Magnitude : Théorie des catégories, géométrie et biologie

Hugo Panchaud

Octobre 2023

Contents

1 Introduction

Les mathématiciens ont toujours cherché à créer de nouveaux objets aux propriétés les plus diverses les unes que les autres puis de les classifier. De manière générale, les mathématiques se sont développées du spécifique vers le général, les différentes structures algébriques, topologiques, géométriques apparaissant aux yeux des mathématicien·nes au fil des exemples et généralisant les comportements observés : groupes, anneaux, modules ; les différentes formes de continuités ; variétés etc. L'exemple le plus frappant aujourd'hui étant la théorie des catégories qui fournit un cadre fonctionnant et efficace pour la (quasi-)intégralité des domaines actuels des mathématiques.

Ici, nous allons - une fois n'est pas coutume - procéder dans le sens inverse : partant d'une notion très générale, la caractéristique d'Euler d'une catégorie enrichie finie, nous allons étudier ses applications dans un cas particulier et révéler la richesse que ce cas d'application réserve !

À l'origine, la magnitude est une notion catégorique définie par Tom Leinster dans [2]. Dans son cadre le plus général, elle permet de définir un invariant de "taille" dans le monde des catégories enrichies finies. Nous allons donc commencer par définir la magnitude dans ce cadre, de la manière la plus naturelle possible. Afin de justifier du caractère naturel de cette notion, nous verrons que la magnitude d'une catégorie enrichie finie permet de retrouver de nombreux invariants, plus ou moins connus, voire inconnus, dans de nombreux domaines. Puis, nous nous concentrerons sur notre domaine d'intérêt en remarquant qu'il est possible de voir un espèce métrique fini comme une catégorie enrichie finie et donc de calculer sa magnitude. Oubliant alors le cadre de la théorie des catégories, nous généraliserons la magnitude à une classes d'espaces métriques infinis bien choisie dans laquelle nous prouverons les caractéristiques géométriques de notre objet. Enfin, nous ferons un bref détour par la biologie pour montrer comment cette notion avait également été découverte indépendamment des années plus tôt et quelles applications elle peut avoir.

2 Théorie des catégories : la caractéristique d'Euler d'une catégorie enrichie finie

2.1 L'intuition derrière la caractéristique d'Euler d'une catégorie finie

Partant des catégories finies, on cherche à trouver une notion de cardinalité. Examinons quelques formules combinatoires à partir desquelles on peut formuler l'idée de caractéristique d'Euler d'une catégorie.

Example 1.

- *Si on considère le pushout de 2 fonctions injectives $T \to R$ et $T \to S$ d'ensembles finis $R \times_T S$, son cardinal vaut $|R| + |S| - |T|$.*
- *Si on considère un groupe fini G agissant librement sur un ensemble fini S, alors le cardinal des orbites vaut $|S/G| = \frac{1}{|G|}|S|$.*

*Dans nos 2 exemples, nous avons considéré la colimite de foncteurs $X : \mathcal{C} \to$ **FinSet** où $\mathcal{C}$ est une catégorie finie, et dans chaque cas, le cardinal de la colimite s'exprime comme une somme pondérée des cardinaux des $X(c)$ pour $c \in \mathcal{C}$ (dans le cas du groupe, on voit G comme la catégorie à un objet et $|G|$ foncteurs).*

Nous avons, dans ces 2 cas, des formules de ce type :

$$|\lim_{\to \mathcal{C}} X| = \sum_{c \in \mathcal{C}} w(c)|X(c)|$$

où les $w(c)$ sont des poids rationnels.

