

MARCHES ALÉATOIRES SUR LES GROUPES HYPERBOLIQUES

GUILLAUME CHEVALIER

TABLE DES MATIÈRES

1. Préliminaires	2
1.1. Vocabulaire des graphes	2
1.2. Fonction de Green et chaînes de Markov	2
2. Marche aléatoire sur un arbre étiqueté	5
2.1. Marche aléatoire sur un graphe et sur un graphe étiqueté	5
2.2. Le cas des arbres étiquetés involutifs	6
3. Marche aléatoire sur un groupe hyperbolique	8
3.1. Groupe hyperbolique	8
3.2. Marche aléatoire et asymptotiques de probabilités	9
4. Perspectives	11
Références	11

Mon objectif dans ce court document est de vous présenter précisément le cadre de l'étude des marches aléatoires sur des groupes hyperboliques ainsi que quelques résultats principaux de cette étude. Le résultat au cœur de ce travail est que pour une marche aléatoire admissible, symétrique à support fini sur un groupe hyperbolique, la probabilité d'aller d'un point a à un point b en $n \in \mathbb{N}$ pas, dénotée $p^{(n)}(a, b)$ satisfait l'équivalence suivante :

$$(0.1) \quad p^{(n)}(a, b) \sim C(a, b)R^{-n}n^{-3/2}$$

où R est le rayon de convergence des fonctions de Green (Cf. définition 1.7) associée à la marche aléatoire, et $C(a, b)$ est une constante dépendant de (a, b) .

1. PRÉLIMINAIRES

Afin de poser le cadre dans lequel nous allons travailler nous commençons par quelques définitions classiques.

1.1. Vocabulaire des graphes.

Définition 1.1. *Graphes / Graphes symétrique*

-Un *graphe* \mathcal{G} est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble et E est une sous partie de $V \times V$. Les éléments de V sont appelés sommets, tandis que les éléments de $E \subseteq V \times V$ sont appelés arêtes.

-On dira que le graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est *symétrique* si pour toute arête $(v_1, v_2) \in E$, (v_2, v_1) est aussi une arête (c'est à dire que $(v_2, v_1) \in E$).

Remarque 1.2. La définition de "graphe symétrique" précédente est plus connue sous le nom graphe non-orienté. Cependant, nous souhaitons ici distinguer les deux arêtes (v_1, v_2) et (v_2, v_1) pour insister sur ce fait nous privilégions l'utilisation du terme "symétrique" à "non-orienté".

Définition 1.3. *Chemin / Cycle / Graphe Connexe :*

-Un *chemin* dans un graphe est une suite finie de sommets (v_0, \dots, v_n) telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, (v_i, v_{i+1}) est une arête du graphe. On appelle v_0 la *source*, v_n le *but* et n la longueur du chemin. Dans ce document, on notera aussi un chemin (v_0, \dots, v_n) comme la suite d'arêtes $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ où $\gamma_i := (v_{i-1}, v_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

-Un graphe sera dit *connexe* si pour toute paire de sommet il existe un chemin partant de source l'un et de but l'autre.

-Un *cycle* dans un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est un chemin (v_0, \dots, v_n) tel que sa source soit aussi son but, i.e que $v_0 = v_n$.

Définition 1.4. *arbre*

Un arbre est un graphe connexe acyclique.

1.2. Fonction de Green et chaînes de Markov.

Définition 1.5. *Chaîne de Markov*

Une *chaîne de Markov* est la donnée d'un ensemble appelé espace d'états X et d'une famille de mesures de probabilités sur X , indexée par $X : \{\mu_x\}_{x \in X}$.

Pour tout états $x, y \in X$, on appelle probabilité de transition de l'état x à l'état y , noté $p(x, y)$ la valeur $\mu_x(\{y\})$. Informellement, si un objet se trouve à l'état x à un "temps" donné, $\mu_x(y)$ nous donne la probabilité que ce même objet soit à l'état y au temps suivant. On notera (X, p) la chaîne de Markov.

