

Difféomorphismes de Variétés Stables

Azélie Picot

May 2023

Sommaire

1	Introduction	2
2	Groupes de difféomorphismes de variétés et leurs enjeux	2
2.1	Fibrés Vectoriels	2
2.2	Difféomorphismes et classifiant	3
2.3	Classification des fibrés	4
3	Que savons-nous de $\mathbf{BDiff}(M)$?	4
3.1	Du néant à l'intuition d'Ulrike Tillmann	5
3.2	Généralisation du Théorème de Madsen-Weiss	7
3.3	Stabilité homologique	8
4	Machinerie développée par Galatius et Randal-Williams	9
4.1	Catégories de cobordisme	9
4.2	Description de la Scanning Map pour le théorème de Madsen-Weiss	11
4.3	Théorème de Complétion de Groupe	12
5	Conclusion et ouverture	13

1 Introduction

Classifier des objets à "déformation" près est une question essentielle en mathématiques. Nous connaissons tous la classification des espaces vectoriels de dimension finie ou des groupes abéliens finis, mais les choses se compliquent dès qu'on considère des espaces topologiques. Par exemple, nous pouvons nous demander le "nombre" de variétés compactes sans bord à difféomorphisme près. En dimension 0 et 1, le nombre de composantes connexes suffit. En dimension 2, on doit de plus regarder le genre de la variété et son orientabilité. En dimension plus grande, les choses sont moins évidentes. Dans cet exposé, nous ne nous intéressons pas aux variétés en tant que telles mais à ce qu'on appelle les fibrés. Prenez une variété M de dimension m et un espace X , qu'on appelle espace base. Imaginez pouvoir mettre au-dessus de chaque point de $x \in X$ un espace difféomorphe à M de sorte que cette "association" soit continue. C'est ce qu'on appelle un fibré en M sur X . Il s'avère que le groupe de difféomorphismes $\text{Diff}(M)$ de M permet de classifier ces fibrés. Comprendre $\text{Diff}(M)$ devient alors une question intéressante, mais très difficile comme nous allons le voir.

Dans une première partie, je donne plus de détails sur les fibrés en variétés et leur classification. Dans une seconde partie, j'énonce les résultats majeurs sur les groupes de difféomorphismes de variété, et en particulier le Théorème de Galatius-Randal-Williams [3] que j'ai étudié lors de mon mémoire de M2. Dans une troisième partie, j'introduis un concept essentiel à la preuve : les catégories de cobordisme. Enfin, je conclus sur des questions toujours ouvertes dans ce domaine.

2 Groupes de difféomorphismes de variétés et leurs enjeux

2.1 Fibrés Vectoriels

Avant de commencer, rappelons quelques éléments sur les fibrés vectoriels. Si X est un espace topologique, un fibré de dimension k est une surjection continue $\pi : E \rightarrow X$ telle que pour tout $x \in X$, la fibre $\pi^{-1}(x)$ peut être munie d'une structure de k -espace vectoriel, de sorte que ces dernières soient "compatibles" avec la topologie de X . Mathématiquement, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x sur lequel $U \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\phi} \pi^{-1}(U)$ est un homéomorphisme vérifiant

- $\pi \circ \phi(y, u) = y$ pour $y \in U, u \in \mathbb{R}^k$
- $u \mapsto \phi(y, u)$ est un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^k vers $\pi^{-1}(y)$ pour tout $y \in U$.

On peut définir de manière naturelle les morphismes entre fibrés. On peut exprimer les fibrés vectoriels sur une base X d'une façon plus simple. En effet, les m -fibrés de dimension k sont classifiés par la Grassmannienne $\text{BO}(k)$. C'est l'ensemble des plans de dimensions k dans \mathbb{R}^∞ . Il existe un fibré vectoriel

de dimension m γ au-dessus de $BO(m)$ appelé fibré universel. Plus précisément, il a pour espace total $E(\gamma) = \{(P, x) \mid x \in P \in BO(k)\}$. Le fibré est simplement la projection $\gamma(P, x) = P$.

Soit une base X et une application $f : X \rightarrow BO(k)$. Tout fibré sur M est obtenu à partir d'un tiré en arrière de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} f^*E(\gamma) & \longrightarrow & E(\gamma) \\ \downarrow f^*\gamma & & \downarrow \gamma \\ M & \xrightarrow{f} & BO(k) \end{array}$$

Deux applications homotopes f et f' donnent deux fibrés isomorphes.

Les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de dimension k sur X sont en bijection avec l'espace $[X, BO(m)]$ des applications de X vers $BO(k)$ à homotopie près.

2.2 Difféomorphismes et classifiant

Soit M une variété. On dénote par $\text{Diff}(M)$ le groupe de ses difféomorphismes. Si M est une variété à bord, on dénote par $\text{Diff}_\partial(M)$ le groupe de ses difféomorphismes se restreignant à l'identité sur le bord ∂M .

Lorsque la variété est orientée, on peut choisir de se restreindre aux difféomorphismes préservant l'orientation. Le groupe constitué de ces derniers est noté $\text{Diff}^+(M)$.

À tout groupe G , topologique ou discret, on peut associer un espace contractile EG sur lequel il existe une action (continue si G est topologique) libre (sans points fixe) de G . Le quotient EG/G obtenu est l'espace classifiant de G et est noté BG . Cet espace est unique à homotopie près. Le classifiant peut aussi être vu comme la réalisation géométrique du nerf de la catégorie associée à G .

