

Introduction au domaine de recherche: Graphes d'Erdős-Rényi gelés et Parking aléatoire sur des arbres de Cayley

Vincent Viau

26 septembre 2022

Table des matières

1	Introduction	1
2	Transition de phase pour les graphes d'Erdős-Rényi gelés	2
2.1	Le graphe d'Erdős-Rényi classique	2
2.2	Le modèle d'Erdős-Rényi gelé	3
2.3	Transitions de phase pour le graphe gelé	5
3	Parking aléatoire sur des arbres de Cayley uniformes	6
3.1	Le modèle	6
3.2	Le couplage	8
3.3	Convergence pour les processus de parking	9
4	Problèmes ouverts	9
	Références	11

1 Introduction

Cette introduction au domaine de recherche fait le lien entre mon mémoire de Master 2, effectué au LAGA sous la direction de Bénédicte Haas, et la thèse que je commence en ce mois de septembre co-dirigé par Bénédicte Haas et Nicolas Curien de l'université d'Orsay. Comme indiqué dans le titre, le sujet du mémoire et de la thèse sont les processus de parking sur des arbres de Cayley uniformes et les graphes d'Erdős-Rényi gelés. L'idée principale de ces processus gelés est de ralentir la progression des composantes qui ont un cycle (avec un ralentissement qui dépend d'un paramètre $p \in [0, 1]$). Ce modèle de graphe aléatoire a été introduit pour la première

en 2021 par Alice Contat et Nicolas Curien dans [3] dans le but justement d'étudier les processus de parking, puisqu'il est possible de coupler le processus de parking avec le graphe gelé pour $p = \frac{1}{2}$ (nous le verrons dans la section 3). En combinant ce couplage avec le théorème 2.2 qui énonce la transition de phase des tailles des composantes des graphes d'Erdős-Rényi gelés, nous en déduirons des résultats de convergence pour les processus de parking. Enfin nous terminerons par présenter des problèmes ouverts, plutôt axés sur les graphes d'Erdős-Rényi gelés, et qui font l'objet du début de ma thèse actuelle.

2 Transition de phase pour les graphes d'Erdős-Rényi gelés

2.1 Le graphe d'Erdős-Rényi classique

Les processus gelés étant une variante du modèle classique d'Erdős-Rényi, nous commençons par rappeler le modèle classique et donner des résultats démontrés depuis un certain temps pour ce modèle. Il existe plusieurs façons de construire ce graphe, nous allons utiliser une version dynamique en ajoutant les arêtes les unes après les autres : Nous considérons l'ensemble des sommets $\{1, \dots, n\}$ et nous laissons arriver des arêtes uniformes parmi les sommets (en autorisant les boucles et les multi-arêtes) les unes après les autres de manière indépendante. Pour $n, m \geq 0$, nous noterons $G(n, m)$ le graphe d'Erdős-Rényi à n sommets et m arêtes. Depuis l'introduction de ce modèle dans la littérature à la fin des années 1950, il a fait l'objet de nombreuses études. Erdős et Rényi se sont par exemple intéressés à l'évolution des tailles des composantes connexes d'un tel graphe. Ils démontrent une transition de phase quand le nombre d'arêtes m est de l'ordre de $n/2$. Plus précisément, ils démontrent que quand m est petit devant $n/2$ toutes les composantes du graphe sont de taille au plus logarithmique, alors que quand m devient grand devant $n/2$ il y a l'apparition d'une composante connexe géante dont la taille est d'ordre n . Ils montrent aussi que dans le cas critique $m \sim n/2$, en renormalisant par $n^{-2/3}$, nous obtenons la convergence en loi du vecteur des tailles des composantes renormalisées. Ce résultat a été ensuite raffiné dans la deuxième moitié du 20 siècle, notamment par David Aldous : ce dernier montre que la fenêtre critique est $m = \frac{n}{2} + \frac{\lambda}{2}n^{2/3}$. Nous aurons la même fenêtre critique pour le cas gelé, et c'est pourquoi nous utiliserons la notation suivante : si nous avons un processus $(X(n, m) : m \geq 0)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous noterons

$$X_n(\lambda) := X\left(n, \lfloor m = \frac{n}{2} + \frac{\lambda}{2}n^{2/3} \rfloor \vee 0\right). \quad (2.1)$$