Pour une chaîne de Markov (X, P) donnée, nous pouvons lui associer une marche aléatoire (X_n) . C'est à dire une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'espace d'état X , de loi induite par les probabilités de transitions $(p(x, y))_{x, y \in X}$, via l'ensemble des relations :

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x) = p(x, y)$$

Notez que pour une bonne définition (par récurrence) des lois des X_n , il faudra préciser la loi de X_0 . On prendra en général X_0 presque sûrement égal à une constante $x \in X$ fixée et on notera alors pour tout évènement A , $P_x(X_n \in A)$ pour $P(X_n \in A | X_0 = x)$. Soit (X, P) une chaîne de Markov et soient $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$ des états. Partant d'un objet à l'état x au temps $n = 0$, on notera $p^{(n)}(x, y) = P_x(X_n = y)$ la probabilité que ce même objet soit à l'état y au temps n .

Définition 1.6. *Chaîne de Markov irréductible*

Soit (X, p) une chaîne de Markov. On dit que la chaîne de Markov est irréductible si pour toute paire $(x, y) \in X^2$ il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $p^{(n)}(x, y) > 0$.

Dans la suite nous ne considérerons que des marches aléatoires irréductibles. L'outil principalement considéré dans ce texte est la fonction de Green, du nom du mathématicien anglais George Green (XIXe siècle). Les fonctions de Green sont les fonctions génératrices des suites de probabilité $(p^{(n)}(x, y))_n$ où x et y sont deux états.

Définition 1.7. *Fonction de Green*

Soit (X, P) une chaîne de Markov. La fonction de Green associée à la chaîne de Markov (X, P) est

$$(1.1) \quad G_r(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p^{(n)}(x, y)$$

Définition 1.8. *Opérateur de Markov*

On appelle opérateur de Markov associé à la chaîne de Markov (X, p) , communément noté P . l'opérateur qui a une fonction définie sur X , $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ (dans un certain espace de fonctions) associe l'application $Pf : x \mapsto \sum_y p(x, y)f(y)$.

Voici quelques propriétés remarquables issues de calculs directs satisfaites par les fonctions de Greens.

Propriété 1.9.

Soit (X, p) une chaîne de Markov irréductible et soit $G_r : X^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction de Green associée. Nous avons :

$$(1.2) \quad \forall y \in X, \forall r \geq 0, (I - rP)G_r(\cdot, y) = \delta_y$$

où I est l'opérateur identité et $\delta_y : X \rightarrow \{0, 1\}$ est le symbole de Kronecker prenant la valeur 1 en y et 0 partout ailleurs.

$$(1.3) \quad \forall (x, y) \in X^2, \forall r \geq 0, \frac{d}{dr}(rG_r(x, y)) = \sum_{z \in X} G_r(x, z)G_r(z, y)$$

$$(1.4) \quad \forall (x, y) \in X^2, \forall r \geq 0, \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r^2}{2}G_r(x, y)\right) = \sum_{z, w \in X} G_r(x, z)G_r(z, w)G_r(w, y)$$

Démonstration. Esquisse de preuve :

En ayant en tête la propriété de Markov

$$\forall (x, y) \in X^2, \forall n \in \mathbb{N}, p^{(n+1)}(x, y) = \sum_{z \in X} p(x, z)p^{(n)}(z, y),$$

l'équation (1.2) est immédiate.

La preuve des formules (1.3) et (1.4) est élémentaire et provient la décomposition des probabilités $p^{(n)}(x, y)$, comme la somme sur l'ensemble des suites de longueur n d'états, des probabilités que la marche aléatoire suive cette suite. Formellement si $\mathcal{Seq}(x, y)$ désigne l'ensemble des suites finies d'états de X , dont l'état initial est a et l'état final est b ; et si w_r est l'application qui a une telle suite (x_0, \dots, x_n) associe la valeur $w_r((x_0, \dots, x_n)) := r^n \times \prod_{i=1}^n p(x_{i-1}, x_i)$ alors :

$$(1.5) \quad G_r(x, y) = \sum_{\gamma \in \mathcal{Seq}(x, y)} w_r(\gamma).$$

□

Ces propriétés nous disent en quelque sorte que la dérivée $\partial_r G_r(x, y)$ est essentiellement contrôlée par les valeurs de $\sum_{z \in X} G_r(x, z)G_r(z, y)$ et la dérivée seconde est essentiellement contrôlée par les valeurs de $\sum_{z, w \in X} G_r(x, z)G_r(z, w)G_r(w, y)$. Nous ne le montrons pas ici, mais pour toute marche aléatoire irréductible, il n'est pas difficile de prouver que les fonctions de Green ont même rayon de convergence $R(x, y) \equiv R$.

