

Sur la topologie différentielle en dimension 4

Sardor Yakupov

25 mai 2023

Table des matières

1	Introduction : Motivation	1
1.1	Différences avec la dimension 5 et plus	1
1.2	Différences avec la dimension 3 et moins	2
2	Résultats récents et méthodes modernes	5
2.1	Théorie de Morse et combinatoire des anses	6
2.2	Lacets dans le complexe de pantalons	7
2.3	Fibrations de Lefschetz	11
3	Conclusion : Invariants et la conjecture de Poincaré lisse	13

1 Introduction : Motivation

Cette section vise expliquer les motivations principales pour l'étude de la topologie en dimension 4. Nous présenterons quelques théorèmes importants en topologie des variétés et des questions centrales non traitées par ces méthodes puissantes. La conjecture qui est au coeur de ce mémoire est la conjecture de Poincaré lisse :

Conjecture. Soit M une variété lisse de dimension n homotopiquement équivalente à la sphère S^n . Alors M est difféomorphe à S^n .

1.1 Différences avec la dimension 5 et plus

On commence par énoncer un résultat important et bien connu :

Théorème 1.1 (Théorème de h-cobordisme). *Soient M, M' deux variétés lisses fermées simplement connexes de dimension $n \geq 5$. Supposons qu'il existe une variété N lisse de dimension $n + 1$ de bord $\partial N = M \amalg \overline{M'}$ telle que les inclusions $M, M' \rightarrow N$ soient des équivalences d'homotopie. Alors M est difféomorphe à M' .*

Remarque. Ce théorème peut être étendu au cas non-simplement connexe, avec des hypothèses supplémentaires sur le groupe de Whitehead du groupe fondamental. De plus, le théorème est vrai si on remplace "lisses" et "difféomorphes" par "PL, PL-homéomorphes" ou "topologiques, homéomorphes".

Ce théorème, démontré par Stephen Smale, a répondu à des plusieurs questions en topologie, parmi lesquelles la conjecture de Poincaré généralisée en dimension 5 et plus :

Théorème 1.2. *Soit M une variété de dimension $n \geq 5$ homotopiquement équivalente à la S^n . Alors M est homéomorphe à S^n .*

Ce théorème a été étendu au cas $n = 4$, mais la preuve a utilisé des méthodes plus compliquées, le théorème de h-cobordisme n'étant pas vrai en dimension 4.

Le développement conséquent de techniques de chirurgie a permis de traduire la plupart de questions topologiques en grande dimension dans le langage de la théorie d'homotopie et des classes caractéristiques. En particulier, la conjecture de Poincaré lisse se trouve être fausse en dimension grande. Bien que le problème d'existence (et de classification) de structures lisses exotiques sur la sphère en dimension n fixé est loin d'être trivial, ce problème a été ramené à des questions de nature purement algébrique, en relation avec le problème de calcul de l'homotopie stable des sphères.

1.2 Différences avec la dimension 3 et moins

Par opposition au cas de la dimension grande, il n'y a pas d'argument commun pour réunir les dimension 1, 2 et 3. Cependant il suffit de donner les arguments séparément, vu qu'il y a seulement trois cas à considérer :

Le cas de la dimension 1 est assez trivial, étant donné que la seule variété fermée connexe de dimension 1 est le cercle S^1 , donc toutes les questions correspondantes sont des exercices classiques en topologie et géométrie différentielle.

Le cas de la dimension 2 est plus avancé, mais il est un grand classique. Bien qu'il y ait un nombre considérable de problèmes modernes très étudiés sur la topologie des surfaces, les questions fondamentales, telles que la classification des surfaces fermées à homéomorphisme/difféomorphisme près, ont été résolues au début du XXème siècle.

Le cas de la dimension 3 est considérablement plus compliqué, et en fait est fortement lié au cas de la dimension 4. La majorité de méthodes est utilisée pour les deux dimensions. La raison est assez simple : toute variété lisse de dimension 4 peut être découpée en des parties simples, qui sont recollées le long de leur bord de dimension 3.

On commence par souligner la différence la plus importante entre les dimensions 3 et 4 :

Théorème 1.3 (Moise). *Toute 3-variété topologique admet une structure PL (linéaire par morceaux) et celle-ci est unique à un PL-homéomorphisme près.*

De plus, les résultats de Hirsch, Munkres et Cerf ont amélioré notre compréhension de différences entre les variétés lisses et les variétés PL. Dans notre cas ceci donne le résultat suivant :

Théorème 1.4. *Toute 3-variété topologique fermée admet une structure lisse et celle-ci est unique à un difféomorphisme près.*

Ce résultat diffère drastiquement de la situation en dimension 4 : on connaît des exemples de 4-variétés topologiques qui n'admettent ni de structure PL ni de structure lisse, ainsi que des 4-variétés topologiques qui admettent une infinité de structures lisses non-équivalentes.

L'un des grands succès de la classification en dimension 3 est la complétion du programme de Thurston en 2003 par Perelman. Le programme démontre en particulier la conjecture de Poincaré originale. Rappelons un résultat plus ancien, en commençant par la notion d'une variété première :

Définition. On dit que une variété M non triviale (i.e. différente de la sphère) est une variété *première* si elle ne peut pas être décomposée en une somme connexe de deux variétés non triviales.