Dans cette fenêtre critique, Aldous démontre le théorème suivant : nous notons $\mathcal{M}^{(n)}(\lambda) := (\mathcal{M}_i^{(n)}(\lambda) : i \geq 1)$ le vecteur des tailles décroissantes des composantes de $G_n(\lambda)$ renormalisées par $n^{-2/3}$. Pour chaque composante nous regardons son surplus $\mathcal{SP}_i^{(n)}(\lambda)$ (c'es-à-dire le nombre minimal d'arêtes à enlever pour obtenir un arbre).

Pour tout $n \geq 1$, le vecteur $(\mathcal{M}^{(n)}(\lambda), \mathcal{SP}^{(n)}(\lambda))$ est un élément de l'ensemble

$$\mathbb{U}^\downarrow := \left\{ (x, s) \in \ell_{\downarrow}^2 \times \mathbb{N}^\infty : \sum_{i \geq 1} x_i s_i < \infty, s_i = 0 \text{ dès que } x_i = 0 \right\}.$$

Une distance naturelle sur \mathbb{U}^\downarrow est alors la distance $d_{\mathbb{U}^\downarrow}((x, s); (x', s')) := \|x - x'\|_{\ell^2} + \sum_{i \geq 1} |x_i s_i - x'_i s'_i|$. Avec ces notations nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Nous avons la convergence suivante pour la topologie de Skhorokhod sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{U}^\downarrow)$:*

$$\left((\mathcal{M}^{(n)}(\lambda), \mathcal{SP}^{(n)}(\lambda)) : \lambda \in \mathbb{R} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d)} \left((\mathcal{M}(\lambda), \mathcal{SP}(\lambda)) : \lambda \in \mathbb{R} \right)$$

où $(\mathcal{M}(\lambda), \mathcal{SP}(\lambda))$ est le coalescent multiplicatif augmenté.

Remarquons que pour un espace métrique (E, d) , nous notons $\mathcal{D}(\mathbb{R}, E)$ l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans E qui sont continues à droite et qui ont des limites à gauche.

Il est possible de donner une construction explicite du coalescent multiplicatif augmenté, à partir d'un mouvement brownien drifté dont nous regarderons les longueurs des excursions, cependant une manière sans doute plus parlante de comprendre le processus $(\mathcal{M}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R})$ est de le voir en termes de dynamiques : ce processus comporte des particules blanches et deux particules blanches fusionnent à un taux égal au produit de leur masse. Nous retrouvons en fait les transitions pour les composantes du graphe d'Erdős-Rényi (deux composantes vont être reliées par une arête et ne former plus qu'une composante plus grosse avec une probabilité proportionnelle au produit de leur nombre de sommets).

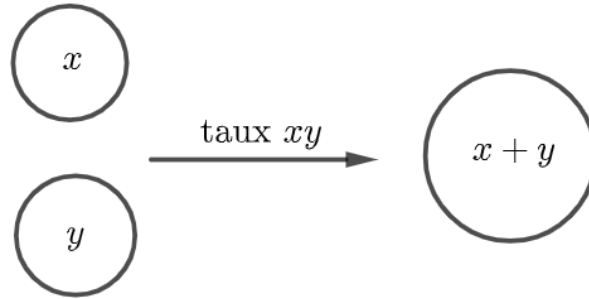


FIGURE 1 – Dynamiques du coalescent multiplicatif standard.

Le but de la section suivante sera d'obtenir l'analogie de ce résultat pour le cas des graphes d'Erdős-Rényi gelés.

