

IDR : Dynamique holomorphe aléatoire en dimension 1

Clément Chivet

19 septembre 2023

Table des matières

1	Historique	1
2	Dynamique holomorphe en dimension 1	2
2.1	Ensemble de Julia	2
2.2	Mesure d'entropie maximale	4
3	Dynamique aléatoire	6
4	Problèmes et résultats recherchés	8

1 Historique

La dynamique holomorphe consiste en l'étude de l'itération des fonctions holomorphes définies sur une variété complexe. Elle est à l'intersection entre la dynamique et la géométrie complexe. Le cas de la dimension 1 est un sujet de recherche vénérable, qui a débuté au début du XXème siècle avec les travaux de Fatou et Julia, puis plus récemment vers les années 1980 avec des contributions importantes de Milnor, Sullivan, Douady, Thurston, Yoccoz, McMuller ou encore Avila. Depuis, ce sujet ne cesse de se renouveler via e contact avec d'autres branches des mathématiques, par exemple depuis une dizaine d'années il est au coeur d'une interaction foisonnante avec la géométrie arithmétique.

La dynamique aléatoire est également une branche bien établie de la théorie des systèmes dynamiques, initialement motivée par la compréhension des systèmes dynamiques soumis à un "bruit" aléatoire. Même si cet aspect demeure important, notamment en vue des applications, le "paradigme"

aléatoire s'est étendu également à de nombreuses questions théoriques, notamment en relation avec la théorie géométrique des groupes : lorsqu'un groupe infini G agit sur un espace X , il est tentant d'étudier l'action aléatoire sur X induite par une marche aléatoire sur le groupe pour comprendre les propriétés asymptotiques de l'action. Ce point de vue, popularisé notamment par Furstenberg, est très fécond dans l'étude de la dynamique sur les espaces homogènes (Benoît- Quint, Lindenstrauss, etc.) ou les espaces de modules (Eskin-Mirzakhani).

2 Dynamique holomorphe en dimension 1

Une référence classique en dynamique holomorphe est [Mil90].

2.1 Ensemble de Julia

Pour un endomorphisme f d'une surface de Riemann S , il existe une dichotomie entre les points de S dont la dynamique est plutôt "contrôlée", stable, et les points où cette dynamique est au contraire plus chaotique :

Définition 1 (Ensemble de Fatou/Julia). Soit S une surface de Riemann et $f : S \rightarrow S$ non constante. Pour z_0 , si il existe un voisinage U de z_0 tel que $(f_U^n)_n$ forme une famille *normale*, alors on dit que z_0 est *régulier* ou qu'il appartient à l'ensemble de Fatou de f . Sinon, il appartient à l'ensemble de Julia $J(f)$ de f .

Dans notre cas, on s'intéresse à $S = \hat{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann, et $f : z \in \hat{\mathbb{C}} \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ une fonction rationnelle. Par exemple pour $z \mapsto z^2$, l'ensemble de Julia est exactement le cercle unité, mais ce cas est plutôt exceptionnel, et en général l'ensemble de Julia n'est pas lisse. On peut le voir sur l'exemple suivant, tiré de [Mil90] :