Pourrait-on généraliser ces formules dans le cas général, c'est-à-dire pour une catégorie $\mathcal{C}$ arbitraire. Puisqu'on considère des foncteurs $X : \mathcal{C} \to \mathbf{FinSet}$, regardons ce qui se passe sur les foncteurs représentables. Pour $X = \mathrm{Hom}(c, -)$, on a

$$1 = |\lim_{\to \mathcal{C}} X| = \sum_{d \in \mathcal{C}} w(d)|hom(c,d)|$$

En effet, la colimite d'un foncteur représententable est un singleton. Ainsi, il semble que pour un tel résultat de cardinalité, il faudrait que les poids vérifient l'équation ci-dessus. Maintenant, pour associer un cardinal à notre catégorie, on peut considérer la somme des poids $\sum_{d \in \mathcal{C}} w(d)$. Une manière de comprendre pourquoi est de voir qu'il s'agit du cardinal de la colimite du foncteur constant égale à 1 qui apparaît naturellement dans certains domaines des catégories. Établissons nos définitions.

2.2 Définitions

Definition 1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie finie. On définit*

- $\zeta_{\mathcal{C}}$ *la matrice formelle de $\mathbb{R}^{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}$ définie par $\zeta_C(c,d) = \mathrm{Hom}(c,d)$,*
- *un **pondération** de $\mathcal{C}$ tout vecteur $w \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ vérifiant $\zeta_C w = \bar{1}$ (où $\bar{1}$ est le vecteur constant égal à 1),*
- *un **copondération** de $\mathcal{C}$ tout vecteur $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ vérifiant $v^T \zeta_C = \bar{1}$,*
- *la **magnitude** de $\mathcal{C}$, si $\mathcal{C}$ admet au moins un pondération et un copondération,*

$$|C| = \sum_{d \in \mathcal{C}} w(d) = \sum_{c \in \mathcal{C}} v(c)$$

  où w est n'importe quel pondération et v n'importe quel copondération

Il est facile de vérifier que la magnitude est bien définie dans le dernier point. Dans un premier temps, c'est la question de l'existence ou non de la magnitude qui nous intéresse. Mais, le cas où la matrice ζ_C est inversible garantit toujours l'existence d'un unique pondération et copondération. On parle d'inversion de Möbius. Par la suite, nous verrons que nous ferons des choix qui nous placent dans ce cas-là.

Proposition 1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie finie telle que $\zeta_{\mathcal{C}}$ est inversible. Alors $\mathcal{C}$ a une magnitude définie par un unique pondération et copondération.*

Nous allons maintenant généraliser cette notion en s'intéressant au cardinal des $\mathrm{Hom}(c,d)$. Dans notre cas classique des catégories finies, nos $\mathrm{Hom}(c,d)$ sont des ensembles finis. Mais il existe une structure, les **catégories enrichies**, pour lesquelles les $\mathrm{Hom}(c,d)$ ont une structure plus riche.

Partant d'une **catégorie monoïdale** $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$, il est possible de définir une notion de $\mathcal{M}$-catégories dont les $\mathrm{Hom}(c,d)$ sont des objets de $\mathcal{M}$ et dont la composition de morphismes est compatible avec l'opération $\otimes$ et l'identité $\mathbf{1}$.

Il est alors possible d'imaginer d'autres types de cardinalité sur nos $\mathrm{Hom}(c, d)$ à partir des objets de $\mathcal{M}$. Par exemple, si on prend $\mathcal{M}$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie munie du produit vectoriel et du corps de base, on peut naturelle utiliser la dimension de $\mathrm{Hom}(c, d)$ comme cardinalité. Plus rigoureusement, on définit

Definition 2. *Soit* $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$ *une catégorie monoïdale et* $(k, \times, 1)$ *un demi-anneau (ie un anneau sans négatifs). Alors, une fonction de cardinalité pour* $\mathcal{M}$ *est un homomorphisme de monoïde*

$$|\cdot| : (\mathcal{M}/\sim, \otimes, \mathbf{1}) \to (k, \times, 1)$$

On définit alors de la même manière la magnitude en remplaçant le cardinal d'un ensemble fini par la fonction de cardinalité utilisée. Cela nous permet en quelque sorte de pouvoir tourner un "curseur" et de regarder des mondes très différents et très intéressants.

2.3 Exemples de magnitudes connues

La magnitude permet de retrouver de nombreux invariants de taille déjà existant dans les mathématiques, ce qui laisse supposer qu'il s'agit bien d'une notion pertinente.