On rappelle également que la somme connexe est bien définie à un homéomorphisme près. C'est une opération associative et commutative ayant pour élément neutre la sphère. On a un résultat de décomposition important en dimension 3 :

Théorème 1.5 (Kneser). *Toute 3-variété fermée orientable M peut être décomposée en somme connexe de variétés premières P_1, \dots, P_n . De plus, les facteurs de cette décomposition sont uniques à une permutation près et à un homéomorphisme près.*

Ce théorème implique que l'étude des 3-variétés fermées orientées peut se réduire à l'étude des variétés premières. On les classifie en trois groupes en fonction de leur groupe fondamental : les variétés avec π_1 fini, les variétés avec π_1 infini cyclique et les variétés avec π_1 infini non cyclique. Il se trouve que le deuxième cas est assez simple : la seule variété avec π_1 infini cyclique est $S^1 \times S^2$. Le premier cas est fortement lié à la conjecture de Poincaré et est réglé par le théorème suivant :

Théorème 1.6 (Théorème d'elliptisation). *Soit M une 3-variété fermée avec $\pi_1(M)$ fini, alors M admet une métrique Riemannienne de courbure sectionnelle positive constante.*

Les résultats classiques de la géométrie riemannienne impliquent qu'une telle variété est donc un quotient de S^3 par un groupe fini d'isométries agissant librement.

Lorsque π_1 est infini non cyclique, la classification se trouve être la plus compliquée. On commence par remarquer que toute variété de ce type est $K(\pi, 1)$, et donc la théorie d'homotopie impose déjà des restrictions sur les π_1 possibles. Cependant, il est assez difficile de classer tout les groupes réalisables de cette manière.

On dit qu'une surface $S \xrightarrow{i} M$ est *incompressible* si i est un plongement et $\pi_1(i) : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ est une injection. Pour une 3-variété première M , on procède donc en découpant le long des tores incompressibles. Il se trouve que ce processus de décomposition donne un résultat remarquable :

Théorème 1.7 (Théorème de géométrisation de Thurston). *Soit M une variété fermée orientée première. Alors il existe une collection finie de tores disjoints incompressibles P_1, \dots, P_n dans M telle qu'en découpant M le long des P_1, \dots, P_n , l'intérieur de toute composante peut être munie d'une structure géométrique complète de volume fini.*

Remarque. L'existence d'une telle géométrie (canonique à quelques exceptions près) peut être vue comme une version tridimensionnelle de l'existence de la métrique à courbure constante sur les surfaces orientées fermées. Une description plus détaillée de l'histoire de classification des 3-variétés avant la preuve de Perelman peut être trouvée dans [10].

Il existe également un théorème qui donne une manière de construire toutes les 3-variétés par des méthodes relevant de la chirurgie :

Théorème 1.8 (Lickorish–Wallace). *Soit M une 3-variété fermée orientable, alors M peut être obtenu suite à une chirurgie de Dehn sur S^3 le long d'un entrelacs.*

Ce théorème a mis en évidence les liens profonds entre la topologie en dimension 3 (et, par conséquent, 4) et la théorie des noeuds.

Enfin, un autre résultat important qui a considérablement contribué à la compréhension des 3-variétés est la découverte des *TQFTs* (Topological quantum field theories). Établissant un lien profond entre la topologie en basse dimension et la physique mathématique moderne, les TQFTs ont été initialement décrites par Witten en 1982 et formulées rigoureusement par Atiyah en 1988.

L'idée principale des TQFTs est d'associer aux n -variétés des espaces vectoriels, et aux $(n + 1)$ -variétés à bord des morphismes entre les espaces vectoriels associés aux composants de bord. En particulier, cette approche a connu un grand succès en dimension $2 + 1$, donnant naissance à de nouveaux invariants en dimension 3.

Une partie importante des TQFTs en dimension $2 + 1$ provient de la physique mathématique, l'espace-temps de dimension $2 + 1$ étant un terrain d'essai pour de nombreuses théories de physique moderne. Avec l'introduction de la formulation en termes fonctoriels, des constructions plus combinatoires ont émergé. Des exemples de théories et d'invariants issus de l'étude des TQFTs comprennent l'invariant de Chern-Simons, l'invariant de Casson-Walker, le polynôme de Jones et la théorie de Gromov-Witten.

2 Résultats récents et méthodes modernes

Le but de cette section est d'exposer les méthodes modernes utilisées pour les problèmes de topologie en dimension 4. La première partie expose l'approche chirurgicale à la classification des 4-variétés, qui s'est développée en une théorie combinatoire non-triviale. Les deux sous-sections suivantes visent la question non-évident - comment peut-on représenter les 4-variétés de manières maniables.

2.1 Théorie de Morse et combinatoire des anses

Décrivons d'abord l'approche la plus classique à la topologie des variétés lisses. Les résultats classiques de la théorie de Morse et de chirurgie impliquent le fait suivant : toute variété lisse admet une décomposition en anses. Bien que la combinatoire des anses devienne plus simple à partir de la dimension 5 grâce au "Whitney trick", on peut quand même étudier cette combinatoire en dimension 4. Un résultat très important de Laudenbach et Poénaru [14] nous dit que la donnée la plus importante sont les anses d'indice 0, 1 et 2 :

Théorème 2.1. *Soit M une 4-variété lisse connexe compacte construite en utilisant les 0-, 1- et 2-anses. Alors il existe une unique (à difféomorphisme près) manière d'attacher les 3- et 4-anses pour obtenir une 4-variété lisse connexe fermée.*

Un résultat simple de la théorie de chirurgie nous dit qu'en plus on peut utiliser juste une 0-anse.