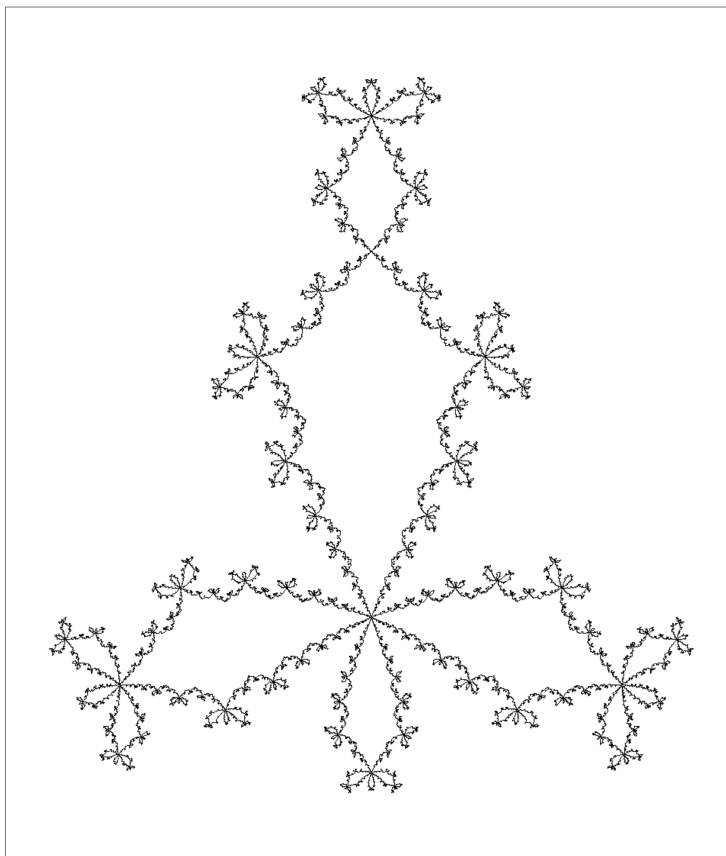


Figure 2. Julia set for $f(z) = z^3 + \frac{12}{25}z + \frac{116}{125}i$.

De plus cet ensemble vérifie des propriétés d'invariances par f et d'auto-similitude : si $f(z_1) = z_2$ dans $J(f)$ de dérivée non nulle en z_1 , alors il y a un isomorphisme conforme entre un voisinage $N_1 \cap J(f)$ de z_1 dans $J(f)$ vers un voisinage $N_2 \cap J(f)$ de z_2 . Enfin, cet ensemble est très lié à la dynamique de l'application f :

Théorème 2.2 : 11.1 de [Mil90].

Soit $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de degré ≥ 2 . Alors $J(f)$ est égal à l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs.

Démonstration. On donne une idée de la preuve :

On se donne un point $z_0 \in J$ générique, qui a d préimages z_1, \dots, z_d , et on peut alors définir sur un voisinage N_0 de z_0 des fonctions holomorphes ϕ_i

telles que $f(\phi_i(z)) = z$ et $\phi_i(z_0) = z_i$. Alors pour n assez grand et pour un certain $z \in N_0$, $f^n(z)$ doit prendre l'une des valeurs $z, \phi_1(z)$ ou $\phi_2(z)$, sinon la famille

$$g_n(z) = \frac{(f^n(z) - \phi_1(z))(z - \phi_2(z))}{(f^n(z) - \phi_2(z))(z - \phi_1(z))}$$

éviterait 0, 1, ∞ et serait une famille normale, et $f^n|_{N_0}$ aussi, ce qui est absurde car $N \cap J(f) \neq \emptyset$. Finalement, z est un point périodique, et en variant N_0 on peut approcher z_0 par des points périodiques, qui seront tous sauf un nombre fini répulsifs. \square

Pour $z \in J(f)$, la non normalité de $f^n|_U$ où U est un voisinage de z assez petit, implique que $\bigcup_n f^n(U)$ recouvre toute la sphère sauf au plus deux points, et ces points exceptionnels ne dépendent en fait que de f , c'est l'ensemble $\text{Exc}(f)$.

2.2 Mesure d'entropie maximale

En plus de ces ensembles liés à une transformation f de $\hat{\mathbb{C}}$, on a aussi une notion de mesure d'entropie maximale, par exemple présentée dans [FLM83] : On note

$$\mu_n(a) = \frac{1}{d^n} \sum_{i=0}^{d^n} \delta_{z_i^{(n)}(a)}$$

où $z_i^{(n)}(a)$ sont les zéros de $f^n(z) = a$ comptés avec multiplicité.

Théorème 2.3.

Soit $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de degré $d \geq 2$. Alors il existe une probabilité f -invariante μ_f telle que :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(a) = \mu_f$ pour $a \notin \text{Exc}(f)$, et cette convergence est uniforme sur les compacts.
- Le support de μ_f est $J(f)$.
- f est un K-système pour μ_f .
- $\mu_f(f(A)) = d\mu_f(A)$ pour tout A mesurable sur lequel f est injective, et μ_f est l'unique mesure de probabilité f -invariante vérifiant cette propriété.
- $h_{\mu_f}(f) = \log d$.