Dans notre cas, nous donnons une description explicite de $\text{EDiff}(M)$ et $\text{BDiff}(M)$. Considérons l'ensemble $\text{Emb}(M, \mathbb{R}^\infty)$ des plongements de M dans \mathbb{R}^∞ muni de la topologie C^∞ . Les difféomorphismes agissent librement par composition. Cet espace est contractile. En effet, il est non vide par le théorème de Whitney et chaque plongement peut être poussé à prendre valeurs dans la "partie à coordonnées paires" de \mathbb{R}^∞ par une isotopie. En fixant un plongement à valeurs dans la "partie à coordonnées impaires" de \mathbb{R}^∞ , on obtient une homotopie vers une constante.

L'espace classifiant de $\text{Diff}(M)$ est alors "l'espace des copies" de M dans \mathbb{R}^∞ . La projection est une fibration

$$\text{Diff}(M) \rightarrow \text{EDiff}(M) \rightarrow \text{BDiff}(M),$$

la suite exacte longue sur les groupes d'homotopie permet de conclure :

$$\pi_i(\text{BDiff}(M)) \cong \pi_{i-1}(\text{Diff}(M))$$

pour $i \geq 0$.

Similairement, on peut définir $\text{BDiff}^+(M)$ ou $\text{BDiff}_\partial(M)$.

2.3 Classification des fibrés

Nous avons défini plus haut les fibrés vectoriels. La notion de fibré est en réalité plus générale, on peut définir des fibrés pour lesquels la fibre est une sphère, un groupe ou encore une variété. Soient M une variété de dimension m et X un espace topologique. Un M -fibré sur X est une surjection continue $\pi : E \rightarrow X$. Chaque fibre $\pi^{-1}(x)$ peut être munie d'une structure de variété de dimension m difféomorphe à M . Ces structures doivent encore une fois être compatibles avec la topologie de X .

Pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel qu'il existe $\phi : U \times M \rightarrow \pi^{-1}(U)$ un homéomorphisme vérifiant

- $\pi \circ \phi(y, m) = y$ pour $(y, m) \in U \times M$
- Pour $y \in U$, la fonction $m \mapsto \pi(y, m)$ est un difféomorphisme de M vers $\pi^{-1}(y)$.

Intuitivement, un tel fibré place au-dessus de chaque point de X une "copie" de M de façon "lisse".

La classification de ces fibrés fait intervenir cette fois-ci $\text{BDiff}(M)$. Supposons que la base X est une variété lisse de dimension finie. On peut la plonger dans \mathbb{R}^∞ . Un fibré π place au-dessus de chaque point $x \in X$ une copie de M dans \mathbb{R}^∞ , ainsi π correspond à la donnée d'une application de X vers l'espace des copies de M dans \mathbb{R}^∞ , qui n'est autre que $\text{BDiff}(M)$.

Il existe aussi un fibré universel qui est exactement $\text{EDiff}(M) \rightarrow \text{BDiff}(M)$ à partir duquel on retrouve les fibrés sur X en faisant des tirés en arrière.

Proposition 2.1. *Soit F_X^M l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés sur X de fibre M . Il existe une bijection*

$$F_X^M \rightarrow [X, \text{BDiff}(M)].$$

Si M est orientable, on peut définir les fibrés orientés (chaque fibre peut être munie d'une orientation compatible avec X). Les difféomorphismes $\text{BDiff}^+(M)$ préservant l'orientation classifient de tels fibrés.

Si M a un bord, on considère les fibrés $\pi : E \rightarrow X$, où X est une variété lisse de dimension k , E une variété à bord de dimension $m+k$ au bord $\partial E = \partial M \times X$. Chaque fibre est difféomorphe à M . Une condition de compatibilité locale doit encore une fois être vérifiée en chaque point. Ces fibrés sur X sont classifiés par $[X, \text{BDiff}_\partial(M)]$.

3 Que savons-nous de $\text{BDiff}(M)$?

On peut définir pour les fibrés sur X (vectoriels, en variété) des invariants sous la forme de classe de cohomologie de X . C'est ce qu'on appelle des classes caractéristiques. Par exemple, elles donnent des obstructions à l'existence de

sections du fibré. Une section associe à chaque point de la base un élément de sa fibre.

Or nous venons de voir que tout fibré sur X de fibre M (à isomorphisme près) est obtenu à partir d'une application (à homotopie près) $f : X \rightarrow \text{BDiff}(M)$. Prenons le tiré en arrière $f^* : H^*(\text{BDiff}(M), \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$. Les classes caractéristiques du fibré f proviennent alors de l'image de $H^*(\text{BDiff}(M))$ par f^* . Le calcul de l'anneau de cohomologie de $\text{BDiff}(M)$ permet donc de comprendre les classes caractéristiques des fibrés en M .

Nous nous plaçons dans les coefficients rationnels, pour pouvoir nous débarrasser de la torsion dans $H^*(\text{BDiff}(M), \mathbb{Z})$. Dans cette partie, je décris brièvement l'historique des connaissances sur ces anneaux de cohomologie pour différentes variétés.