2.2 Le modèle d'Erdős-Rényi gelé

Nous étudions une variante du modèle classique d'Erdős-Rényi : les graphes d'Erdős-Rényi gelés introduits pour la première fois par Contat et Curien dans [3] dans le cadre

de l'étude de processus de parking sur des arbres de Cayley uniforme. L'idée globale de ces graphes est de ralentir la progression des composantes contenant un cycle. Nous nous donnons un paramètre $p \in [0, 1]$. Nous notons $(F_p(n, m) : m \geq 0)$ le processus gelé d'indice p . Les sommets de $F_p(n, m)$ seront de deux types possibles : les sommets blancs standards et les sommets bleus gelés. Nous nous donnons une suite $(U_i : i \geq 1)$ de variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$. Initialement $F_p(n, 0)$ est constitué des n sommets blancs $\{1, \dots, n\}$. Comme dans le processus $(F_p(n, m) : m \geq 0)$, nous laissons les arêtes E_i arriver les unes après les autres, mais nous allons en écarter certaines et colorier certains sommets de $F_p(n, m)$ selon les règles suivantes, pour $m \geq 1$:

- Si les deux extrémités de E_m sont des sommets blancs alors l'arête E_m est ajoutée à $F_p(n, m - 1)$ pour former $F_p(n, m)$. Si cet ajout crée un cycle dans le graphe, alors les sommets de la composante correspondante sont dits gelés et sont coloriés en bleu.
- Si les deux extrémités de E_m sont des sommets bleus, l'arête E_m est écartée et n'est pas ajoutée au graphe, et nous avons donc $F_p(n, m - 1) = F_p(n, m)$.
- Si E_m relie un sommet blanc à un sommet bleu, alors l'arête E_m est écartée si $U_m > p$, et elle est ajoutée au graphe sinon. Dans ce dernier cas, la nouvelle composante est déclarée gelée et coloriée en bleu.

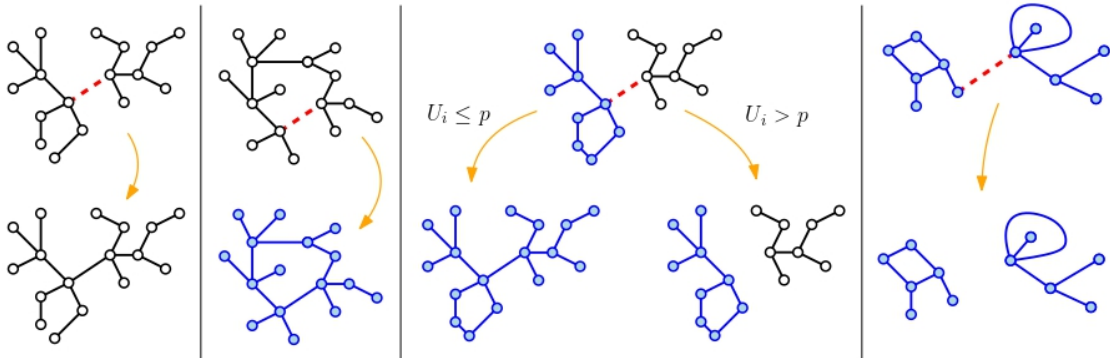


FIGURE 2 – Transitions du graphe d'Erdős-Rényi gelé d'indice p .

Le cas $p = 0$ consiste par exemple à arrêter complètement la progression des composantes connexes une fois qu'elles possèdent un cycle, tandis le cas $p = 1$, consiste à empêcher les surplus de 2 dans une composante. Ce modèle a été introduit dans [3] pour la première fois dans le cas $p = \frac{1}{2}$ dans le but d'étudier les parkings aléatoires, nous reviendrons sur le lien entre les deux processus dans la section 3. Dans leur article, Contat et Curien établissent une transition de phase pour les tailles des composantes du graphe gelé dans le cas $p = \frac{1}{2}$, nous avons, en reprenant la stratégie de preuve de [3], généralisé ce résultat pour $p \in [0, 1]$.