2. MARCHE ALÉATOIRE SUR UN ARBRE ÉTIQUÉTÉ

2.1. Marche aléatoire sur un graphe et sur un graphe étiqueté.

Définition 2.1. *Marche aléatoire sur un graphe*

Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe. Pour chaque sommets v du graphe on se munit d'une mesure de probabilité à support inclus dans les voisins de v , μ_v . On rappelle que u est un voisin de v si (v, u) est une arête du graphe. On note A_v l'ensemble des voisins de V . $(V, \{\mu_v\}_v)$ caractérise alors une chaîne de Markov et la marche aléatoire associée correspond à celle d'un point se déplaçant aléatoirement à chaque pas de temps sur le graphe en suivant les arêtes de celui-ci.

Dans ce texte nous étudierons un cadre plus rigide de marche aléatoire, celui des marches aléatoires sur des graphes étiquetés.

Définition 2.2. *Graphe étiqueté*

Un *graphe étiqueté* est la donnée d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$, d'un ensemble fini S dont les éléments sont appelés « *étiquette* » et d'une application $lab : E \rightarrow S$ telle que la propriété suivante est satisfaite : Pour tout $v \in V$, la restriction de lab à l'ensemble des arêtes issues de v , A_v est une bijection sur S :

$$(2.1) \quad lab|_{A_v} : A_v \approx S$$

Remarque 2.3. La définition énoncée ici est en réalité celle d'un graphe étiqueté régulier. La définition initiale n'ayant point besoin de la propriété (2.1). Dans ce document nous ne considéreront que des graphes étiquetés ayant cette propriété, d'où le choix de prendre cette définition.

Remarquez que l'étiquetage n'est pas nécessairement symétrique : si (a, b) et (b, a) sont des arêtes du graphe alors rien n'indique qu'elles aient la même étiquette.

Exemple 2.4. Les graphes de Cayley de groupes finiment engendrés sont naturellement munis d'un étiquetage : $lab((g, gs)) = s$ pour tout générateur s et tout élément g du groupe.

Définition 2.5. *Marche aléatoire sur un graphe étiqueté*

Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe étiqueté par l'alphabet S . Une marche aléatoire sur un graphe étiqueté est une marche aléatoire sur le graphe \mathcal{G} telle que définit précédemment, où, en reprenant les notations de la définition précédente, on exige en plus qu'il existe un vecteur de probabilité $(p_1, \dots, p_k) \in [0, 1]^k$, $\sum_i p_i = 1$) indexé par S , $(p_s)_{s \in S}$ tel que pour tout $x \in V$, $\mu_x(y_s) = p_s$, avec y_s l'unique sommet de \mathcal{G} tel que $lab(x, y_s) = s$, et p est la loi de transition de la chaîne de Markov associée.

2.2. Le cas des arbres étiquetés involutifs.

En ce qui nous concerne ici, les marches aléatoires qui vont nous intéresser sont celles où le graphe considéré est un arbre et pour lesquelles le groupe des isométries du graphe préservant l'étiquetage (Cf. définition ci-dessous), agit transitivement sur l'ensemble des sommets du graphe. La proposition (2.7) nous donne une condition nécessaire et suffisante sur l'étiquetage de l'arbre pour que son groupe des isométries préservant l'étiquetage agisse transitivement sur les sommets de l'arbre.