En prenant en compte que les 1- et 2- anses sont attachées au bord S^3 de la 0-anse D^4 , avec les régions d'attachement correspondantes $S^0 \times D^3$ et $S^1 \times D^2$. On s'intéresse alors aux plongements de $S^0 \times D^3$ et $S^1 \times D^2$ dans la sphère S^3 . Enfin, en identifiant S^3 avec $\mathbb{R}^3 \amalg \{\infty\}$ et un plongement de $S^1 \times D^2$ avec un noeud parallélisé, on arrive à la définition d'un *diagramme de Kirby* :

Définition. Un diagramme de Kirby consiste d'un nombre fini de $D^3 \amalg D^3$ et d'un entrelacs parallélisé. On remarque que des noeuds peuvent aussi passer par les 1-anses, et donc sur les diagrammes ils sont représentés par les arcs joignant les bords des D^3 .

Exemple. On donne quelques exemples de diagrammes de Kirby pour les 4-variétés classiques. La sphère S^4 admet un diagramme vide, car on peut la décomposer en une 0- anse et une 4-anse. Un diagramme consistante de $2n$ copies de D^3 disjointes correspond à $\#^n S^1 \times S^3$. Un diagramme consistante d'un noeud trivial correspond à un D^2 -fibré sur S^2 (et le fibré explicite est déterminé par la parallélisation choisie). En particulier, $\mathbb{C}P^2$ est donné par un noeud trivial avec une parallélisation spécifique. Enfin, l'entrelacs de Hopf avec une bonne parallélisation est un diagramme de Kirby de $S^2 \times S^2$.

Alors qu'on peut associer un diagramme de Kirby à toute 4-variété lisse, elle n'est pas unique. Ceci nous donne un problème d'équivalence non-triviale,

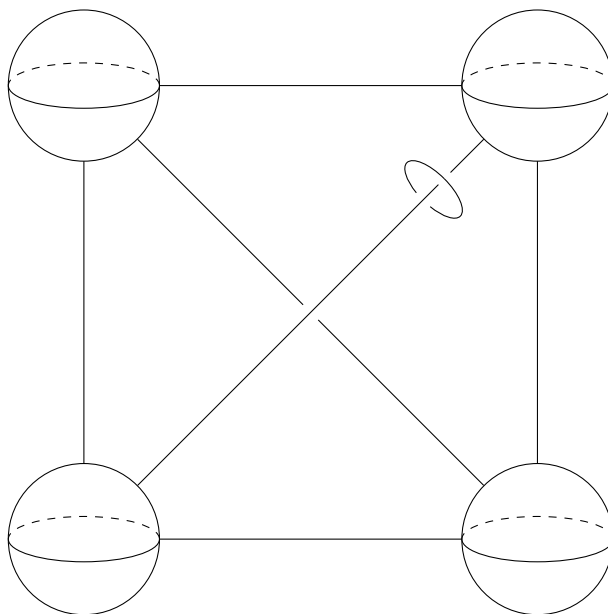


FIGURE 1 – Un diagramme de Kirby d'une 4-variété

donné par les mouvements de Kirby. Le calcul de Kirby est un des outils centraux de la topologie en dimension 4, qui a permis de réfuter plusieurs contre-exemples potentiels à la conjecture de Poincaré lisse. On peut trouver une introduction complète aux diagrammes de Kirby et leur applications à la topologie des 4-variétés dans [8].

2.2 Lacets dans le complexe de pantalons

Alors que la décomposition en anses est un outil universel, les diagrammes de Kirby peuvent être peu maniables. Entre autre, l'universalité d'un tel point de vue peut être vue comme un désavantage, car l'approche ne révèle pas les spécificités de la dimension 4. On cherche ainsi les méthodes alternatives de représentation des variétés, possiblement applicables seulement pour des petites dimensions. Dans cette section et la section suivante on présente brièvement quelques constructions plus modernes.

Définition. Soit Σ une surface fermée orientable de genre $g \geq 2$. Une décomposition en pantalons de Σ est un ensemble de $3g - 3$ courbes disjointes sur Σ telles qu'en découpant Σ le long de ces courbes, on obtient une union

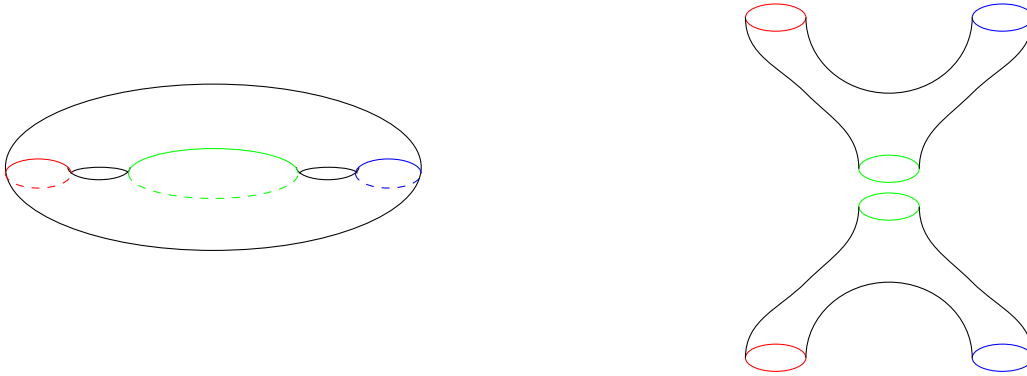


FIGURE 2 – Une décomposition en pantalons

disjointe de "pantalons" - surfaces compactes orientées à 3 composantes de bord.

