$$N(n)\leq \max_{(z,m)\in\mathcal{P}_n} W(z,n,m), \tag{3.14}$$

où $\mathcal{P}_n$ est de cardinal fini, polynomial en n. Ainsi, par *union bound*,

$$\mathbb{P}(N(n)\geq n(N+\varepsilon))\leq |\mathcal{P}_n|\exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{16}\right). \tag{3.15}$$

Or le second membre est sommable donc le lemme de Borel-Cantelli donne la majoration presque sûre

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}\leq N+\varepsilon. \tag{3.16}$$

Cela est vrai pour tout $\varepsilon>0$, donc presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}\leq N. \tag{3.17}$$

La minoration de $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}$ découle de la définition de N. On a ainsi prouvé

$$\frac{N(n)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} N. \tag{3.18}$$

La convergence L^1 s'en déduit par convergence dominée.

4 Autres questions ouvertes

4.1 Propriétés géométriques des grands animaux gourmands

Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'animaux telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, ξ_n est un animal gourmand de taille n.

Question 4.1. Décrire le comportement asymptotique de $\mathrm{ray}(\xi_n) := \sup\{\|v\|, v\in\xi_n\}$.

Il paraît raisonnable d'imaginer que "vu de loin", un animal gourmand de grande taille exploite son environnement de manière uniforme. En particulier, nous conjecturons que le rayon d'un animal gourmand de taille n est de l'ordre de $n^{1/d}$.

5. Cet argument ne se traduit pas de manière immédiate dans le cadre des animaux continus. À la place du résultat de Talagrand, il est alors plus judicieux d'utiliser le Théorème 3 de Reynaud-Bouret (2003) [13].

4.2 Allure de $\alpha \mapsto W_\alpha$

Notons

$$\begin{aligned} f :]0\,;1] &\longrightarrow [0\,;\infty[\\ \beta &\longmapsto \beta W_{1/\beta} \end{aligned}$$

où W_α est défini par (3.12). Par des constructions dans l'esprit de (3.10), on montre que f est concave, décroissante, et que $f(0^-) = N$.

Question 4.2. Sous quelles conditions est-ce que f est *strictement* décroissante ?

En cas de réponse positive à la Question 4.2, on peut en déduire sans peine

$$\mathrm{ray}(\xi_n) = \mathrm{o}(n), \tag{4.1}$$

et de plus, pour tout $\alpha \geq 1$, pour tout $n > 0$ assez grand, les animaux $\xi \in \mathcal{A}(0, \alpha n, n)$ qui maximisent $S(\xi)$ sont inclus dans une bande de largeur $\mathrm{o}(n)$ autour de l'axe $\mathbb{R}e_1$.

Références

[1] Riddhipratim Basu, Allan Sly, and Shirshendu Ganguly. Upper tail large deviations in first passage percolation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 74(8) :1577–1640, 2021. URL : `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.22010`, `arXiv:https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.22010`, `doi:https://doi.org/10.1002/cpa.22010`.

[2] Yunshyong Chow and Yu Zhang. Large deviations in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, 13(4) :1601 – 1614, 2003. `doi:10.1214/aoap/1069786513`.

[3] J. Theodore Cox, Alberto Gandolfi, Philip S. Griffin, and Harry Kesten. Greedy Lattice Animals I : Upper Bounds. *The Annals of Applied Probability*, 3(4) :1151 – 1169, 1993. `doi:10.1214/aoap/1177005277`.

[4] Amir Dembo, Alberto Gandolfi, and Harry Kesten. Greedy lattice animals : negative values and unconstrained maxima. *The Annals of Probability*, 29(1) :205 – 241, 2001. `doi:10.1214/aop/1008956328`.

[5] Luiz Fontes and Charles M. Newman. First Passage Percolation for Random Colorings of $\mathbb{Z}^d$. *The Annals of Applied Probability*, 3(3) :746 – 762, 1993. `doi:10.1214/aoap/1177005361`.

[6] Alberto Gandolfi and Harry Kesten. Greedy Lattice Animals II : Linear Growth. *The Annals of Applied Probability*, 4(1) :76 – 107, 1994. `doi:10.1214/aoap/1177005201`.

[7] Jean-Baptiste Gouéré and Régine Marchand. Continuous first-passage percolation and continuous greedy paths model : Linear growth. *The Annals of Applied Probability*, 18(6) :2300 – 2319, 2008. `doi:10.1214/08-AAP523`.

[8] Alan Hammond. Greedy lattice animals : Geometry and criticality. *The Annals of Probability*, 34(2) :593 – 637, 2006. `doi:10.1214/009117905000000693`.

[9] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In P. L. Hennequin, editor, *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV - 1984*, pages 125–264, Berlin, Heidelberg, 1986. Springer Berlin Heidelberg.

[10] J. F. C. Kingman. The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 30(3) :499–510, 1968. URL : `http://www.jstor.org/stable/2984253`.

[11] Sungchul Lee. An Inequality for Greedy Lattice Animals. *The Annals of Applied Probability*, 3(4) :1170 – 1188, 1993. `doi:10.1214/aoap/1177005278`.

[12] James B. Martin. Linear growth for greedy lattice animals. *Stochastic Processes and their Applications*, 98(1) :43–66, 2002. URL : `https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:spapps:v:98:y:2002:i:1:p:43-66`.

[13] Patricia Reynaud-Bouret. Adaptive estimation of the intensity of inhomogeneous poisson processes via concentration inequalities. *Probability Theory and Related Fields*, 126 :103–153, 05 2003. `doi:10.1007/s00440-003-0259-1`.

[14] Michel Talagrand. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 81 :73–205, 1995. URL : `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1995__81__73_0/`.