Example 2. *Parmi ces invariants, on retrouve par exemple*

- *la cardinalité des ensembles finis correspond à la magnitude de la catégorie discrète induite,*
- *l'ordre d'un groupe vu comme une catégorie à un objet se retrouve en inversant la magnitude de cette catégorie,*
- *la caractéristique d'Euler d'un graphe orienté est la magnitude de la catégorie libre engendrée par ce graphe,*
- *la caractéristique d'Euler de l'espace topologique engendrée par une petite catégorie* $\mathcal{C}$ *(en prenant la réalisation géométrique de son nerf simplicial) est la magnitude de cette catégorie.*

Ce dernier exemple est particulièrement impressionnant et laisse présager des propriétés géometriques de la magnitude. C'est essentiellement à cause de cet exemple qu'on parle à l'origine de caractéristique d'Euler d'une catégorie enrichie finie plutôt que de sa magnitude.

En 2011, Leinster recensait déjà les avancées dans ce domaine, pour plusieurs catégories monoïdales $\mathcal{M}$ différentes, de $\mathcal{M} = \mathbf{Top}$ à $\mathcal{M} = \mathbf{nCat}$.

Dans la suite de cet exposé, nous nous intéresserons simplement à un cas particulier, mais celui qui a l'air le plus riche et qui possède de belles propriétés géométriques.

3 Entre théorie des catégories et géométrie : la magnitude d'un espace métrique fini

3.1 La magnitude d'un espace métrique fini

Pour commencer, on va voir comment il est possible de voir un espace métrique fini comme une catégorie enrichie. Un espace métrique est défini par la distance entre ses points. On peut raisonnablement imaginer que la catégorie associée à un espace métrique fini X aura pour objets les points X et contiendra l'information de la distance entre x et y dans $\mathrm{Hom}(x, y)$, un peu à la manière d'un poset.

Pour une simple catégorie, il ne semble pas très naturel de pouvoir lire cette information dans $\mathrm{Hom}(x, y)$. Mais, dans le monde bien plus riche(!) des catégories enrichies, il nous suffit de considérer une catégorie dont les objets sont les réels. Puis, en mettant une structure suffisamment adaptée, il nous est même possible de rajouter des conditions sur la distance d (qui correspondront aux contraintes de composition dans notre catégorie monoïdale). En pratique, le choix le plus maniable est le suivant.

Definition 3. *Soit* $[0, \infty]$ *la catégorie induite par l'ensemble ordonnée* $[0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, *munie de l'addition héritée de* $\bar{\mathbb{R}}$ *qui fait de* $([0, +\infty], +, 0)$ *une catégorie monoïdale.*

Les objets de $[0, \infty]$ sont les nombres réels positifs et ∞ et $\mathrm{Hom}(a, b)$ est un singleton si $a \geq b$ et l'ensemble vide sinon. Il est très élémentaire de vérifier que l'addition fait bien de cette catégorie une catégorie monoïdale.

Cela nous permet donc d'attribuer une distance à nos $\mathrm{Hom}(x, y)$.

Definition 4. *Un* ***espace métrique généralisé*** *ou espace de Lawvere est une* $[0, \infty]$*-catégorie.*

De manière équivalente, il s'agit d'un ensemble X *muni d'une distance* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *vérifiant les axiomes suivants*

- $d(x, x) = 0$ *pour tout* $X \in X$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *pour tous* $x, y, z \in X$.

En définitive, une distance sur un espace métrique généralisé est une distance plus souple que dans un espace métrique classique puisqu'elle autorise

- $d(x, y) = 0$ pour $x \neq y \in X$
- $d(x, y) = \infty$ pour $x, y \in X$
- $d(x, y) \neq d(y, x)$ pour $x, y \in X$

Ce type d'espace à l'origine catégorique a été découvert et étudié par Lawvere dans [1]. Il nous permet de voir les espaces métriques classiques comme un cas particulier d'une $[0, \infty]$-catégorie et donc d'étudier **la magnitude d'un espace métrique fini**.