3.1 Du néant à l'intuition d'Ulrike Tillmann

Réfléchissons d'abord au calcul de $H^*(\text{BDiff}(M), \mathbb{Q})$ dans des petites dimensions. En dimension 0, une variété est un nombre fini de points. Soit M la variété constituée de m points. Alors $\text{Diff}(m)$ est tout simplement le groupe symétrique Σ_m . Son espace classifiant $B\Sigma_m$ est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\Sigma_m, 1)$, c'est-à-dire un espace avec un seul groupe d'homotopie non nul, son groupe fondamental $\pi_1(B\Sigma_m) \cong \Sigma_m$. Son anneau de cohomologie est alors simplement la cohomologie de groupe de Σ_m . On ne connaît pas aujourd'hui son calcul complet.

En dimension 1, les variétés sont un nombre fini de copies du cercle. Le groupe de difféomorphismes du cercle est relativement simple à comprendre, puisqu'il est constitué de deux composantes connexes (les rotations et les réflexions), chacune homéomorphe au cercle. L'espace $\text{BDiff}(S^1)$ est équivalent à $B(\mathbb{Z}_2 \times S^1)$, un espace avec seulement deux groupes d'homotopie π_1 et π_2 . Sa cohomologie n'est peut-être pas évidente (surtout lorsqu'on combine plusieurs cercles).

En dimension 2, Earle et Eells montrent à la fin des années 60 que les groupes de difféomorphismes de la majorité des surfaces ont leurs composantes connexes contractiles. Plus précisément, voici l'énoncé du théorème :

Théorème 3.1 (Earle-Eells). *Soit S une variété de dimension 2. Les composantes connexes de $\text{Diff}(S)$ sont contractiles sauf lorsque S est la sphère, le plan projectif, le tore ou la bouteille de Klein.*

La seule chose restant à comprendre de $\text{Diff}(S)$ est l'ensemble de ses composantes connexes $\pi_0(\text{Diff}(S))$, aussi appelé "Mapping Class Group". C'est encore une fois une question complexe. Notons $S_{g,1}$ la surface orientable de genre g à laquelle on a enlevé un disque de sorte qu'elle a un cercle pour bord (voir figure 1).

Au début des années 80, Harer [5] a l'idée de regarder l'application de $S_{g,1}$ vers $S_{g+1,1}$ qui est l'ajout à droite de $S_{g,1}$ d'un tore privé de deux disques (voir figure 1). L'application induite sur les classifiants des difféomorphismes $\text{BDiff}(S_{g,1}) \rightarrow \text{BDiff}(S_{g+1,1})$ est appelée "stabilisation". Il démontre que cette

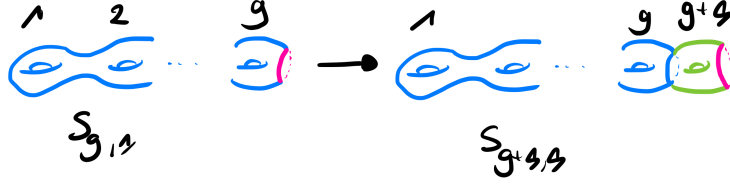


Figure 1: Application de stabilisation

dernière induit des isomorphismes en homologie pour des degrés plus petit qu'une borne affine en le genre g .

À cette même période, Mumford conjecture que $H^*(\text{hocolim} \text{BDiff}_\partial(S_{g,1}); \mathbb{Q})$ est un anneau polynomial à coefficients rationnels.

En 1997, Ulrike Tillmann conjecture que $\text{hocolim}_{g \rightarrow \infty} \text{BDiff}_\partial(S_{g,1})$ est "équivalent" à un espace de lacets infini. En 2001, Ib Madsen et Ulrike Tillmann identifient cet espace, noté $\Omega^\infty \text{MTSO}(2)$. L'identification de l'espace auquel est équivalent $\text{hocolim}_{g \rightarrow \infty} \text{BDiff}_\partial(S_{g,1})$ bloquait depuis plusieurs années.

Au début des années 2000, Ib Madsen et Michael Weiss montrent la conjecture de Tillmann et en déduisent celle de Mumford dans ce qui constitue aujourd'hui le théorème de Madsen-Weiss [8].

Avant de le citer, nous explicitons l'espace $\Omega^\infty \text{MTSO}(2)$. L'espace $\text{BSO}(2)$ est la grassmannienne orientée des plans de dimension 2. Il existe des application $or : \text{BSO}(2) \rightarrow \text{BO}(2)$ et $or^N : \text{Gr}_2^+(\mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Gr}_2(\mathbb{R}^N)$. Soient $\gamma_{2,N}$ le 2-fibré correspondant sur $\text{Gr}_2^+(\mathbb{R}^N)$ et $\gamma_{2,N}^\perp$ son fibré orthogonal. L'espace total de $\gamma_{2,N}^\perp$ est

$$E(\gamma_{2,N}^\perp) = \{(x, P, \omega) \mid (P, w) \in \text{Gr}_2^+(\mathbb{R}^N), x \in P^\perp\}.$$

C'est l'ensemble des 2-plans affines orientés de \mathbb{R}^N . En ajoutant un point, on obtient leurs compactifiés d'Alexandroff $E(\gamma_{2,N}^\perp)^+$. Notre espace de lacets infini est ainsi le suivant :

$$\Omega^\infty \text{MSO}(2) = \text{colim}_N \Omega^N E(\gamma_{2,N}^\perp)^+.$$

Théorème 3.2 (Madsen-Weiss). *Il existe une application dite de scanning*

$$\text{hocolim}_{g \rightarrow \infty} \text{BDiff}_\partial^+(S_{g,1}) \rightarrow \Omega_0^\infty \text{MTSO}(2)$$

qui est une équivalence d'homologie, i.e. qui induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homologie.