Définition 2.6. *Isométrie préservant l'étiquetage du graphe*

Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe étiqueté d'alphabet S , on définit le groupe des isométries du graphe préservant l'étiquetage noté $Isom_S(\mathcal{G})$ comme l'ensemble des isométries $\rho : V \rightarrow V$ pour la distance qui à $(x, y) \in V^2$ associe le plus petit entier naturel n tel qu'il existe un chemin de longueur n entre x et y , telles que $\forall a, b \in V, lab(\rho(a), \rho(b)) = lab(a, b)$

Proposition 2.7.

Soit $\mathcal{T} = (V, E)$ un arbre régulier étiqueté par S . Soit $\Gamma = Isom_S(\mathcal{T})$ le groupe des isométries du graphe préservant l'étiquetage¹. Γ agit transitivement sur l'ensemble des sommets du graphe si, et seulement si, il existe une involution $s \mapsto \tilde{s}$, de S telle que $\forall (x, y) \in E, lab((x, y)) = s \Rightarrow lab((y, x)) = \tilde{s}$ (Note : C'est le cas des graphes de Cayley, l'involution est donnée par l'inverse $s \mapsto s^{-1}$).

De plus, si tel est le cas, l'action est libre, ou dans notre cas simplement transitive.

Démonstration. de la proposition 2.7.

« \Rightarrow » : On suppose que l'action est transitive. Il s'agit de montrer que pour tout $s \in S$, et toutes arêtes $(x, y), (x', y') \in E$ étiquetées s , les arêtes (y, x) et (y', x') ont même étiquettes. Soit $\rho \in Isom_S(\mathcal{T})$ envoyant x sur x' , puisque ρ préserve l'étiquetage, par la propriété (2.1), nécessairement $\rho(y) = y'$. Il suit alors que (y, x) et $(\rho(x), \rho(y)) = (x', y')$ ont même étiquette \tilde{s} . On pose alors l'involution $s \mapsto \tilde{s}$.

« \Leftarrow » : On suppose donnée une involution $\iota : S \rightarrow S$ telle que dans l'énoncé. Soient x et y deux sommets quelconques de V . Créons une isométrie $\rho \in Isom_S(\mathcal{T})$ envoyant x sur y . Cette involution permet d'introduire des règles de simplifications sur l'espace des mots S^ω sur l'alphabet S lui conférant une structure de groupe (de loi la concaténation des mots, d'élément neutre le mot vide, et où l'inverse de s est $\iota(s)$). On note Σ_S^ω l'ensemble des mots réduits d'alphabet S ayant pour règles de simplification $\{\iota(s)s\}_{s \in S}$. Ayant fixé $z \in V$, cet ensemble est

1. $Isom_S(\mathcal{T}) = \{\rho \in Isom(\mathcal{T}) : lab((x, y)) = lab((\rho(x), \rho(y)))\}$

en bijection avec l'ensemble des sommets V , via l'application qui envoie un mot $w \in \Sigma_S^\omega$ sur le but (le sommet final) du chemin de source z et dont les étiquettes successives des arêtes sont données par les lettres de w . En particulier elle envoie le mot vide sur le sommet z . On note $\varphi_z : \Sigma_S^\omega \rightarrow V$ cette bijection. Et on pose alors $\rho := \varphi_y \circ \varphi_x^{-1}$. On vérifie alors que $\rho \in \text{Isom}_S(\mathcal{T})$ et que $\rho(x) = y$. x et y étant des sommets quelconques de \mathcal{T} , l'action de $\text{Isom}_S(\mathcal{T})$ sur \mathcal{T} est transitive.

Enfin, soit $\rho \in \text{Isom}_S(\mathcal{T})$, x un sommet de \mathcal{T} et $y := \rho(x)$. Puisque ρ préserve l'étiquetage, on vérifie que l'application $\varphi_y^{-1} \circ \rho \circ \varphi_x$. Il suit que si $x = y$ alors $\rho = \text{Id}$. L'action est donc libre (ou autrement dit simplement transitive dans notre cas). \square

Remarque 2.8. Modulo le point de départ, une marche aléatoire sur un tel arbre étiqueté *involutif* est une marche aléatoire sur le groupe des isométries préservant l'étiquetage. De plus, dans ce cas, le groupe $\text{Isom}_S(\mathcal{G})$ est finiment engendré par les isométries qui envoient $x \mapsto y_s$ pour $s \in S$ et $\text{lab}(x, y_s) = s$.