Avant cela, il nous reste à choisir une notion de cardinalité sur $([0, \infty], +, 0)$. Comme on souhaite travailler avec des nombres réels, choisissons $(\mathbb{R}, +, \times)$ comme (semi-)anneau et on doit donc choisir un morphisme de monoïdes $|\cdot| : (\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \to (\mathbb{R}, \times)$. À constante multiplicative près, la seule possibilité est $|x| = e^{-x}$.

Il nous est désormais possible de parler de magnitude d'un espace métrique fini.

Definition 5. *Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un espace métrique fini ordonné arbitrairement. On définit*

- *la matrice $\zeta_X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(\zeta_X)_{i,j} = e^{-d(i,j)}$,*
- *un pondération $w \in \mathbb{R}^n$ de X par tout vecteur vérifiant $\zeta_X w = \bar{1}$,*
- *un copondération $v \in \mathbb{R}^n$ de X par tout vecteur vérifiant $v^T \zeta_X = \bar{1}$,*
- *la magnitude de X, si X possède au moins un pondération w et un copondération v, par $|X| = \sum_i w_i = \sum_j v_j$*

Une **analogie** pour tenter de comprendre le sens derrière cette définition est la suivante. On dispose d'un ensemble de points à des distances variables. Chacun de ces points émet de la chaleur. La chaleur reçue d'un point i par un point j décroît en fonction de la distance, ce qui est matérialisé par le poids $e^{-d(i,j)}$ dans la matrice ζ_X. Un vecteur w est une fonction qui attribue à chaque point i la chaleur émise w_i. Le vecteur $\zeta_X w$ correspond alors à la fonction qui attribue à chaque point i la chaleur reçue totale. Un pondération w correspond alors à une répartition de chaleur émise aboutissant à la même chaleur reçue par tous les points. La magnitude correspond à la somme de ces chaleurs émises, autrement dit à l'énergie totale en quelque sorte.

3.2 La fonction de magnitude

Une particularité des espaces métriques par rapport aux espaces topologiques est la possibilité de les redimensionner par un facteur multiplicatif. Ceci nous permet de contracter ou d'étendre notre espace. À voir la forme de la magnitude et même l'intuition derrière, on peut se douter que cela va produire des effets intéressants sur nos espaces. En fait, de manière générale, quand on regardera un espace, on s'intéressera plutôt à la fonction de magnitude que la magnitude propre. La **fonction de magnitude** est la fonction $t \mapsto |tX|$ où tX est l'espace métrique X muni de la distance $d_t(x, y) = td(x, y)$. Au passage, cela revient aussi à changer la constante dans notre choix de fonction de cardinalité pour les $[0, \infty]$-catégories.

Cette fonction a l'avantage de se comporter dans la plupart des cas très intuitivement. En effet, on observe qu'asymptotiquement $|tX|$ existe toujours, que la fonction de magnitude est croissante et qu'elle tend vers vers $\sharp X$ le nombre de points de X. Cela se comprend car à l'infini, les points de X sont tous "distincts" et la magnitude compte le nombre de points "effectif". On aimerait aussi que la fonction de magnitude tende vers 1 en 0 (puisque tous les points sont alors "concentrés") mais ce n'est malheureusement pas toujours vrai. Sur certains espaces aux bonnes propriétés géométriques (convexes, certaines variétés riemaniennes ...), Willerton ([7]) et Meckes ([5]) ont prouvé qu'asymptotiquement, la fonction de magnitude contient de nombreuses informations géométrique. Par exemple, pour une surface de Riemann homogène Σ, la fonction de magnitude en $+\infty$ vaut $|t\Sigma| = \frac{\mathrm{Aire}(t\Sigma)}{2\pi} + \chi(t\Sigma) + O(t^{-2})$.

3.3 Les espaces métriques finis positifs définis

Revenons à la magnitude en tant que tel. Nous avons vu qu'un cas intéressant où l'on connaissait mieux notre magnitude était celui où la matrice ζ_C était inversible. Dans le cas des espaces métriques, la symétrie de la distance rend la matrice ζ_X symétrique. Cela nous conduit naturellement vers la notion de **matrice définie positive**.