L'application de scanning est décrite dans la section 4.2.

3.2 Généralisation du Théorème de Madsen-Weiss

En 2014, Oscar Randal-Williams et Søren Galatius énoncent et montrent dans [3] une généralisation du théorème de Madsen-Weiss aux dimensions paires (strictement supérieures à 4), en introduisant une nouvelle machinerie. La surface $S_{g,1}$ de genre g se généralise à la dimension $2n$ en posant

$$W_{g,1} = \#gS^n \times S^n \setminus \text{int}(D^{2n}),$$

la somme connexe de g tores $S^n \times S^n$ avec un bord sphérique.

Comme en dimension 2, on cherche à étudier le type "d'homologie" de la "stabilisation" des $\text{BDiff}_\partial(W_{g,1})$, soit $\text{colim}_{g \rightarrow \infty} \text{BDiff}_\partial(W_{g,1})$. Cet espace va de nouveau être homotopiquement équivalent à un espace de lacet infini, noté $\Omega^\infty \text{MT}\theta_n$.

D'une part, $\theta_n : B \rightarrow \text{BO}(2n)$ est le "revêtement n -connexe" (n -connected cover) de $\{*\} \rightarrow \text{BO}(2n)$. L'espace B est en fait construit en rajoutant des cellules à $\text{BO}(2n)$ de sorte que ses premiers groupes d'homotopie s'annulent, $\pi_*(B) = 0$ pour $* \leq n$. L'application θ_n induit un isomorphisme $\theta_{n*} : \pi_*(B) \xrightarrow{\cong} \pi_*(\text{BO}(2n))$ pour les groupes d'homotopie supérieurs, i.e. $* \geq n$.

Exemple 3.3. Pour $n = 2$, l'espace B est le revêtement universel de $\text{BO}(4)$, il est donc homotope à $\text{BSO}(4)$. Pour $n = 3$, l'espace B annule $\pi_1(\text{BO}(6))$ et $\pi_2(\text{BO}(6))$, il est donc équivalent à $\text{BSpin}(6)$, où $\text{Spin}(6)$ est un groupe spinoriel.

D'autre part, $\text{MT}\theta_n$ est encore une fois un spectre, appelé spectre de Madsen-Tillmann associé à θ_n . Noton $d = 2n$ et $\text{Gr}_d(\mathbb{R}^N)$ l'espace des d -plans de \mathbb{R}^N . Soit $\gamma_{d,N}$ le d fibré-vectoriel sur $\text{Gr}_d(\mathbb{R}^N)$ issu du fibré universel. On rappelle que

$$\gamma_{d,N} : \left\{ \begin{array}{l} \{(x, P), \mid P \in \text{Gr}_d(\mathbb{R}^N), x \in P\} \longrightarrow \text{Gr}_d(\mathbb{R}^N) \\ (x, P) \longmapsto P \end{array} \right. .$$

On peut définir un $N - d$ -fibré orthogonal à $\gamma_{d,N}$ et noté $\gamma_{d,N}^\perp$ défini par :

$$\gamma_{d,N}^\perp : \left\{ \begin{array}{l} \{(x, P), \mid P \in \text{Gr}_d(\mathbb{R}^N), x \in P^\perp\} \longrightarrow \text{Gr}_d(\mathbb{R}^N) \\ (x, P) \longmapsto P \end{array} \right. .$$

Par définition, $\text{Gr}_d(\mathbb{R}^N) \subset \text{BO}(d)$. On note $B_N = \theta_n^{-1}(\text{Gr}_d(\mathbb{R}^N))$. En faisant un tiré en arrière, on obtient des $(N - d)$ -fibrés $\theta^* \gamma_{d,N}^\perp$:

$$\begin{array}{ccc} E(\theta^* \gamma_{d,N}^\perp) & \longrightarrow & E(\gamma_{d,N}^\perp) \\ \downarrow \theta^* \gamma_{d,N}^\perp & & \downarrow \gamma_{d,N}^\perp \\ B_N & \xrightarrow{\theta} & \text{Gr}_d(\mathbb{R}^N) \end{array}$$

Nous pouvons prendre l'espace de Thom de ces fibrés $\text{Th}(\theta^* \gamma_{d,N}^\perp)$. L'espace de Thom d'un fibré est la compactification de l'espace total du fibré. L'ensemble

de ces espaces forme le spectre $MT\theta_n$. On peut montrer qu'il existe une application de suspension $\Sigma\text{Th}(\theta^*\gamma_{d,N}^\perp) \rightarrow \text{Th}(\theta^*\gamma_{d,N+1}^\perp)$. En prenant la colimite de leurs espaces de lacets itérés, on peut définir :

$$\Omega^\infty MT\theta_n = \text{colim}_N \Omega^N \text{Th}(\theta_n^* \gamma_{d,N}^\perp).$$

Nous pouvons désormais revenir aux groupes de difféomorphismes.