Remarque. On peut étendre la définition au cas Σ de genre 1 : une décomposition en pantalons correspond alors juste à une classe d'isotopie d'une courbe fermée simple non-séparante.

Dorénavant on sous-entend par "courbe" une classe d'isotopie d'une courbe fermée simple, et par "surface" une surface fermée orientable. On note aussi $\Sigma_{p,q}$ une surface compacte orientable de genre p à q composantes de bord. On peut étendre la définition au cas Σ de genre 1 : une décomposition en pantalons correspond alors juste à une classe d'isotopie d'une courbe fermée simple non-séparante.

Définition. Soit Σ une surface de genre $g \geq 1$. On définit un *complexe de pantalons* associé à Σ de manière suivante :

- les sommets correspondent aux décompositions en pantalons de Σ : $(\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3})$,
- il y a deux types d'arêtes : arêtes de type A et de type S . Deux sommets $P = (\gamma_i)$ et $Q = (\gamma'_i)$ sont connectés par une arête seulement si pour tout i sauf un certain $1 \leq j \leq 3g-3$ on a $\gamma_i = \gamma'_i$. En découpant Σ le long des courbes $(\gamma_i)_{i \neq j}$, il nous reste deux courbes γ_j et γ'_j soit sur $\Sigma_{0,4}$, soit sur $\Sigma_{1,1}$. Alors P et Q sont connectés par une arête de type A si γ_j et γ'_j s'intersectent en deux points sur $\Sigma_{0,4}$, et par une arête de type S si γ_j et γ'_j s'intersectent en un point sur $\Sigma_{1,1}$.

On note ce complexe $\mathcal{P}(\Sigma)$.

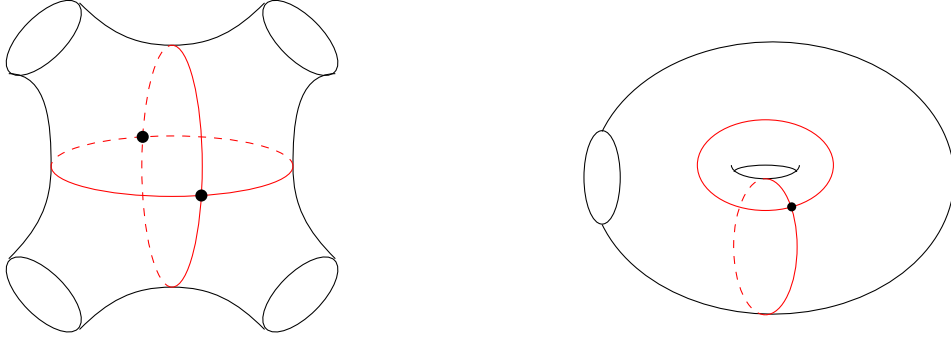


FIGURE 3 – Les arêtes de type A et S respectivement

Remarque. Il existe aussi une façon naturelle d'ajouter des 2-cellules, mais la définition est assez technique et n'est pas importante dans le contexte de ce mémoire.

Théorème 2.2 (Hatcher [9]). *Le complexe de pantalons est connexe, et, en considérant les 2-cellules, simplement connexe.*

Enfin, on présente la connexion entre cette construction et les 4-variétés :

Théorème 2.3 (Islambouli et Klug [12]). *Pour toute 4-variété fermée lisse orientable X il existe une surface Σ de genre $g \geq 1$ telle qu'on peut associer à X un lacet $\gamma(X)$ dans $\mathcal{P}(\Sigma)$. Inversement, pour toute surface Σ de genre $g \geq 1$ et tout lacet γ dans $\mathcal{P}(\Sigma)$ on peut associer une 4-variété lisse fermée $X(\gamma)$. De plus, une orientation de X fournit une orientation de γ , et réciproquement, une orientation de γ fournit une orientation de X .*

Remarque. Il est important de remarquer que par un "lacet dans $\mathcal{P}(\Sigma)$ " on sous-entend un lacet graphe-théorique, et pas un lacet topologique. Il commence donc dans un sommet P du complexe de pantalons, et consiste à une suite d'arêtes revenant au même sommet P .

Étant donné le cadre de ce mémoire, une explication détaillée de cette construction le dépasse. Par conséquent, nous en ferons une description plus générale. On appelle un handlebody une 3-variété connexe obtenue avec seulement des 0- et 1-anses. On commence par la notion importante d'un *scindement de Heegard* :

Définition. Soit M une 3-variété fermée orientée. Alors il existe une surface compacte orientée Σ et deux handlebodies Y, Z tels que $\partial Y = \overline{\partial Z} = \Sigma$ et $M = Y \cup_{\Sigma} Z$. On appelle un tel triplet Y, Z, Σ un scindement de Heegaard de M , ou parfois on se réfère simplement à la surface $\Sigma \subseteq M$ comme un scindement de M .

Remarque. Le scindement de Heegaard n'est pas unique, de même que la décomposition en anses. Cependant, un résultat dû à Reidemeister et Singer affirme que deux scindements sont équivalents à des stabilisations près. La preuve de ce résultat peut être trouvée dans l'article [13].