Definition 6. *Un espace métrique fini est dit* ***défini positif*** *si sa matrice ζ_X est définie positive.*

Cela revient à demander que pour tout $x \neq 0$, $x^T\zeta_X x > 0$. Autrement dit, ζ_X doit définir un produit scalaire. Nous voyons donc déjà que la magnitude a des connexions avec la géométrie euclidienne et donc potentiellement avec des domaines comme la théorie de Fourier.

Revenons aux propriétés des espaces métriques finis définis positifs. On a vu qu'ils possèdent effectivement une magnitude et un unique pondération. Sur de tels espaces, on va pouvoir avoir une définition plus agréable de la magnitude, qui ressemble à des quantités qu'on pourrait avoir dans le monde de la géométrie euclidienne.

Proposition 2. *Soit X un espace métrique fini défini positif. Alors,*

$$|X| = \max_{x \neq 0} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{x^T \zeta_X x}$$

Cette propriété, qui est une simple application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, applicable car ζ_X définit un produit scalaire, nous permet d'établir de nombreuses propriétés très utiles sur nos espaces. Par exemple.

Proposition 3. *Soit X un espace métrique fini défini positif. Soit $Y \subseteq X$ non vide. Alors, Y est défini positif et $|Y| \subseteq X$.*

Cela est cohérent avec notre idée de magnitude comme "taille".

Être défini positif est une notion intrinsèquement géométrique. Nous avons vu qu'elle émane des produits scalaires. En fait, de manière générale, on les fonctions positives définies interviennent dans la théorie de Fourier, notamment dans le théorème de Bochner qui, dans les grandes lignes, établit l'équivalence entre fonctions positives définies et transformées de Fourier. C'est donc sans surprise qu'en reprenant une partie de ce théorème, on peut établir sans trop de difficultés que les sous-ensembles finis de l'espace euclidien sont positifs définis. On a donc notre premier exemple d'espaces positifs définis. Meckes en fait une étude assez complète dans [3].

4 Géométrie : la magnitude d'un espace métrique compact

Alors que les espaces métriques finis font le lien entre géométrie et théorie des catégories, nous allons désormais oublier l'origine catégorique de la magnitude et se concentrer uniquement sur l'aspect géométrique en étendant la notion aux **espaces métriques compacts**. De manière générale, lorsque l'on souhaite étendre une caractéristique d'un objet fini à un objet infini on peut procéder de différentes manières. La première manière qui vient à l'esprit est, d'une façon ou d'une autre, approximer notre objet infini par des objets finis - généralement en prenant une suite d'objets finis qui tend vers notre objet infini - et de définir la caractéristique de notre objet infini comme la limite de ses valeurs sur les objets finis.

En pratique, cela reviendrait, dans notre cas, à définir une distance sur les sous-espaces (finis mais pas forcément que) d'un espace métrique qui fournirait des suites d'espaces finis X_n convergeant vers notre espace X et de définir $|X|$ comme la limite des $|X_n|$. On voit tout de suite quels sont les problèmes potentiels : l'existence d'une telle suite, la bonne définition de la magnitude des sous-espaces, l'existence et l'unicité d'une telle limite ... Mais, en faisant les bons choix, nous verrons qu'il est possible d'obtenir une définition satisfaisante.

La deuxième possibilité consiste à mimer les définitions de notre caractéristique dans le monde infini. Transformer une somme finie en une intégrale par exemple. Cette approche se révèlera très fructueuse car la magnitude faisant intervenir des sommes pondérées, il est très naturel de faire intervenir des mesures.

Lorsque nous présenterons les différentes définitions possibles, nous nous assurerons qu'elles sont bien équivalentes entre elles et qu'elles sont cohérentes avec le cas fini - dans un cadre bien précis mais suffisamment général que nous préciserons.

4.1 Définition par les sous espaces finis

Premièrement, il nous faut définir une notion de convergence dans les sous-espaces d'un espace métrique. Considérer tous les sous-espaces d'un espace métrique semble ambitieux, surtout lorsque nous travaillons avec des notions de "taille". La notion de finitude dans les espaces topologiques est souvent associée avec celle de compacité. Et ça tombe bien car les espaces compacts sont justement connus pour pouvoir être "approximés" par des sous-ensembles finis. C'est donc sans surprise qu'il existe une distance très naturelle sur les sous-espaces compacts d'un espace métrique.