Bien qu'en apparence la propriété $\mu_f = \mu_g$ semble bien plus forte que $J(f) = J(g)$, les problèmes de caractérisation des applications f, g qui vérifient ces equations sont liées sauf pour certains cas exceptionnels, Levin et Przytycki dans [LP98] ont montré :

Théorème 2.4 : Théorème B de [LP98].

Soient f, g deux applications rationnelles non exceptionnelles (pas de points périodiques paraboliques ni de domaine singulier, et ensemble de Julia non lisse) sur la sphère de Riemann, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mu_f = \mu_g$
- (ii) il existe F, G des itérés de f, g tels que

$$(G^{-1} \circ G) \circ G^m = (F^{-1} \circ F) \circ F^n$$

- (iii) $J(f) = J(g)$.

Démonstration. Pour obtenir ce type de résultat, on utilise des *symétries*, définies par Levin dans [Lev90], c'est à dire des fonctions qui vérifient ce lemme :

Lemme 2.5 : Symétries d'ensembles de Julia.

Soit J un ensemble de Julia d'une fonction rationnelle f , $B = B(x, r)$ une boule centrée en $x \in J$, et H_n une suite de fonctions holomorphes telles que :

- (i) $H_n \rightarrow H$ dans B .
- (ii) $\forall (z, n), z \in B \cap J \iff H_n(z) \in H_n(B) \cap J$
- (iii) d'autres conditions si J est lisse.

Alors soit H est constante soit $H_n = H$ pour $n \geq N_0$.

La preuve revient alors à construire une bonne suite de fonctions H_n , de la forme $f^{k_i} \circ g^{-l_i}$, en utilisant le fait que f, g préservent la même mesure d'entropie maximale, qu'on peut trouver des bassins d'attractions et des mesures harmoniques dessus. Il faut ensuite voir que si on part d'un bassin B , $f^{-n}(B)$ va contracter d'un facteur λ_f^n , et on peut revenir avec g^m qui va contracter d'un facteur λ_g^m , et voir avec la préservation de la mesure que la condition (ii) du Lemme est vérifiée.

□

De plus, dans [DFG22], Dujardin, Favre et Gauthier ont montré que si deux ensembles de Julia sont reliés localement par un biholomorphisme, de même sauf une liste de cas exceptionnels, et qu'on a une relation entre leurs mesures d'entropie maximale, alors ces applications sont liées par une relation algébrique.

Ces résultats sur la mesure d'entropie maximale seront potentiellement utiles pour la dynamique aléatoire, ou en tous cas on pourrait espérer avoir des résultats dans le même sens : si f et g partagent une mesure invariante, on pourra peut-être dire quelque chose sur leur ensemble de Julia. En effet on a l'impression, au vu de ces résultats, que la propriété d'avoir le même ensemble de Julia est très rigide, qu'une petite relation entre f et g , comme préserver une mesure commune, implique une propriété plus forte comme le fait d'être algébriquement liés. Introduisons alors quelques notions de dynamique aléatoire.

3 Dynamique aléatoire

Soit X un espace (ici une surface de Riemann), et Γ un semi-groupe de transformations sur X , que l'on peut supposer dénombrable. Soit ν une probabilité sur Γ telle que $\langle \text{Supp}(\nu) \rangle = \Gamma$. La dynamique aléatoire s'intéresse à l'itération aléatoire de transformations sur X , ici via ν notre mesure sur Γ . Cela revient à s'intéresser à

$$F_+ : (\underline{\omega}, x) \in \Gamma^{\mathbb{N}} \times X \mapsto (\sigma \underline{\omega}, f_{\omega_0}(x)) \in \Gamma^{\mathbb{N}} \times X$$

avec la mesure $\nu^{\mathbb{N}}$ sur le facteur $\Gamma^{\mathbb{N}}$. On a alors plusieurs notions d'"invariance" de mesures :

Définition 1. Soit μ une mesure sur X . On dit que μ est

— ν -stationnaire si

$$\nu \star \mu := \int f_* \mu d\nu(f) = \mu$$

— Γ -invariante si $f_* \mu = \mu$ pour tout $f \in \Gamma$.