2.3 Transitions de phase pour le graphe gelé

Nous notons $\mathcal{E} := \ell_{\downarrow}^1 \times \ell_{\downarrow}^2$ que l'on munit de la distance naturelle $d_{\mathcal{E}}$ donnée par :

$$d_{\mathcal{E}}((x, y); (x', y')) := \|x - x'\|_{\ell^1} + \|y - y'\|_{\ell^2}.$$

C'est dans cet espace \mathcal{E} que vivent le processus des tailles des composantes des graphes gelés et les coalescents multiplicatifs gelés, que nous retrouvons dans le théorème suivant :

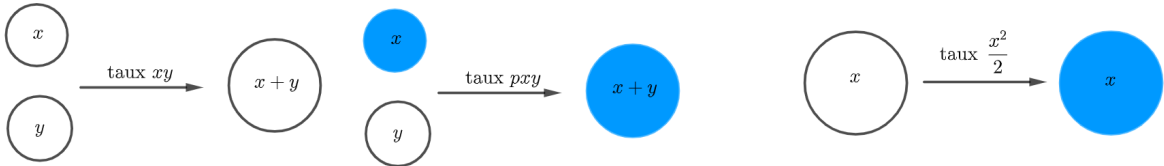
Théorème 2.2. *Nous avons la convergence en loi suivante pour la topologie de Skorokhod sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathcal{E})$:*

$$(\mathbb{F}_{n,p}(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d)} (\mathcal{FM}_p(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

où :

- $\mathbb{F}_{n,p}(\lambda)$ est la suite décroissante des tailles des composantes bleues de $F_{n,p}(\lambda)$ renormalisée par $n^{-2/3}$ suivie de la suite décroissante des tailles des composantes blanches de $F_{n,p}(\lambda)$ renormalisée par $n^{-2/3}$.
- \mathcal{FM}_p est le coalescent multiplicatif gelé d'indice p .

Le coalescent multiplicatif gelé d'indice p peut se définir en tant que limite des tailles des composantes du processus gelé, mais là encore une bonne façon de le voir est en termes de dynamiques : les particules de $\mathcal{FM}_p(\lambda)$ sont de deux types : les particules gelées bleues, et les particules standards blanches. Les particules de \mathcal{FM}_p évoluent de la façon suivante :



Heuristiquement, le coalescent multiplicatif gelé a les mêmes dynamiques que les composantes du processus gelé. Cette idée est d'ailleurs utilisée dans la preuve du théorème 2.2.

Par faute de place, nous ne donnons pas ici la preuve de ce résultat mais donnons quelques idées. La première idée est d'abord de montrer cette convergence pour une autre distance sur \mathcal{E} , donnée par $d_{\text{sup}}((x, y); (x', y')) := \sup_{i \geq 1} |x_i - x'_i| + \sup_{i \geq 1} |y_i - y'_i|$. Pour montrer la convergence pour cette distance, nous faisons deux cut-offs successifs pour approximer le processus gelé. Le but de ces approximations est de se ramener à un processus en un certain sens borné et donc d'avoir des critères de tension plus faciles. Brièvement l'idée de ces cut-offs est dans un premier temps de se débarrasser des

vieux cycles, puis dans un deuxième temps de ne travailler qu'avec des composantes d'une certaine masse. Le travail pour passer ensuite de la distance d_{sup} à la distance d_ε consiste alors à contrôler l'effet de cumul des particules de petite masse.