Dans ce cas particulier des arbres étiquetés réguliers "involutifs" S.Lalley démontra en 1993 dans [LAL93] que les fonctions de Green associées à une marche aléatoire irréductible données, sont algébriques (C'est à dire que pour tout $(a, b) \in V^2$, il existe un polynôme $P_{(a,b)}$ à deux variables tel que $P_{(a,b)}(z, G_z(a, b)) \equiv 0$), et présentent toutes une singularité en $z = R$ de type $\sqrt{R - z}$. Il démontre alors en utilisant la méthode dite "Saddlepoint approximation" pour prouver le théorème suivant :

Theorem 2.9 (S.Lalley 1993).

Soit \mathcal{T} un arbre étiqueté sur un alphabet S . On considère la marche aléatoire sur \mathcal{T} associée au vecteur de probabilité $(p_s)_{s \in S}$. Si pour tout $s \in S$, $p_s > 0$ alors pour toute paire de sommets (x, y) de \mathcal{T}

$$p^{(n)}(x, y) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(x, y)\sqrt{R}}{2\sqrt{\pi}} R^{-n} n^{-3/2}$$

Remarque 2.10. En réalité S.Lalley démontra le théorème précédent pour des groupes libres, mais sa preuve s'applique mutatis mutandis au cas énoncé dans le théorème précédent.

Pour prouver ce résultat, l'on exploite fortement la propriété selon laquelle tout chemin reliant deux sommets a et b d'un arbre, passe nécessairement par chaque arête du plus court chemin reliant a et b . Dans le cas des groupes, du fait de la présence de cycle dans le graphe de

Cayley associé, ce n'est pas le cas, il nous faut donc réadapter les techniques utilisées. Certains résultats de la théorie des marches aléatoires sur les arbres ne s'appliquent pas; cependant, nous trouvons, tout de même, de mêmes asymptotiques de probabilités pour certains groupes : les groupes hyperboliques (voir théorème 3.11).

3. MARCHE ALÉATOIRE SUR UN GROUPE HYPERBOLIQUE

3.1. Groupe hyperbolique.

Définition 3.1. *Produit de Gromov :*

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $w \in X$. Sur cet espace, le produit de Gromov basé au point w , entre deux points $x, y \in X$ est :

$$(x|y)_w := \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$$

Définition 3.2. *Espace δ -hyperbolique*

Soit $\delta \geq 0$. Un espace métrique (X, d) est dit δ -hyperbolique s'il vérifie :

$$(3.1) \quad \forall x, y, z \in X, \forall w \in X, (x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta$$

On appelle δ constantes d'hyperbolicité de X , et on dit que X est hyperbolique. On désignera par *la* constante d'hyperbolicité de X le plus petit $\delta \geq 0$ tel que X soit δ -hyperbolique²

Exemple 3.3. -Les arbres muni de la distance $d(x, y) := \min\{n : \exists \gamma \text{ chemin de longueur } n \text{ entre } x \text{ et } y\}$ sont des espaces hyperboliques.

-Les variétés différentielles à courbure négative sont hyperboliques.

Définition 3.4. *Groupe hyperbolique*

Soit Γ un groupe de type fini et S un système générateur fini. Γ est dit hyperbolique si l'espace métrique Γ munit de la distance des mots d_S d'alphabet S est hyperbolique.

Pour rappel la distance des mots est définie par $d_S(x, y) = \min\{n : \exists s_1, \dots, s_n \in S : xs_1 \cdots s_n = y\}$

Une définition équivalente est la suivante : Un groupe Γ est hyperbolique s'il existe un espace métrique hyperbolique propre X tel que Γ admette une action proprement discontinue, isométrique, cocompacte sur X .

Exemple 3.5. -Les sous-groupes discrets cocompacts de $PSL_2(\mathbb{R})$ sont hyperboliques.