Théorème 3.4 (Galatius-Randal-Williams). *Supposons $2n > 4$. Il existe une équivalence d'homologie*

$$\text{hocolim}_{g \rightarrow \infty} B\text{Diff}_\partial(\#gS^n \times S^n) \rightarrow \Omega_0^\infty MT\theta_n$$

où $\Omega_0^\infty MT\theta_n$ est une composante connexe de $\Omega^\infty MT\theta_n$.

L'équivalence d'homologie du théorème est appelée "Scanning map" ou "Construction de Thom-Pontryagin paramétrisée".

L'espace $\Omega_0^\infty MT\theta_n$ apparaît peu maniable mais en réalité sa cohomologie rationnelle est très bien comprise. On peut en effet montrer que $H^*(\Omega_0^\infty MT\theta_n, \mathbb{Q})$ est un anneau polynomial rationnel engendré par les classes de cohomologie rationnelles $c \in H^{*+d}(B, \mathbb{Q})$, où $* > 0$. En pratique, la cohomologie rationnelle de B se calcule à l'aide de suites spectrales à partir de la cohomologie rationnelle de $\text{BO}(2n)$.

3.3 Stabilité homologique

Les théorèmes de Madsen-Weiss et Randal-Williams calculent la cohomologie du groupe de difféomorphisme de variétés stables. Pouvons-nous en déduire des informations sur la cohomologie ou l'homologie de $\text{BDiff}_\partial(W_{g,1})$ pour g fixé?

La réponse est oui pour des petits degrés. En fait, ces groupes vérifient la "stabilité homologique". Cela signifie que l'application de stablisation

$$\text{BDiff}_\partial(W_{g,1}) \rightarrow \text{BDiff}_\partial(W_{g+1,1})$$

induit un isomorphisme en homologie pour de petits degrés. En particulier, en prenant la colimite, $\text{BDiff}_\partial(W_{g,1}) \rightarrow \text{hocolim}_g \text{BDiff}_\partial(W_{g,1})$ induit un isomorphisme dans un certain intervalle.

Le théorème suivant [4] donne des bornes pour la stabilité homologique. Il est valable pour de nombreux systèmes de coefficients, dont les entiers ou les rationnels.

Théorème 3.5. *Supposons $2n > 4$. L'application du théorème 3.4*

$$B\text{Diff}_\partial(W_{g,1}) \rightarrow \Omega_0^\infty MT\theta_n$$

induit un isomorphisme en homologie (à coefficients entiers et donc rationnels)

$$H_*(B\text{Diff}_\partial(W_{g,1})) \rightarrow H_*(\Omega_0^\infty MT\theta_n)$$

pour $ \leq \frac{g-3}{2}$.*

4 Machinerie développée par Galatius et Randall-Williams

Les preuves des théorèmes 3.4 et 3.2 étant très longues et techniques, je vais me contenter d'introduire deux "outils" essentiels à la machinerie développée dans [3] : les catégories de cobordisme et le théorème de complétion de groupe. Les catégories de cobordisme sont directement liées à l'espace infini de lacet $\Omega^\infty \text{MT}\theta_n$, tandis que le théorème de complétion de groupe est ce qui permet de relier ces derniers aux espace $\text{BDiff}_\partial(W_{g,1})$.

4.1 Catégories de cobordisme

Une catégorie de cobordisme est une catégorie dont les objets sont les variétés d'une dimension fixée et les morphismes, les cobordismes entre ces deux variétés, c'est-à-dire des "variétés de dimension supérieure" les reliant. Pour rappel, si M_0, M_1 sont des variétés (sans bord) de dimension $d-1$, un cobordisme (non orienté) de M_0 vers M_1 est une variété W de dimension d de bord $\partial W = M_0 \cup M_1$. Si M_0, M_1 sont munies d'une orientation, W doit aussi l'être de sorte que son bord $\partial W = M_0 \cup \bar{M}_1$, où \bar{M}_1 est M_1 muni de l'orientation opposée.

Fixons une dimension d et N large devant d .

Définition 4.1 (Catégorie de Cobordisme). Soit $C(\mathbb{R}^N)$ la catégorie dont les objets sont l'ensemble des variétés fermées sans bord de dimension $d-1$ incluses dans $(-1, 1)^{N-1}$. Si M_0, M_1 sont deux telles variétés, un morphisme de M_0 vers M_1 est un couple (t, W) où $W \subset \mathbb{R} \times (-1, 1)^{N-1}$ est une variété de dimension d et $t \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que :

- $W|_{(-\infty, \epsilon) \times \mathbb{R}^{N-1}} = \mathbb{R} \times M_0$
- $W|_{(t-\epsilon, \infty) \times \mathbb{R}^{N-1}} = \mathbb{R} \times M_1$

La composition est définie par

$$(t, W) \circ (t', W') = (t + t', W'')$$

où W'' coïncide avec W près de $(-\infty, t] \times \mathbb{R}^{N-1}$ et coïncide avec $te_1 + W'$ près de $[t, \infty) \times \mathbb{R}^{N-1}$, où e_1 désigne l'axe de la première coordonnée.