Une conséquence intéressante de ce résultat est le théorème suivant qui donne l'ordre du nombre d'arêtes enlevées dans le graphe d'Erdős-Rényi gelé dans la fenêtre critique. Ce résultat nous sera notamment utile dans la partie 3 car nous ferons correspondre les arêtes enlevées dans $F_{1/2}$ avec le flux de voitures sortant du parking. Pour $n \geq 1$, $m \geq 1$, nous notons $D_p(n, m)$ le nombre d'arêtes enlevées après avoir considéré m arêtes dans le processus gelé d'indice p ; et nous notons $D_{p,n}(\lambda) = D_p(n, \lfloor \frac{n}{2} + \frac{\lambda}{2} n^{2/3} \rfloor \vee 0)$. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Jointement à la convergence du théorème 2.2, nous avons la convergence en loi suivante pour la topologie uniforme sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:*

$$(n^{-1/3} D_{p,n}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d)} ((1-p) \int_{-\infty}^{\lambda} \|\mathcal{FM}_p(s)\|_\bullet ds : \lambda \in \mathbb{R})$$

où $\|\mathcal{FM}_p(\lambda)\|_\bullet$ est la masse totale des particules bleues de $\mathcal{FM}_p(\lambda)$.

Cette fois encore nous ne donnons pas la preuve mais seulement une idée rapide de ce qui en est. L'idée clé est de calculer la probabilité d'écarter une arête conditionnellement au nombre de sommets bleus : $\mathbb{P}(\Delta D_p(n, m) = 1 \mid \|F_p(n, m)\|_\bullet)$. Cette probabilité est complètement explicite en reprenant les transitions du processus gelé. L'idée est ensuite d'écrire le nombre d'arêtes enlevées comme la somme de ses incréments, et ensuite de passer à la limite en utilisant le théorème 2.2. Bien sûr il y a encore beaucoup de travail.

3 Parking aléatoire sur des arbres de Cayley uniformes

3.1 Le modèle

Les processus de parking ont été introduits pour la première fois en 1966 par Konheim et Weiss [4]. Les auteurs s'intéressaient alors au problème du parking sur une ligne droite. Ce problème a depuis été bien compris; et en 2016, dans [5] Lackner et Panholzer s'intéressent à un problème bien plus complexe : les processus de parking sur des arbres de Cayley uniformes. Plus précisément, nous considérons \mathfrak{t} un arbre de Cayley enraciné à n sommets que nous interprétons comme étant des places de parking. Nous laissons ensuite m voitures arriver une à une, indépendamment et uniformément parmi les sommets de \mathfrak{t} . Chaque voiture tente de se garer, et si la place n'est pas libre la voiture se déplace en direction de la racine de l'arbre. Si la voiture ne trouve pas de place au cours de son chemin, elle sort du parking sans se garer.