On peut enfin donner les éléments de la correspondance entre les lacets dans $\mathcal{P}(\Sigma)$ et les 4-variétés fermées :

Soit P un sommet d'un complexe de pantalons. Les courbes de P sur Σ peuvent servir comme les sphères d'attache pour les 2-anses tridimensionnelles, qui nous permettent d'obtenir (quitte à rajouter des 3-anses additionnelles) un handlebody $Y(P)$ de bord Σ . De plus, pour deux points P et Q on peut recoller les handlebodies correspondants (en renversant l'orientation d'un des deux) le long de Σ pour obtenir une 3-variété fermée orientée $M(P, Q) = Y(P) \cup_{\Sigma} \overline{Y(Q)}$. Si P et Q sont connectés par une arête W , on peut "remplir" cette variété canoniquement pour obtenir une 4-variété $X(W)$ de bord $M(P, Q)$. Ensuite, étant donné que le bord $M(P, Q)$ est la réunion de $Y(P)$ et $\overline{Y(Q)}$, si nous avons une arête W entre P et Q et W' entre Q et R , nous pouvons coller $X(W)$ et $X(W')$ le long de $Y(Q)$. On peut ainsi associer à un chemin $\gamma = (W_0, \dots, W_n)$, débutant au point P et se terminant au point S , une 4-variété $X(\gamma)$ à bord $Y(P) \cup_{\Sigma} \overline{Y(S)}$. Enfin, si γ est un lacet, alors $Y(P) = Y(S)$, on peut donc recoller deux composantes de bord pour obtenir une 4-variété fermée $X_c(\gamma) = X(\gamma) / \{Y(P) \sim_{id} Y(S)\}$.

Réciproquement, soit X une 4-variété fermée orientée, fixons une décomposition en anses de X . On note X^i la réunion de tout les j -anses pour $j \leq i$. Par le résultat de Laudenbach et Poénaru on sait que X^2 est suffisant pour déterminer X . Soit $M = \partial X^1$ une 3-variété fermée orientée et soit Σ_0 son scindement de Heegaard. L'information d'attachement des 2-anses est donnée par un entrelacs dans $\partial X^1 = M$ et une parallélisation. Quitte à stabiliser Σ_0 vers un scindement Σ , on peut pousser l'entrelacs avec sa parallélisation dans la surface Σ . On obtient donc un système de courbes disjointes dans une surface Σ , qu'on peut compléter (d'une manière non unique) à une décomposition en pantalons de Σ , qu'on appelle Q . En commençant en un point P ,

correspondant à une décomposition privilégiée, on sait construire un chemin W vers Q tel que $X(\gamma) = X^2$. Enfin, il existe un chemin inverse W' qui nous donne les 3-anses, on a donc $\gamma = W \cup W'$ et $X_c(\gamma) = X$.

La question naturelle se pose : dans quel cas deux chemins dans $\mathcal{P}(\Sigma)$ représentent-ils la même variété de dimension 4 (à un difféomorphisme près) ? Cependant, le problème d'équivalence est loin d'être triviale, car le scindement de Heegard n'est unique qu'à une stabilisation près. On se ramène ainsi à un problème combinatoire qui ne vit plus dans un graphe de $\mathcal{P}(\Sigma)$, mais dans un tour superposé de tels graphes, avec une identification non-triviale entre les niveaux différents. L'équivalence de cette approche avec certaines autres constructions est exposée dans [11].

2.3 Fibrations de Lefschetz

Une autre approche à la représentation des 4-variétés consiste à remplacer la théorie de Morse, utilisant les fonctions de type $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ pour étudier la topologie de la variété, par une théorie plus complexe, appelée parfois la théorie de 2-fonctions de Morse, qui utilise les fonctions de type $f : M \rightarrow S$, où S est une 2-variété (typiquement D^2, \mathbb{C} ou une surface fermée Σ_g). Dans cette section on se concentre sur un cas particulier de telles fonctions, qu'on appelle les fibrations de Lefschetz cassées. Cependant comme dans le cas de la théorie de Morse, on introduit d'abord les types de singularités locales permises :

Définition. Soit X une 4-variété fermée orientée, Σ une surface fermée orientée et $f : X \rightarrow \Sigma$ une fonction lisse. On dit que

- f possède une singularité de type Lefschetz en x si elle est de la forme (à un changement de coordonnées locales près) $f(u, v) = u^2 + v^2$, où $(u, v) \in \mathbb{C}^2, u^2 + v^2 \in \mathbb{C}$,
- f possède une singularité circulaire le long d'une 1-variété $Z \subseteq X$ si elle est de la forme $f(t, x, y, z) = (t, x^2 + y^2 - z^2)$, où t est la coordonnée locale de Z .

On dit que f est une fibration de Lefschetz cassée (BLF) si f est une surjection qui est une submersion partout, sauf un nombre fini de singularités de Lefschetz $x_1, \dots, x_i \in X$ et un nombre fini de singularités circulaires $Z_1, \dots, Z_j \subseteq X$.

De plus, si Σ est une sphère S^2 , on permet aussi des singularités de la forme $f(u, v) = u/v$ et on dit que f est un pinceau de Lefschetz cassé (BLP).

La fibre F de f en dehors des singularités est appelée la fibre générique, ou simplement la fibre. Un simple calcul dimensionnel indique que F est une 2-variété lisse fermée. Cependant, on remarque que F n'est pas forcément connexe.