La figure 2 illustre les morphismes ainsi que la composition dans cette catégorie. L'ensemble des objets et des morphismes sont munis d'une topologie. Les morphismes "vivent" dans $\mathbb{R} \times (-1, 1)^{n-1}$. La topologie sur l'espace des morphismes permet de pousser des morceaux d'un morphisme W à l'infini ainsi que de "faire des transformations" sur un morphisme W "à l'infini". Par exemple, soit le morphisme $W = \mathbb{R} \times S^0$ entre S^0 et S^0 . On peut à l'infini recoller les deux morceaux gauches de W . On peut alors pousser l'extrémité gauche (qui ressemble à la lettre C) vers la droite. On peut le pousser à l'infini. On a ainsi réalisé un chemin de W vers la variété vide \emptyset . La figure 4.1 en donne une

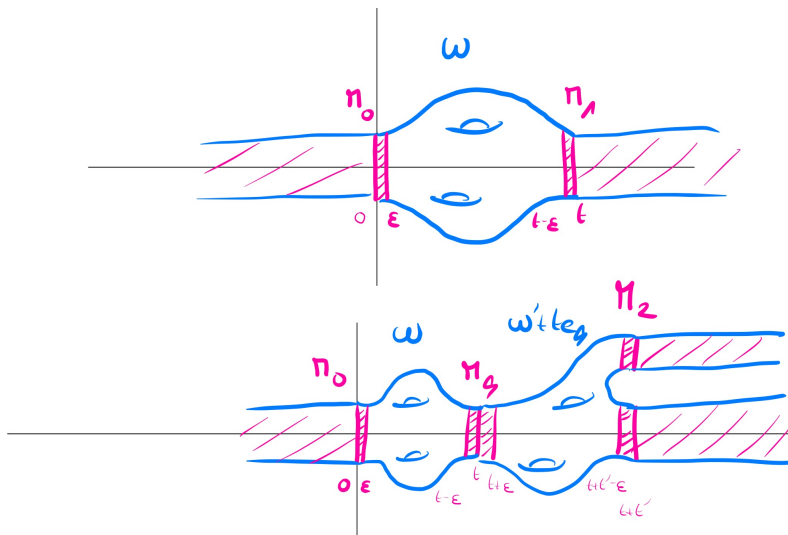


Figure 2: Morphismes et composition dans la catégorie de cobordisme $C_d(\mathbb{R}^N)$

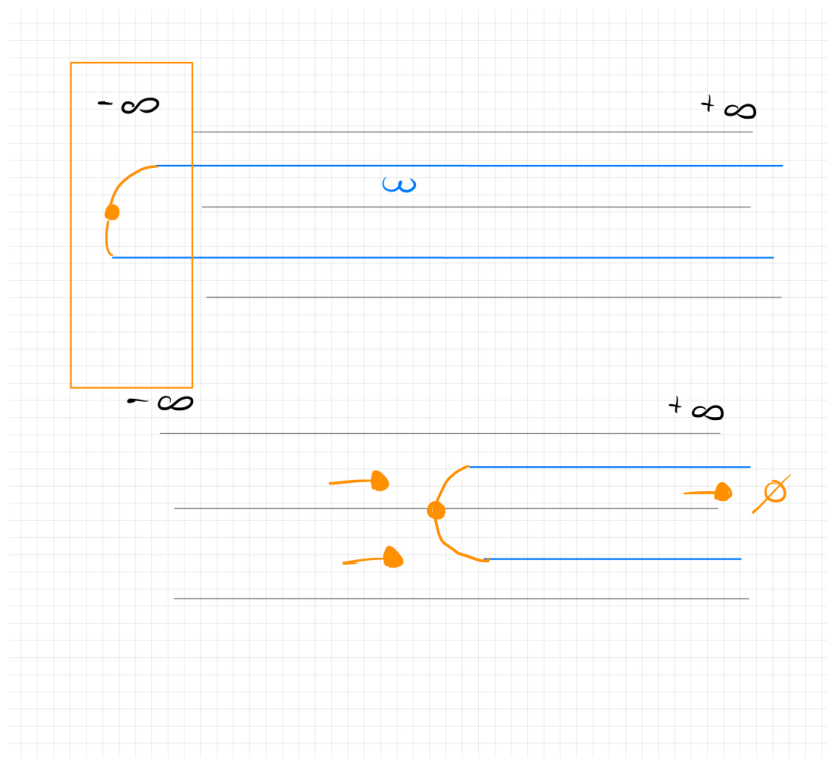


illustration.

La colimite sur N des catégories $C(\mathbb{R}^N)$ est notée C ou $C(\mathbb{R}^\infty)$.

Remarque 4.2. *Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait parler de catégorie de cobordisme non-unitaire et non catégorie car elle ne possède pas d'identité. Il est également possible d'ajouter formellement une identité.*

De façon similaire aux groupes, on peut associer à chaque catégorie C un espace topologique BC appelé espace classifiant de la catégorie. Pour les personnes familières des ensembles/espaces simpliciaux, BC est la réalisation géométrique du nerf de la catégorie C . Intuitivement, BC est un CW-complexe, ayant une 0-cellule pour chaque objet de C , une 1-cellule pour chaque morphisme de C , une 2-cellule pour chaque couple de morphismes composables de C ...etc. Dans [2], Søren Galatius et Oscar Randal-Williams décrivent le type d'homotopie de la catégorie de cobordismes C .