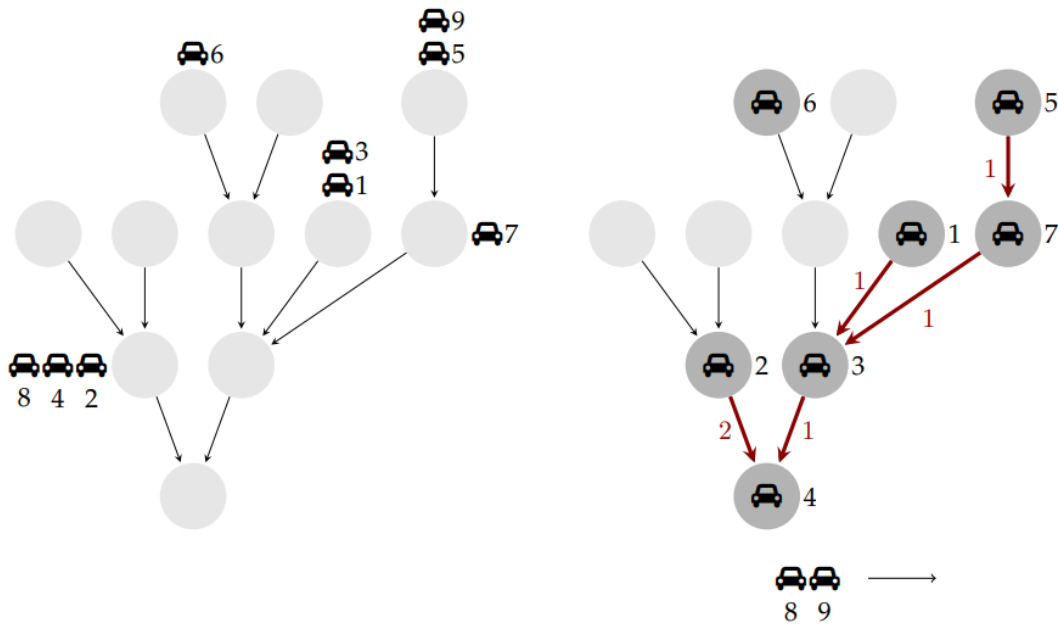


FIGURE 3 – A gauche, un arbre enraciné à 14 sommets, avec les arêtes pointant vers la racine, et 9 voitures arrivant sur ses sommets. A droite, le résultat du parking de ces voitures. Le flux de voitures le long de chaque arête est indiqué. Deux voitures sont sorties du parking sans réussir à se garer.

En 2016, Lackner et Panholzer montrent par une approche combinatoire une transition de phase quand le nombre de voiture m est de l'ordre de $n/2$. Nous allons retrouver ces résultats de convergence en utilisant une approche plus probabiliste : nous allons faire un couplage entre ce processus de parking et le graphe d'Erdős-Rényi gelé d'indice $\frac{1}{2}$ et utiliser ensuite les résultats de convergence démontrés dans la section 2 pour en déduire des résultats sur les processus de parking.

Le couplage en question va faire des correspondances entre les deux processus et nous avons besoin de définir ce que nous entendons par composantes dans les processus de parking. Soit T_n un arbre de Cayley uniforme à n sommets étiquetés. Indépendamment de T_n nous nous donnons $X_i \in \{1, \dots, n\}$ des arrivées de voitures indépendantes et uniformes. Pour $m \geq 0$, nous procédons au stationnement des m premières voitures. Nous gardons les arêtes sortant des sommets occupés, nous obtenons les composantes proches : $T_{\text{near}}(n, m)$, dont les composantes qui ne sont pas la composante de la racine sont des arbres de Cayley de taille N contenant $N - 1$ voitures et tels que la racine reste vide après leur stationnement (**nearly parked trees**)

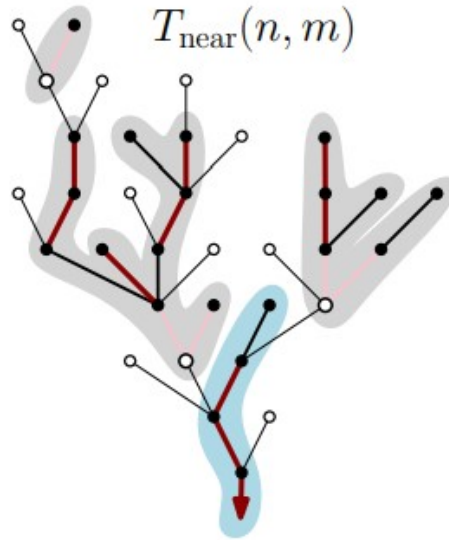


FIGURE 4 – Après 23 arrivées de voitures, les sommets noirs contiennent une voiture, et les arêtes rouges ont un flux positif. La composante de la racine est coloriée en bleu.

3.2 Le couplage

Nous pouvons alors énoncer le résultat de couplage entre processus de parking et processus gelé.

Théorème 3.1. *Nous pouvons coupler le processus de parking sur T_n avec $F_{1/2}$ de telle sorte que :*

1. T_n est un arbre de Cayley uniforme,
2. Pour tout $m \geq 0$, $T_{near}(n, m)$ a les mêmes composantes que $F(n, m)$ où nous avons unies les composantes gelées. Plus précisément :
 - les composantes blanches de $F(n, m)$ sont les composantes de $T_{near}(n, m)$ qui ne contiennent pas la racine.
 - les sommets des composantes bleues de $F(n, m)$ correspondent aux sommets de l'unique composante bleue de $T_{near}(n, m)$.
 - les indices des arêtes enlevées dans $F(n, \cdot)$ correspondent aux indices des voitures qui n'arrivent pas à se garer dans T_n .