Remarque. L'adjectif "cassée" fait référence à un concept déjà existant de fibrations/pinceaux de Lefschetz, qui permettent uniquement des singularités de type Lefschetz. À l'origine, cette construction trouve une motivation géométrique assez directe - les courbes complexes passant par un point x sur une surface complexe X donnent lieu à une fibration d'un voisinage $U_x \setminus \{x\}$ sur $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$, avec une singularité de type Lefschetz au point x .

L'introduction d'un type additionnel de singularités possibles par rapport aux fibrations de Lefschetz "classiques" a permis d'établir le résultat suivant :

Théorème 2.4 (Baykur [4], Gay-Kirby [7], Etnyre-Fuller [5]). *Soit X une 4-variété lisse fermée orientée, et soit F une surface fermée orientable de carrée (homologique) nulle dans X . Alors il existe un pinceau de Lefschetz cassé de fibre F .*

La démonstration de ce théorème repose sur la théorie de Cerf, qui consiste en l'étude de familles de fonctions de Morse, ainsi qu'une analyse minutieuse des singularités génériques de ces fonctions. En admettant ce théorème, nous souhaitons aborder la question de l'équivalence et de la classification. Cependant, avant d'y parvenir, nous devons d'abord répondre à une question plus pratique : comment représenter et manipuler de telles fibrations ? Nous commencerons par introduire quelques notions de base, puis nous présenterons une esquisse des concepts plus avancés.

Définition. Soit f une fibration de Lefschetz cassée. On appelle Z le lieu géométrique de singularités circulaires et son image $f(Z)$ l'image ronde de f . Si f est un pinceau de Lefschetz cassé, les points singulières de la forme $f(u, v) = u/v$ sont appelés les points de base de f .

L'image ronde $f(Z)$ et l'image de points singulières nous donne un graphe sur la base Σ . On peut compléter ce graphe avec l'information de monodromie autour de points singulières et de passage à travers les composantes de Z . Il se trouve que cette information nous permet de reconstruire la 4-variété X . La combinatoire de l'information contenue dans l'image ronde $f(Z)$ est

fortement liée au calcul de Kirby mentionné précédemment, et on va donc ne pas rentrer dans les détails, qui peuvent être consultés dans [6].

On se concentre donc sur les pinceaux de Lefschetz sans singularités circulaires. Bien que nous n'ayons pas de résultat d'existence pour une 4-variété arbitraire X , ce cas plus régulier présente une connexion intéressante avec la topologie des surfaces.

Comme décrit plus haut, l'information essentielle d'une telle fibration est comprise dans la fibre F , qui est une surface connexe de genre g , de points singulières sur S^2 (on peut toujours s'arranger de séparer les images de points critiques de f) et de la monodromie autour des points singulières x_1, \dots, x_n . Il se trouve que la monodromie est un invariant d'isotopie de lacets qui contournent un point singulier. Le groupe fondamentale de la sphère privée de n points est un groupe libre à $n-1$ générateurs, qu'on peut présenter par $\langle a_1, \dots, a_n \rangle / \{a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1\}$.

Enfin, il se trouve que la dégénérescence du fibre F en un point singulier x peut être caractérisée par un pincement de F en une courbe $\gamma(x)$ appelée un cycle disparaissant (*vanishing cycle*). L'action de monodromie autour d'un point singulier x_i sur la fibre F s'exprime alors par un élément d'un Mapping class group Map_g , donné par une torsion de Dehn autour le cycle $\gamma(x)$. En combinant avec l'observation sur précédent sur le $\pi_1(S^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ on arrive à une description importante d'un pinceau de Lefschetz : un pinceau de Lefschetz de fibre F est caractérisé par une factorisation d'identité de Map_g par un produit de torsions de Dehn. De plus, la somme de fibres de deux fibrations f_1 et f_2 de fibre F correspond à la concaténation de leurs factorisations correspondantes.

L'étude de fibrations de Lefschetz a des connexions diverses avec la topologie symplectique, et le concept a été initialement développé dans le cadre quasi-holomorphe dans [3]. La classification des fibrations de Lefschetz à une stabilisation près est étudiée dans des articles telles que [2] et [1].

3 Conclusion : Invariants et la conjecture de Poincaré lisse

La classification des 4-variétés lisses nécessite l'introduction d'invariants lisses en dimension 4, et elle débute par la compréhension de la conjecture de Poincaré lisse. D'un côté, les invariants recherchés doivent être suffisamment

fins et complexes pour distinguer des variétés homéomorphes, mais non difféomorphes. D'autre côté, les invariants doivent être suffisamment maniables pour permettre leur calcul dans les exemples connus. Enfin, on remarque que tout groupe de présentation fini G peut être réalisé comme groupe fondamentale d'une 4-variété fermée. Selon le résultat de Adyan et Rabin, il n'existe pas d'algorithme qui détermine si une présentation finie présente le groupe triviale. Ainsi Markov a établi le résultat suivant : il n'existe pas d'algorithme qui détecte si deux 4-variétés fermées sont difféomorphes ou non. Cela implique qu'en recherchant les invariants sensibles à la structure lisse en dimension 4, on ne peut pas espérer de trouver des invariants universels, qui soient définis pour toutes les 4-variétés, et on doit chercher des invariants bien définies pour une classe restreinte des variétés (par exemple, simplement connexes, symplectiques, complexes etc.). Dans cette section on décrit brièvement les approches modernes à la construction des invariants lisses pour des classes différentes de 4-variétés, ainsi que des invariants déjà existantes, dont le cadre d'applicabilité s'étend avec le temps :

Les invariants provenant de la théorie de jauge. L'idée de base, appliquée avec succès d'abord par Donaldson et plus tard par Seiberg et Witten, est assez intuitive : pour pouvoir distinguer des structures lisses sur une variété, on étudie des équations différentielles de nature géométrique et leur espaces de modules de solutions.