Théorème 4.3. *Il existe une équivalence d'homotopie*

$$\Omega BC \simeq \Omega^\infty MTO(d)$$

où $MTO(d)$ est le spectre de Madsen-Tillmann associé à $id : O(d) \rightarrow O(d)$.

Le théorème 4.3 ne traite pas du $\Omega^\infty MT\theta_n$ défini 3.4. En effet, la catégorie de cobordisme présentée ci-dessus n'impose aucune structure supplémentaire sur les fibrés tangents des variétés comme l'orientation.

Les structures d'orientation ou spinorielles sur des variétés font partie d'un cadre plus large : les structures tangentielles. Elles dépendent d'une application continue $\theta : B \rightarrow BO(d)$, pour B un espace topologique. L'application θ définit un fibré $\theta^*\gamma$ de dimension d sur B . Si le fibré tangent de M^d peut être obtenu à partir du fibré $\theta^*\gamma$, on dit que M peut être équipé d'une θ -structure. La structure d'orientation correspond ainsi à l'application $or : BSO(d) \rightarrow BO(d)$. On peut alors définir des catégories $C_\theta(\mathbb{R}^N)$ dans lesquelles les objets et les morphismes sont munis de telles structures tangentielles. Les définitions sont énoncées précisément dans [2].

4.2 Description de la Scanning Map pour le théorème de Madsen-Weiss

Nous allons désormais décrire la scanning map pour le théorème de Madsen-Weiss. La dimension est fixée égale à 2. Nous pouvons définir l'analogue orienté de la catégorie de cobordisme C_+ , dans laquelle variétés et leurs cobordismes sont orientés.

On peut définir l'espace $\psi_+(\mathbb{R}^N)$ des variétés orientées (de dimension 2, donc les surfaces de genre g), sans bord et topologiquement fermées de \mathbb{R}^N . La topologie est définie de sorte qu'on peut pousser les variétés à l'infini vers la variété vide, comme dans la catégorie de cobordisme.

Il peut être prouvé le théorème suivant :

Théorème 4.4. *Il existe des équivalences d'homotopie*

$$\Omega_0 BC_+ \simeq \Omega_0^\infty MTSO(2) \simeq \operatorname{colim}_N \Omega^N \psi_+(\mathbb{R}^N).$$

Pour être plus précise, la seconde équivalence d'homotopie est donnée par les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Th}(\gamma_{2,N}^\perp) & \rightarrow & \psi_+(\mathbb{R}^N) \\ (x, P, \omega) & \mapsto & (P + x, \omega) \\ \infty & \mapsto & \emptyset \end{array} .$$

Elle est bien continue puisque lorsque x tend vers l'infini, le plan affine $P + x$ sort des compacts $[0, k]^N$ et tend vers \emptyset .

Cette nouvelle description de $\Omega^\infty MTSO(2)$ nous permet de décrire une application $\alpha : \operatorname{hocolim}_g \operatorname{BDiff}_\partial(S_{g,1}) \rightarrow \Omega_0^\infty MTSO(2)$.

En effet, soit $M \in \operatorname{hocolim}_g \operatorname{BDiff}_\partial(S_{g,1})$. C'est une copie d'un certain $S_{g,1}$ plongée dans \mathbb{R}^N . On peut définir une inclusion standard $S_{g,1} \hookrightarrow S_g$, la surface de genre g sans bord.

On peut associer à M le chemin $\alpha(M) \in \Omega^N \psi(\mathbb{R}^N)$ défini par :

$$\alpha(M)(v) = \begin{cases} M + v & \text{si } v \in \mathbb{R}^N \\ \emptyset & \text{si } v = \infty \end{cases}$$

Ici la sphère S^N est vu comme l'espace \mathbb{R}^N auquel on ajoute un point à l'infini.

4.3 Théorème de Complétion de Groupe

Nous avons construit une application $\alpha : \operatorname{hocolim} \operatorname{BDiff}_\partial(S_{g,1}) \rightarrow \Omega^\infty MTSO(2)$ en dimension 2. On peut imaginer construire une application similaire en dimension $2n$, mais passer au $\Omega^\infty \operatorname{MT}\theta_n$ demande plus de travail.

Comment montrons-nous qu'une telle fonction est une équivalence d'homologie? La réponse tient en partie dans le théorème de complétion de groupe et sa généralisation aux catégories.

Si G est un groupe (topologique), on peut lui associer une fibration $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ où EG est contractile. Un exercice classique en homotopie montre que G est alors homotopiquement équivalent à ΩBG . Soit un monoïde (topologique) \mathcal{M} . On peut lui associer un classifiant $B\mathcal{M}$. Dans quels cas avons-nous une équivalence d'homotopie $\mathcal{M} = \Omega B\mathcal{M}$? Le théorème de complétion de groupe de Segal et McDuff [9] exprime l'homologie de $\Omega B\mathcal{M}$ en fonction de celle de \mathcal{M} si $\pi_0(\mathcal{M})$ "est presque un groupe".