L'idée du couplage est donc de construire en parallèle les deux processus. Pour construire l'arbre de Cayley, nous allons révéler ses instructions les unes après les autres, en nous servant à chaque étape des arêtes déjà révélées pour essayer de garer la voiture arrivante. Ceci est la première idée principale de ce couplage, la seconde est que nous allons faire correspondre l'apparition du premier cycle dans $G(n, m)$ avec la détection de la racine dans notre arbre de Cayley. Nous ne donnons pas plus de détails ici, le couplage est détaillé dans [3] et ce sera détaillé lors de la présentation.

3.3 Convergence pour les processus de parking

Comme annoncé, nous donnons maintenant un résultat de convergence pour les processus de parking, qui se déduit facilement des correspondances données par le couplage et de la transition de phase du processus gelé. A partir de maintenant nous notons \mathcal{FM} le coalescent multiplicatif gelé d'indice $\frac{1}{2}$. Commençons par donner quelques notations : pour $n \geq 1$ et $m \geq 0$,

- $(C_i(n, m) : i \geq 1)$ le vecteur des tailles décroissantes des composantes de $T_{\text{near}}(n, m)$,
- $C_*(n, m)$ la taille de la composante de la racine de $T_{\text{near}}(n, m)$,
- $D(n, m)$ le nombre de voitures n'ayant pas réussi à se garer après l'arrivée de m voitures.
- $(C_i(\lambda) : i \geq 1)$ la suite décroissante des masses des particules blanches dans $\mathcal{FM}(\lambda)$,
- $C_*(\lambda)$ la somme des masses des particules bleues dans $\mathcal{FM}(\lambda)$,
- $D(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\lambda} C_*(s) ds$.

Avec ces notations, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Nous avons la convergence en loi suivante pour la topologie de Skorokhod sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \ell^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$:*

$$\begin{pmatrix} n^{-2/3} C_{n,i}(\lambda) : i \geq 1 \\ n^{-2/3} C_{n,*}(\lambda) \\ n^{-1/3} D_n(\lambda) \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d)} \begin{pmatrix} C_i(\lambda) : i \geq 1 \\ C_*(\lambda) \\ D(\lambda) \end{pmatrix}.$$

La preuve de ce théorème est immédiate : elle se déduit des correspondances données par le couplage, et des convergences des théorèmes 2.2 et 2.3. Nous déduisons en particulier de ce théorème que le nombre de voitures échouant à se garer est de l'ordre de $n^{1/3}$ dans la fenêtre critique, ce qui n'était pas évident à démontrer à première vue.

4 Problèmes ouverts

Nous terminons en donnant une brève présentation de problèmes ouverts sur le sujet, qui font l'objet de ma thèse commencée récemment.

— Etude du coalescent multiplicatif gelé dans le cas sur-critique

L'étude effectuée jusqu'ici se concentre principalement sur le cas critique et il pourrait être intéressant de regarder le cas sur-critique, ou du moins légèrement sur-critique. Plus précisément, nous allons nous intéresser au processus $\lambda \mapsto \|\mathcal{FM}_p(\lambda)\|_{\bullet}$ et à son asymptotique quand $\lambda \rightarrow +\infty$. Dans cette optique, nous avons la proposition suivante qui nous donne une description de ce processus comme étant un processus de Markov à mesure de saut inhomogène explicite :

Proposition 4.1. *Le processus $\lambda \mapsto \|\mathcal{FM}_p(\lambda)\|_\bullet$ est un processus de Markov Feller de mesure de saut inhomogène*

$$\mathbf{n}_{\lambda,p}(x, dy) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} (y + 2px) \frac{p_1(\lambda - x - y)}{p_1(\lambda - x)}$$

partant de "0 au temps $-\infty$ ";

où

$$p_1(x) = -\frac{1}{2} e^{x^3/12} \left(x \text{Ai} \left(\frac{x^2}{4} \right) + 2 \text{Ai}' \left(\frac{x^2}{4} \right) \right)$$

où Ai est la fonction de Airy.