D'abord appliquée aux équations Yang-Mills par Donaldson, et puis appliquée aux équations Seiberg-Witten, cette idée a permis d'établir des multiples résultats importants qui ont fortement changé la vision générale sur les 4-variétés lisses. L'approche a été ensuite développée par Floer, en introduisant la homologie de Floer. Le concept a été élargi par Kronheimer et Mrowka en développant la homologie de Seiberg-Witten-Floer, ainsi que par Ozsváth et Szabó en introduisant la homologie de Heegaard-Floer. Par la suite, Manolescu a pu appliquer ces outils pour démontrer l'existence de variétés non-triangulables en toute dimension $n \geq 5$, généralisant ainsi le résultat connu pour la dimension 4. Enfin, Frøyshov, Taubes et d'autres mathématiciens ont pu fortement avancer notre compréhension de ces théories, en les connectant entre elles et avec des invariants des 3- et 4-variétés déjà connus.

Cette approche permet d'obtenir des résultats remarquables concernant les variétés dont le second nombre de Betti b_2 est assez grand. On a pu ainsi démontrer l'existence d'une infinité de structures lisses distinctes sur $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$ pour $2 \leq k \leq 7$, la preuve pour les petits k étant de plus en plus

compliquée.

La difficulté la plus importante du calcul de Kirby étant la théorie des nœuds et entrelacs dans S^3 , il est assez naturel d'étudier *les invariants associés aux nœuds*.

Voici quelques contributions récentes dans cette direction : la résolution d'un cas particulier de problème de concordance pour les nœuds par Piccirillo, un développement significatif des relations entre les nœuds et la homologie de Floer par Manolescu, une étude de comportement de complexité des diagrammes de nœuds par Lackenby, Birman et Menasco. Ces réalisations ainsi que d'autres ont jeté de la lumière sur les liens beaucoup plus profonds entre la théorie des nœuds et les 4-variétés. En particulier, ils ont établi le lien entre la conjecture de Poincaré lisse et les questions formulées en termes de la combinatoire des nœuds dans S^3 .

Néanmoins, la combinatoire reste très compliquée et il est rare d'obtenir les résultats de nature universelles. Un des problèmes importants est la complexité du problème d'équivalence de diagrammes planaires du même nœud. Les bornes a priori sur la complexité de diagrammes intermédiaires entre deux diagrammes équivalents donnés sont peu efficaces. En particulier on rencontre les diagrammes du nœud trivial dont le nombre de croisements est un minimum local. On remarque cependant une émergence récente de méthodes informatiques basées sur le machine learning. Dans les efforts visant à comprendre cette combinatoire complexe, on effectue des calculs explicites pour les classes larges de nœuds connus. En particulier, on essaye de trouver des nœuds vérifiant les propriétés combinatoires importantes pour une construction de contre-exemples possibles à la conjecture de Poincaré lisse.

La multitude de présentations possibles de 4-variétés lisses nous pousse à rechercher des *invariants provenant de la combinatoire alternative* au calcul de Kirby. En se basant sur les approches exposées dans ce mémoire — fibrations de Lefschetz et chemins dans le complexe de pantalons — on présente le développement moderne et les problèmes liés. Les deux présentations sont fortement liées à la topologie de surfaces, de l'espaces de modules et du Mapping Class Group. Ceci ouvre un chemin vers une branche de mathématiques modernes très active.

Des directions de développement de cette approche comprennent l'existence et la classification des fibrations de Lefschetz, étudiées par Akhmedov, Auroux, Baykur, Akbulut et Karakurt, la combinatoire correspondante du Mapping Class Group, étudiée par Baykur, Hayano et Auroux, ainsi que l'extraction d'invariants maniables et l'étude de l'équivalence des présentations,

réalisées par Islambouli, Klug, Gay, Kirby et Thompson. De plus, grâce à la construction et à la motivation initiale derrière les fibrations de Lefschetz, la recherche dans cette direction est aussi étroitement liée à la géométrie symplectique et presque-symplectique.

La grande difficulté de cette approche est partiellement due au fait que la compréhension approfondie de la topologie des surfaces et de l'espace des modules, bien qu'attirant l'attention de nombreux mathématiciens de haut niveau, reste encore incomplète. Une autre difficulté apparente réside dans la manipulation des invariants obtenus à partir des chemins sur les graphes et des factorisations de l'identité dans un groupe, ces deux structures combinatoires étant très riches et complexes.

Enfin, les *invariants de type TQFT* peuvent représenter une autre direction prometteuse, étant donné leur élégance et leur universalité. Le développement des TQFTs en dimension $2 + 1$ a montré que la construction des invariants puissantes impose l'utilisation de structures algébriques très puissantes, comme les algèbres de Hopf et les catégories monoïdales tensorielles.