Théorème 4.5 (Complétion de Groupe). *Soit \mathcal{M} un monoïde topologique tel que $H_*(\mathcal{M})[\pi_0(\mathcal{M})]$ peut être construit par fractions à droite. Alors il existe un isomorphisme*

$$H_*(\mathcal{M})[\pi_0(\mathcal{M})] \rightarrow H_*(\Omega B\mathcal{M}).$$

Dans [8], Galatius, Tillmann, Madsen et Weiss énoncent et démontrent une généralisation de ce théorème aux catégories. Soient C une catégorie et $F : C^{op} \rightarrow \text{Top}$ un foncteur. Si la C et F vérifient certaines conditions, alors il existe une équivalence d'homologie $F(c) \rightarrow \Omega_c BC$, pour tout objet c de la catégorie.

Pour en revenir aux groupes de difféomorphismes, il faudrait identifier

$$\text{hocolimBDiff}_\partial(W_{g,1})$$

avec l'image par un certain foncteur d'un objet de notre catégorie de cobordisme pour démontrer l'équivalence d'homologie entre $\text{hocolimBDiff}_\partial(W_{g,1})$ et $\Omega_0^\infty \text{MT}\theta_n$.

5 Conclusion et ouverture

L'étude des espaces $\text{BDiff}_\partial(M)$ est essentielle à la classification des fibrés en M . Leur calcul est extrêmement complexe, même pour des variétés simples comme les disques (pour plus d'informations, voir [12]) ou des tores. Finalement, c'est en "rajoutant" une infinité de copies de la variété qu'on peut faire des choses. De nombreuses questions restent ouvertes, les deux que je cite sont directement liées aux résultats exposés ci-dessus.

- J'ai énoncé une version "édulcorée" du théorème de [3]. On pourrait ainsi stabiliser par d'autres variétés que les tores, à condition d'être "hautement connexe" ($n - 1$ dans notre cas) comme le tore. Cette haute connectivité est essentielle à la preuve. Que se passe-t-il lorsqu'on stabilise par des $S^2 \times S^{2n-2}$ par exemple?
- Que se passe-t-il en dimension impaire? En fait, nous ne savons presque rien. Nous savons que les $\text{BDiff}_\partial(\#gS^n \times S^{n+1} \setminus D^{2n+1})$ vérifient la stabilité homologique mais il a été montré par Johannes Ebert dans [1] que la stabilisation des

$$\text{BDiff}_\partial^+(\#gS^n \times S^{n+1} \setminus D^{2n+1})$$

n'est pas équivalente homologiquement à un $\Omega^\infty \text{MTSO}(2n + 1)$. Aucune conjecture sur l'analogie de $\Omega^\infty \text{MT}\theta$ dans le cas impair n'a été trouvée pour le moment.

Avant de finir, j'aimerais donner quelques références pour les personnes désirant s'intéresser à ce sujet. Je conseille tout d'abord le papier "A Short Exposition of Madsen-Weiss Theorem" d'Allan Hatcher [6], qui est très clair et donne des bonnes intuitions. Il est important de connaître les résultats essentiels de topologie différentielle, Hirsch a écrit un excellent ouvrage [7] de référence à ce sujet. Il est aussi conseillé d'étudier la théorie de la chirurgie, dans [10] ou [13]. L'étude des classes caractéristiques est aussi suggérée, voir l'excellent ouvrage de Milnor et Stasheff [11].

Je tiens à remercier mon superviseur de mémoire, Oscar Randal-Williams, pour

m'avoir fait découvrir cette histoire passionnante. Cet entremêlement de techniques algébriques et topologiques me plaît tout particulièrement. Je travaillerai sur des questions similaires l'année prochaine, à Copenhague, avec Søren Galatius.

References

- [1] Johannes Ebert. A vanishing theorem for characteristic classes of odd-dimensional manifold bundles, 2010.
- [2] S. RANDAL-WILLIAMS O. GALATIUS. Monoids of moduli spaces of manifolds. *Geometry and Topology* 14, pages 1243–1302, (2010).
- [3] S. RANDAL-WILLIAMS O. GALATIUS. Stable moduli spaces of high dimensional manifolds. *Acta Mathematica*, pages 257–377, 2014.
- [4] Randal-Williams O. Galatius S. Homological stability for moduli spaces of high dimensional manifolds. ii. *Journal of the American Mathematical Society*, pages 215–264, 2018.
- [5] John L. Harer. Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces. *Annals of Mathematics*, 121(2):215–249, 1985.
- [6] Allen Hatcher. A short exposition of the madsen-weiss theorem, 2014.
- [7] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Springer New York, NY.
- [8] Galatius S. Madsen I. Tillmann U. Weiss M. The homotopy type of the cobordism category. *Acta Mathematica* 202(2), pages 195,239, 2009.
- [9] Segal McDuff, D. G. homology fibrations and the “group-completion” theorem. *Invent Math*, 31:279–284, 1976.
- [10] JOHN MILNOR, L. SIEBENMANN, and J. SONDOW. *Lectures on the H-Cobordism Theorem*. Princeton University Press, 1965.
- [11] JOHN W. MILNOR and JAMES D. STASHEFF. *Characteristic Classes. (AM-76)*. Princeton University Press, 1974.
- [12] Oscar Randal-Williams. Diffeomorphisms of discs, 2022.
- [13] Andrew Ranicki. *Algebraic and Geometric Surgery*. Oxford Science Publications, 2002.