On remarque que la seconde propriété implique la première, mais que contrairement aux mesures stationnaires qui existent toujours, car ce sont en fait des mesures invariantes du système dynamique déterministe F_+ , il n'y a pas forcément de mesure invariante. Pour comprendre la dynamique aléatoire, un problème important en général est celui de comprendre les mesures invariantes et stationnaires. En effet, une fois qu'on a classifié ces

mesures, on peut étudier plus facilement la distribution asymptotique des orbites par exemple.

On a aussi, comme pour la dynamique déterministe, une notion d'ergodicité, qui revient à demander que le système $F_+ : \Gamma^{\mathbb{N}} \times X \rightarrow \Gamma^{\mathbb{N}} \times X$ soit ergodique. Le théorème de décomposition ergodique, qui affirme que l'on peut écrire toute mesure invariante de manière unique comme une décomposition en mesures ergodiques peut permettre de ne traiter que le cas des mesures ergodiques.

Un propriété très intéressante à trouver pour un système dynamique aléatoire est la "stiffness" :

Définition 2. Un système dynamique aléatoire est ν -*stiff* lorsque les mesures ν -stationnaires sont Γ -invariantes.

Des outils classiques pour étudier ce type de problème sont les exposants de Lyapunov, qui existent en général par le théorème d'Oseledets, et qui via le principe d'invariance [AV10] [BH17] [Led86] qui permet dans certains cas de montrer qu'une mesure ergodique stationnaire est en fait invariante. Cependant le principe d'invariance n'est valable que pour des transformations inversibles, lorsque Γ est un groupe :

Théorème 3.3.

Dans les conditions précédentes, en supposant que Γ est un sous groupe de difféomorphismes, μ ergodique, et en supposant en plus que $\int \log(\|f\| + \|f'\|) d\nu d\mu < +\infty$, si

$$\chi_-(\mu) \geq 0$$

où χ_- est l'exposant de Lyapunov minimal (le seul en dimension 1), alors μ est invariante.

D'autres approches existent pour la dynamique aléatoire en général, par exemple en étudiant plutôt la dynamique de f perturbée par disons un mouvement Brownien, ou en restant dans le cadre de l'itération d'un nombre fini de transformations, et dans l'esprit du principe d'invariance, Deroin et Kleptsyn ont montré dans [DK05] que sur un sous-ensemble minimal, soit il existe une probabilité invariante, soit on a une propriété de "contraction exponentielle", pour cela ils construisent des mesures harmoniques sur les feuilles d'un feuilletage bien choisi de l'espace ambiant.

Enfin, le domaine de la dynamique aléatoire comporte toujours beaucoup d'aspects pas très bien compris, par exemple rien que le problème de classification des mesures invariantes du cercle où $\Gamma = \langle f, g \rangle$ avec $f(z) = z^2$ et

$g(z) = z^3$ est encore un problème totalement ouvert, connue sous le nom de conjecture $\times 2 \times 3$ de Furstenberg.

4 Problèmes et résultats recherchés

Les premiers problèmes à résoudre seront donc :

- Peut-on classifier l'ensemble des mesures invariantes/stationnaires par l'action de $\langle f, g \rangle$?
- Sous quelles hypothèses peut-on affirmer qu'une mesure stationnaire sera invariante ?

Le premier problème en toute généralité est certainement très difficile d'accès, mais les discussions précédentes permettent tout de même de savoir que certains type de mesures de ne peuvent pas être invariantes sauf si f, g sont liées par une relation algébrique. Un des premiers objectifs serait d'étendre ce résultat à des mesures ayant moins d'hypothèses, par exemple supposer μ stationnaire au lieu d'invariante.

Un des problèmes qui se posera est le fait que les applications que l'on considère ne sont pas inversibles, ce qui empêche d'appliquer directement les méthodes telles que le principe d'invariance, ou les travaux de [BH17] ou [BFLM11]. Un objectif atteignable pour commencer serait de voir si un principe d'invariance pour les applications de degré d existe, en remplaçant ≥ 0 par disons $\ln d$. Le problème sera surtout la gestion des points critiques, élément qui ne pouvait pas arriver dans le cas inversible.