² Un espace hyperbolique admet une infinité de constante d'hyperbolicité, $\min\{\delta : X \text{ est } \delta\text{-hyperbolique}\}$. On se convainc par continuité de (3.1) en δ que X est bien hyperbolique pour cette valeur.

Remarque 3.6. la définition 2 englobe la définition 1, car un groupe hyperbolique agit toujours simplement transitivement par des isométries sur son graphe de Cayley, et cette action est cocompacte et propre.

3.2. Marche aléatoire et asymptotiques de probabilités.

Définition 3.7. *marche aléatoire sur un groupe*

Soit Γ un groupe muni d'une mesure de probabilité μ . Soit $(g_n)_n$ une suite de variables aléatoires iid de loi μ . On définit la marche aléatoire $(X_n)_n$ basée en $x \in \Gamma$ comme étant égale à la variable aléatoire produit :

$$X_n = xg_1 \cdots g_n.$$

ici l'espace d'état est Γ , et les lois de probabilités en chaque point x sont les mêmes : $\mu_x = \mu$.

On dira que la mesure de probabilité μ est symétrique si elle est invariante par l'application $g \mapsto g^{-1}$.

Remarque 3.8. Si μ est à support fini S et que S engendre Γ en tant que semi-groupe, alors la définition précédente est équivalente à la définition (2.5) d'une marche aléatoire sur un graphe étiqueté 2.5, avec comme graphe : le graphe de Cayley associé au système groupe générateur (Γ, S) .

Dans le cadre des marches aléatoires sur un arbre, nous avons le confort d'avoir des fonctions de Green qui soient algébriques. Dans le cas de marches aléatoires sur un groupe hyperbolique, nous n'avons pas cela. Cependant, sous certaines hypothèses sur la marche aléatoire nos fonctions de Green vont quasiment satisfaire une equation différentielle :

Proposition 3.9 (Prop 3.2 dans [GOU14]).

Soient Γ un groupe hyperbolique non élémentaire, μ une mesure de probabilité admissible et symétrique. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $1 \leq r < R$ les fonctions de Green associées à la marche aléatoire de loi de transition μ vérifient :

$$(3.2) \quad \frac{1}{C} \leq \frac{\sum_{z,w} G_r(x,z)G_r(z,w)G_r(w,y)}{(\sum_z G_r(x,z)G_r(z,y))^3} \leq C$$

Remarque 3.10. En particulier, en se rappelant les propriétés (1.3) et (1.4); nous obtenons que la dérivée de la fonction de Green satisfait approximativement l'équation différentielle $y' = Cy^3$ de solution $y(z) = C/\sqrt{1 - \tau z}$.

Bien entendu, les inéquations différentielles 3.2 ne sont pas suffisantes pour conclure. Cependant, si toutefois les dérivées des fonctions

de Green divergent (c'est le cas sous les hypothèses du théorème précédent) alors ces inéquations permettent d'avoir un contrôle sur la vitesse de divergence des dérivées des fonctions de Green à leur rayon de convergence commun R . A savoir une vitesse de divergence de l'ordre de $O\frac{1}{\sqrt{R-z}}$. Cette connaissance couplée à des résultats de régularité sur les suites $(p^{(n)}(a, b))_n$ permettent alors d'établir le résultat suivant :

Theorem 3.11. [*Gouëzel-Lalley 2013, Gouëzel 2014*],
(*Thm 1.1 [GOU14] et Thm 1.11 [GL13]*)

Soient Γ un groupe hyperbolique non élémentaire et μ une mesure de probabilité admissible, symétrique à support fini. On considère la marche aléatoire associée. Pour tout $x, y \in \Gamma$, il existe une constante $C(x, y) > 0$ telle que

$$(3.3) \quad p^{(n)}(x, y) \sim_{n \rightarrow \infty} C(x, y)R^{-n}n^{-3/2}.$$

Dans la preuve du théorème précédent et dans la plupart des résultats clés concernant les marches aléatoires sur les groupes hyperboliques, interviennent les inégalités de Ancona, ingrédients essentiels (et parfois même nécessaire), elles se définissent ainsi :