En notant $\mathcal{X}_p(\lambda) := \|\mathcal{FM}_p(\lambda)\|_\bullet$, il est conjecturé dans [3]

$$\frac{\mathcal{X}_p(\lambda)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{(\mathbb{P})} 1 + p. \quad (4.1)$$

Dans le cas $p = 1$, nous aurions $\mathcal{X}_1(\lambda) \sim 2\lambda$. Cela pourrait donner plus d'informations sur un résultat démontré par Luczak dans [6] qui affirme que la taille de la plus grande composante dans $G_n(\lambda)$ est d'ordre $2\lambda n^{2/3}$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$. Cette composante serait alors composée par la majorité des composantes connexes de la partie gelée de $F_1(\lambda)$.

— **Convergence géométrique des composantes critiques**

Il s'agirait là d'obtenir une convergence d'un autre type que celles obtenues précédemment. Il s'agit de voir nos graphes comme des espaces métriques compacts, où nous munissons nos graphes de la distance de graphe (celle du plus court chemin) avec une certaine renormalisation (dans le but d'obtenir une convergence). Il s'agit ensuite de regarder une éventuelle convergence en loi au sens de la topologie de Gromov-Hausdorff. Dans [1], les auteurs démontrent une convergence de ce type pour les composantes du graphe d'Erdős-Rényi classique renormalisées par $n^{-1/3}$ et le processus limite est un arbre continu. Il serait alors intéressant de se demander si une telle convergence est aussi vraie dans le cas du graphe d'Erdős-Rényi gelé. Nous pouvons par exemple penser que nous avons une convergence géométrique des composantes critiques du graphe gelé vers des versions d'arbres browniens contenant au plus un cycle.

— **Extension du modèle gelé à d'autres modèles de graphes aléatoires**

Le processus gelé consistant à ralentir la progression des composantes contenant un cycle dans un graphe aléatoire, ce modèle n'a pas de raison d'être exclusif au graphe d'Erdős-Rényi. Il pourrait ainsi être intéressant de transposer le processus gelé à d'autres modèles de graphes aléatoires, comme le modèle de configuration. Pour rappel, le modèle de configuration consiste à, étant donné une suite de degrés $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$, générer un graphe dont les degrés des sommets sont respectivement d_1, \dots, d_n . Une manière de construire un tel graphe est de tirer une involution à $N = \sum d_i$ éléments. Nous pouvons donc l'obtenir

de manière dynamique en tirant une à une les transpositions formant l'involution. Ainsi pouvons-nous donc bien définir un modèle de configuration gelé en reprenant les mêmes principes que pour le modèle d'Erdős-Rényi. Nous pourrions alors nous intéresser aux propriétés de ce modèle de configuration gelé et à sa géométrie : il est connu que la loi des degrés des sommets influe sur la géométrie du modèle de configuration (apparition d'une composante géante, ...), nous pourrions nous demander si ces propriétés se transposent au modèle gelé.

Références

- [1] L. Addario-Berry, N. Broutin, and C. Goldschmidt. The continuum limit of critical random graphs. *Probab. Theory Relat. Fields*, 152(3-4) :367–406, 2012.
- [2] D. Aldous. Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent. *Ann. Probab.*, 25(2) :812–854, 1997.
- [3] A. Contat and N. Curien. Parking on Cayley trees & frozen Erdős-Rényi. 2021.
- [4] A. G. Konheim and B. Weiss. An occupancy discipline and applications. *SIAM J. Appl. Math.*, 14 :1266–1274, 1966.
- [5] M-L. Lackner and A. Panholzer. Parking functions for mappings. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 142 :1–28, 2016.
- [6] Tomasz Łuczak, Boris Pittel, and John C. Wierman. The structure of a random graph at the point of the phase transition. *Trans. Am. Math. Soc.*, 341(2) :721–748, 1994.