Au delà du principe d'invariance, il semble que le coeur des problèmes soit la compréhension des mesures stationnaires ergodiques d'exposant strictement positif, dans l'esprit des travaux de [BH17]. En utilisant un "argument de dérive" en théorie de Pesin, inspiré des travaux de Benoist-Quint, ceux-ci parviennent à montrer que sous une certaine condition de transversalité, une mesure stationnaire doit être "absolument continue dans la direction instable". Il s'agirait donc de trouver une version de ce résultat pour la dynamique des semi-groupes de fractions rationnelles, ce qui apporterait une réponse qualitativement convaincante aux problèmes posés ci-dessus. Ce résultat résonne clairement avec les travaux de Levin, Przytycki, Eremenko, Van Strien, etc. sur les mesures invariantes et la rigidité des ensembles de Julia. Comme pour le problème précédent, on doit aussi s'attendre à des difficultés liées à la présence de points critiques.

Zhuchao Ji et Junyi Xie dans [JX23] vont aussi dans ce sens, en parlant des résultats de [LP98], ils se posent la question "Peut-on classifier les

isomorphismes locaux (holomorphes, réels analytiques, C^1) entre deux ensembles de Julia (resp. mesure d'entropie maximale). Ils généralisent donc les constructions de Levin, dans le sens d'étudier l'influence des liens locaux entre ensembles de Julia. Si on part plutôt dans le sens de la dynamique aléatoire, l'objectif serait de même de généraliser les résultats de Levin, mais cette fois dans le sens d'avoir des hypothèses plus faibles sur les mesures, qu'on ne peut pas choisir forcément invariantes pour toutes les transformations.

Références

- [AV10] Artur Avila and Marcelo Viana. Extremal lyapunov exponents : An invariance principle and applications. *Inventiones mathematicae*, 181 :115–178, 07 2010.
- [BFLM11] Jean Bourgain, Alex Furman, Elon Lindenstrauss, and Shahar Mozes. Stationary measures and equidistribution for orbits of nonabelian semigroups on the torus. *Journal of the American Mathematical Society*, 24 :231–280, 2011.
- [BH17] Aaron W. Brown and Federico Rodriguez Hertz. Measure rigidity for random dynamics on surfaces and related skew products, 2017.
- [CD22a] Serge Cantat and Romain Dujardin. Hyperbolicity for large automorphism groups of projective surfaces, 2022.
- [CD22b] Serge Cantat and Romain Dujardin. Invariant measures for large automorphism groups of projective surfaces, 2022.
- [CD22c] Serge Cantat and Romain Dujardin. Random dynamics on real and complex projective surfaces, 2022.
- [DFG22] Romain Dujardin, Charles Favre, and Thomas Gauthier. When do two rational functions have locally biholomorphic julia sets ?, 2022.
- [DK05] Bertrand Deroin and Victor Kleptsyn. Random conformal dynamical systems, 2005.
- [EvS11] Alexandre Eremenko and Sebastian van Strien. Rational maps with real multipliers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(12) :6453–6463, 2011.
- [FLM83] Alexandre Freire, Artur Lopes, and Ricardo Mañé. An invariant measure for rational maps. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 14 :45–62, 03 1983.
- [JX23] Zhuchao Ji and Junyi Xie. Local rigidity of julia sets, 2023.

-
- [Led86] F. Ledrappier. Positivity of the exponent for stationary sequences of matrices. In Ludwig Arnold and Volker Wihstutz, editors, *Lyapunov Exponents*, pages 56–73, Berlin, Heidelberg, 1986. Springer Berlin Heidelberg.
- [Lev90] Genadi Levin. Symmetries on the julia set. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 48 :1126–1131, 11 1990.
- [Lju83] M. Ju. Ljubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the riemann sphere. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 3 :351 – 385, 1983.
- [LP98] Genadi Levin and F. Przytycki. When do two rational functions have the same julia set? *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125, 11 1998.
- [Mil90] John W. Milnor. Dynamics in one complex variable : introductory lectures, 1990.
- [Sum21] Hiroki Sumi. Negativity of lyapunov exponents and convergence of generic random polynomial dynamical systems and random relaxed newton’s methods. *Communications in Mathematical Physics*, 384(3) :1513–1583, may 2021.