Definition 7. *Soient A et B 2 sous-espaces non vides d'un espace métrique (X, d). On définit leur **distance de Hausdorff** par*

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(X, y) \right\}$$

En particulier, en prenant les centres d'un recouvrement fini par des boules de rayon $\varepsilon > 0$, il est possible d'approcher un espace métrique compact à distance ε par un sous-ensemble fini.

Il faut maintenant nous assurer que ces sous-ensembles finis ont bien une magnitude. Nous avons vu précisément dans la section principe une classe d'espace métrique finis vérifiant cette propriété : les espaces métriques finis positifs définis. On pose alors

Definition 8. *Soit X un espace métrique. On dit que X est* ***positif défini*** *si tous les sous-espaces finis de X sont positifs définis.*

Ainsi, par exemple, $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et tous ses sous-espaces sont positifs définis. Meckes montre même dans [3] que tous les espaces l_p^n pour $0 < p \leq 2$ sont positifs définis.

Il nous reste donc à nous assurer que la limite des $|X_k|$ quand $(X_k)_k$ est une suite de sous-espaces finis de X tendant vers X pour la distance de Hausdorff est bien définie. Plutôt que de nous attaquer de front à un tel problème, rappelons nous les propriétés de la magnitude. Comme la magnitude est une manière de mesurer la taille d'un espace métrique, nous souhaitons qu'elle soit croissante par rapport à l'inclusion d'espace métrique. Nous avons vu que c'était le cas pour les espaces métriques finis positifs définis par exemple. Alors, plutôt que de considérer la limite de suites de sous-espaces finis, il semble bien plus judicieux et naturel de prendre la borne supérieure de la magnitude des sous-espaces finis de X. Cela donne

Definition 9. *Soit X un espace métrique compact positif défini. On définit la magnitude de X par*

$$|X| = \sup\{|Y|,\ Y \subset X \textit{ et } Y \textit{ est fini}\}$$

Cette définition existe pour les espaces métriques généraux mais elle sera particulièrement intéressante et maniable pour les espaces métriques compacts positifs définis.

Par des arguments géométriques relativement simples, il est possible de montrer que

Proposition 4. *$X \mapsto |X|$ est une fonction semi-continue inférieure sur l'ensemble des espaces métriques compacts positifs définis. Il s'agit en particulier de l'extension semi-continue inférieure maximale de la magnitude définie sur les espaces métriques finis aux espaces métriques compacts positifs définis.*

Ainsi, notre définition de la magnitude apparaît encore comme l'extension naturelle aux espaces métriques compacts positifs définis.

Il est alors facile de montrer qu'avec cette définition, toute suite de sous-espaces compacts $(X_k)_k$ de X qui tend vers X converge en magnitude vers la magnitude de X - on retombe sur nos pattes.

4.2 Définition par les mesures de pondération

Dans l'introduction de cette section, nous avons parlé de généraliser nos outils aux espaces infinis. En particulier, une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ devient une fonction $\mathbb{R}^{X\times X}$ et un pondération $w \in \mathbb{R}^n$, agissant comme une pondération, devient une mesure μ pour la tribu borélienne de X. On peut alors établir les définitions analogues au cas fini en considérant les **mesures boréliennes finies** $M(X)$.

Definition 10. *Soit $Z : M(X) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$Z\mu(y) = \int e^{-d(x,y)} d\mu(x)$$

Z est donc l'analogue du vecteur $\zeta_X w$. On définit alors une **mesure de pondération** comme une mesure $\mu \in M(X)$ vérifiant $Z\mu \equiv 1$ est constante égale à 1 - c'est l'équivalent d'un pondération. Si un espace compact admet une mesure de pondération, il semble naturel de définir sa magnitude par $\mu(X)$. On peut alors montrer que cette définition coïncide avec la précédente. Mais, le problème qui se pose, est qu'il est en pratique très difficile de savoir si un espace possède une mesure de pondération. En particulier, pour la quasi-totalité des espaces métriques compacts positifs définis, c'est une question ouverte. La définition n'est donc pas satisfaisante et il faut imaginer autre chose.