Définition 3.12. *inégalités (faible) de Ancona*

Soit μ une mesure de probabilité sur un groupe hyperbolique au sens de Gromov Γ . On note $R = R(\mu)$ le rayon de convergence des fonctions de Green associées. On dit que la mesure de probabilité μ , que la marche aléatoire associée à μ , ou bien encore que la chaîne de Markov associée à μ , satisfait aux inégalités (faibles) de Ancona uniforme si il existe une constante $C > 0$ (uniforme en $r \in [1, R(\mu)]$) telle que, pour tout $x, z \in \Gamma$, pour tout $y \in \Gamma$ proche du segment géodésique reliant x à y et pour tout $r \in [1, R(\mu)]$,

$$(3.4) \quad G_r(x, z) \leq CG_r(x, y)G_r(y, z),$$

avec $R(\mu)$ le rayon de convergence des fonctions de Green.

Ces inégalités sont actuellement connues pour toute marche aléatoire sur un arbre étiqueté; pour toute marche aléatoire admissible symétrique sur un groupe Fuchsien cocompact [GL13] et [GOU14] ainsi que pour toute marche aléatoire symétrique à support compact pour un groupe hyperbolique [GOU14]. Pour illustrer leur importance dans ce domaine de recherche, listons trois de leurs applications :

Soit μ une mesure de probabilité admissible sur un groupe hyperbolique au sens de Gromov, Γ . Soit $d_{Green} : (x, y) \mapsto -\log(G_r(x, y)G_r(y, x)/G_r(e, e)^2)$ la distance de Green sur Γ . La distance de Green est hyperbolique si, et seulement si, les fonctions de Green satisfont aux inégalités de Ancona

(Thm 1.1 [BHM09]).

Les inégalités de Ancona permettent de prouver que les bords de Martin et de Gromov coïncident [ANC87].

Elles permettent aussi d'interpréter la mesure harmonique en une mesure quasi-conforme pour une certaine métrique sur le bord du groupe hyperbolique (Cor 1.2 [BHM09]).

4. PERSPECTIVES

Les inégalités de Ancona admettent une version forte que nous mentionnons mais n'énoncerons pas ici par soucis de concision. Cette version forte n'est en général pas une conséquence des inégalités faibles de Ancona, mais il se trouve que dans certains espaces et sous une hypothèse de finitude du support de la mesure de probabilité étudiée, les inégalités fortes découlent des inégalités faibles de Ancona. Cette dernière version "forte" est essentielle dans la preuve de l'équivalence (0.1) par S.Gouëzel dans [GOU14], l'hypothèse de symétrie que l'on retrouve dans le théorème 3.11, quant à elle intervient pour prouver d'une part les inégalités de Ancona, et d'autres part pour relier le comportement asymptotique des coefficients des fonctions de Green, au comportement des fonctions de Green au voisinage de $z = R$. Jusqu'ici les inégalités fortes de Ancona sont connues uniquement pour des marches aléatoires symétriques, admissibles et à support fini sur les groupes hyperboliques. Cependant, nous savons depuis [GOU14] qu'elles sont vraies pour toute marche aléatoire admissible, non symétrique et à support fini sur les groupes fuchsien cocompact. L'on espère qu'elles restent vraies sans l'hypothèse de symétrie, aussi dans le cadre plus général des groupes hyperboliques.

RÉFÉRENCES

- [ANC87] Alano ANCONA. Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the martin boundary. *Annals of Mathematics*, 1987.
- [BHM09] Sébastien BLACHÈRE, Peter HAÏSSINSKY, and Pierre MATHIEU. Harmonic measure versus quasiconformal measure for hyperbolic groups. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 2009.
- [GL13] Sébastien GOUEZEL and Steven LALLEY. Random walks on cocompact fuchsian groups. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 2013.
- [GOU14] Sébastien GOUEZEL. Local limit theorem for symmetric random walks in gromov-hyperbolic groups. *Journal of American Mathematical Society*, 2014.
- [LAL93] Steven LALLEY. Finite range random walk on free groups and homogeneous trees. *Annals of Probability*, 1993.