Le problème de classification en dimension 4 étant encore plus complexe qu'en dimension 3, une recherche de structures algébriques puissantes et de constructions de TQFTs correspondants a commencé. Lurie et Walker ont développé le concept des "higher TQFTs" qui connecte le problème des $3 + 1$ -TQFTs aux catégories supérieures. Bobtcheva, Piergallini et Habiro ont poursuivi une approche différente, en construisant des structures algébriques beaucoup plus complexes et riches que les algèbres de Hopf, en restant dans le cadre des 1-catégories. Enfin, Reutter a montré que les TQFTs de nature semi-simple ne peuvent pas produire des invariants sensibles aux structures lisses exotiques en dimension 4, établissant ainsi une condition nécessaire sur la complexité algébrique des TQFTs possibles.

Il y a deux problèmes importants avec cette approche, le premier étant une très grande difficulté de construction des TQFTs explicites dans des cadres algébriques tellement avancés, et le deuxième étant la complexité des calculs nécessaires pour pouvoir vérifier l'efficacité des TQFTs déjà construits et rendre les invariants obtenus maniables.

En conclusion, la recherche des invariants lisses en dimension 4 prouve être une tâche difficile, nécessitant un équilibre subtil entre la complexité, reflétant la complexité exceptionnelle des 4-variétés, et la maniabilité, importante pour leur application concrète. Les approches décrites ci-dessus présentent chacune leurs avantages et défis, mais il est très important de souligner leur interconnexion profonde.

Alors que la résolution de la conjecture de Poincaré lisse et, par extension, la classification de 4-variétés de certaines classes (par exemple, les variétés simplement connexes) demeurent insaisissables, la recherche moderne et la multitude d’approches continuent à enrichir notre compréhension du monde des 4-variétés. Il est important de remarquer que ces problèmes sont profondément liés à la topologie en dehors de la dimension 4, ainsi qu’à divers domaines des mathématiques et même à la physique mathématique et théorique.

Finalement, grâce aux récents développements dans différentes directions et à l’utilisation de méthodes de recherche assistée par ordinateur, nous restons optimistes quant à la résolution de la conjecture de Poincaré lisse et à notre compréhension croissante de la topologie en basse dimension.

Références

- [1] Denis AUROUX. « A stable classification of Lefschetz fibrations ». English. In : *Geom. Topol.* 9 (2005), p. 203-217. ISSN : 1465-3060. DOI : 10.2140/gt.2005.9.203.
- [2] Denis AUROUX. « Fiber sums of genus 2 Lefschetz fibrations ». English. In : *Turk. J. Math.* 27.1 (2003), p. 1-10. ISSN : 1300-0098.
- [3] Denis AUROUX, Simon K. DONALDSON et Ludmil KATZARKOV. « Singular Lefschetz pencils ». English. In : *Geom. Topol.* 9 (2005), p. 1043-1114. ISSN : 1465-3060. DOI : 10.2140/gt.2005.9.1043.
- [4] R. Inanç BAYKUR. « Existence of broken Lefschetz fibrations ». English. In : *Int. Math. Res. Not.* 2008 (2008). Id/No rnn101, p. 15. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1093/imrn/rnn101.
- [5] John B. ETNYRE et Terry FULLER. « Realizing 4-manifolds as achiral Lefschetz fibrations ». English. In : *Int. Math. Res. Not.* 2006.6 (2006). Id/No 70272, p. 21. ISSN : 1073-7928.
- [6] David GAY et Robion KIRBY. « Reconstructing 4-manifolds from Morse 2-functions ». English. In : *Proceedings of the Freedman Fest. Based on the conference on low-dimensional manifolds and high-dimensional categories, Berkeley, CA, USA, June 6–10, 2011 and the Freedman symposium, Santa Barbara, CA, USA, April 15–17, 2011 dedicated to Mike Freedman on the occasion of his 60th birthday.* Coventry : Geometry & Topology Publications, 2012, p. 103-114.

- [7] David T. GAY et Robion KIRBY. « Constructing Lefschetz-type fibrations on four-manifolds ». English. In : *Geom. Topol.* 11 (2007), p. 2075-2115. ISSN : 1465-3060. DOI : 10.2140/gt.2007.11.2075.
- [8] Robert E. GOMPF et András I. STIPSICZ. *4-manifolds and Kirby calculus*. English. T. 20. Grad. Stud. Math. Providence, RI : American Mathematical Society, 1999. ISBN : 0-8218-0994-6.
- [9] Allen HATCHER. « Pants Decompositions of Surfaces ». In : (1999). arXiv : math/9906084 [math.GT].
- [10] Allen HATCHER. « The Classification of 3-Manifolds — A Brief Overview ». In : 2004.
- [11] Gabriel ISLAMBOULI. *Uniqueness of 4-manifolds described as sequences of 3-d handlebodies*. 2021. arXiv : 2111.08924 [math.GT].
- [12] Gabriel ISLAMBOULI et Michael KLUG. « Representing smooth 4-manifolds as loops in the pants complex ». English. In : *Math. Res. Lett.* 28.6 (2021), p. 1703-1738. ISSN : 1073-2780. DOI : 10.4310/MRL.2021.v28.n6.a4.
- [13] François LAUDENBACH. « A proof of Reidemeister-Singer's theorem by Cerf's methods ». English. In : *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)* 23.1 (2014), p. 197-221. ISSN : 0240-2963. DOI : 10.5802/afst.1404.
- [14] François LAUDENBACH et Valentin POENARU. « A note on 4-dimensional handlebodies ». English. In : *Bull. Soc. Math. Fr.* 100 (1972), p. 337-344. ISSN : 0037-9484. DOI : 10.24033/bsmf.1741.