Rappelons-nous que sur les espaces métriques finis positifs définis, il est possible de caractériser la magnitude par $\max_{x\neq 0} \dfrac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{x^T \zeta_X x}$. En adaptant cette caractérisation, on obtient une définition cette fois bien plus satisfaisante.

On commence par définir une forme bilinéaire sur $M(X)$ qui mime $x^T \zeta_X x$.

Definition 11. *Soit $\langle , \rangle$ la forme bilinéaire définie sur $M(X) \times M(X)$ par*

$$\langle \mu, \nu \rangle = \int \int e^{-d(x,y)} d\mu(x) d\nu(y)$$

On peut alors copier notre quotient.

Proposition 5. *Soit X un espace métrique compact positif défini. Alors*

$$|X| = \sup \left\{ \frac{\mu(X)^2}{Z_X(\mu,\mu)},\ \mu \in M(X) \text{ and } Z(\mu,\mu) \neq 0 \right\}$$

Le supremum ci-dessus est atteint exactement par les multiples des mesures de pondération qui existent éventuellement sur X.

4.3 Définition par l'espace des pondérations

Il est possible de donner une définition plus intéressante que celle ci-dessus en reconsidérant notre fonction Z et notre forme bilinéaire $\langle , \rangle$. Au lieu de nous placer directement dans l'espace des mesures boréliennes finies $M(X)$, plaçons nous dans l'espace des mesures boréliennes finies à support fini $FM(X)$ qui équivaut à l'ensemble des combinaisons linéaires de mesures de dirac où encore à nos pondérations finies $w \in \mathbb{R}^n$. Dire que notre espace X est positif défini équivaut alors à dire que $\langle , \rangle$ défini sur $FM(X) \times FM(X)$ est un produit scalaire. Nous noterons désormais la forme bilinéaire $\langle , \rangle_{\mathcal{W}}$ pour la différencier de celle de la section précédente.

De la même manière que nous avons pris comme magnitude la limite de la magnitude des sous-ensembles fini, nous allons ici considérer $\mathcal{W}$ le complété de $FM(X)$ pour la distance induite par $\langle , \rangle_{\mathcal{W}}$.

Maintenant, il nous faut définir ce qu'est une pondération dans notre espace $\mathcal{W}$. Une mesure de pondération était une mesure μ telle que $Z\mu \equiv 1$. Nous allons transposer cette égalité dans $\mathcal{W}$.

Proposition 6. *Pour tout $\mu \in FM(X)$, $Z\mu \in C^{1/2}$, l'espace de fonctions Hölder-continues d'exposant 1/2 et est bornée pour $|\cdot|_{1/2}$. Ainsi, $Z : FM(X) \to C^{1/2}$ se prolonge en $Z : \mathcal{W} \to C^{1/2}$ et son prolongement est de plus injectif et vérifie $\langle w, \mu\rangle_{\mathcal{W}} = \int (Zw) d\mu$ pour $w \in \mathcal{W}$ et $\mu \in FM(X)$.*

Ces propriétés se montrent grâce de l'analyse fonctionnelle assez élémentaire, détaillée dans [4].

Pour l'instant, nous avons travaillé dans le cadre des espaces métriques positifs définis général. Mais pour parler de magnitude, nous allons devoir nous restreindre aux sous-espaces compacts de ces espaces métriques positifs définis. Ainsi, pour X un espace métrique positif défini et Y un sous-espace compact de X dont on veut exprimer la magnitude, on pose $\mathcal{W}_Y$ l'adhérence de $FM(Y)$ pour $\langle , \rangle_{\mathcal{W}}$. En réalité, cette définition est indépendante de l'espace X et on peut définir $\mathcal{W}_Y$ de manière indépendante comme pour X. On peut alors exprimer notre magnitude.

Proposition 7. *Soit Y un sous-espace compact d'un espace métrique positif défini X. Soit $w \in \mathcal{W}_Y$. Alors, on dit que w est une* ***pondération*** *pour Y si $Zw \equiv 1$ sur Y.*

Alors

$$|Y| = \begin{cases} \|w\|^2_{\mathcal{W}} \text{ si } Y \text{ possède une pondération } w \\ \infty \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut expliquer notre choix de $\|w\|^2_{\mathcal{W}}$ par analogie avec le cas fini. Dans le cas fini, nous avons défini $|X|$ par $\sum_i w_i$. Cela correspondrait à $\int dw = w(X)$ pour w notre pondération - c'est ce que nous avons fait dans la section précédente lorsque w était une mesure de pondération. Mais dans notre cas précis, justement, w n'est pas une mesure et l'expression $\int dw$ n'a pas de sens. Mais rappelons nous aussi que dans le cas fini positif défini, $|X| = \sum_i w_i = w^T \bar{1} = w^T(\zeta_X w) = w^T \zeta_X w = \langle w, w\rangle = \|w\|^2$. Nous ne faisons donc que mimer ce cas.

Un énorme avantage de ce point de vue est qu'il nous permet de considérer l'espace dual. En effet, la magnitude dépend de l'existence d'une pondération qui elle même dépend de l'image de $\mathcal{W}_Y$ par Z qui doit alors contenir une fonction constante égale à 1 sur Y.

Definition 12. *Soit X un espace métrique positif défini. On définit $\mathcal{H} = Z(\mathcal{W})$ et $\mathcal{H}_Y = Z(\mathcal{W}_Y)$ pour tout sous-espace compact Y de X. Comme Z est injectif, on définit un produit scalaire $\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Z^{-1}f, Z^{-1}g\rangle_{\mathcal{H}}$.*

Cette définition fait donc de $Z : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$ une isométrie et $\mathcal{H}$ hérite des propriétés de $\mathcal{W}$. $\mathcal{W}$ et $\mathcal{H}$ sont liés par la forme bilinéaire $\langle w, f\rangle = \langle Zw, f\rangle_{\mathcal{H}} = \langle w, Z^{-1}f\rangle_{\mathcal{W}}$.

En particulier, rappelons nous que $\langle w, \mu\rangle_{\mathcal{W}} = \int (Zw) d\mu$. Donc, soit $h \in \mathcal{H}$ tel que $h = Zw$ avec $w \in \mathcal{W}$. On a d'une part

$$\langle h, \delta_x \rangle = \langle w, \delta_x \rangle_{\mathcal{W}} = \int (Zw) d\delta_x = \int h d\delta_x = h(x)$$

et d'autre part

$$\langle h, \delta_x = \langle h, Z\delta_x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, e^{-d(x,\cdot)} \rangle_{\mathcal{H}}$$

Autrement dit, $\langle h, e^{-d(x,\cdot)} \rangle_{\mathcal{H}} = h(x)$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert à noyau reproduisant de X pour le noyau reproduisant $K(x, y) = e^{-d(x,y)}$.

Cette caractérisation va permettre en particulier d'établir des résultats dans les espaces euclidiens où ces notions intervienennt régulièrement et sont bien connues.

On peut établir la caractérisation duale de la magnitude d'un espace compact positif défini.

Proposition 8. *Soit X un espace métrique positif défini et Y un sous-espace compact de X. Alors X a une pondération si et seulement si $\mathcal{H}$ contient une fonction constante égale à 1 sur Y. De plus, dans ce cas*

$$|Y| = \inf\{\|h\|^2_{\mathcal{H}},\ h \in \mathcal{H} \textit{ et } h \equiv 1 \textit{ sur } Y\}$$

et l'infimum est atteint de manière unique par la fonction potentiel de X.

Cette proposition se démontre encore par de l'analyse fonctionnelle.

Par exemple dans le cas de l'espace euclidien de dimension n, Meckes a montré que $\mathcal{H}$ était en fait $H^{(n+1)/2}$ l'espace des potentiels de Bessel et, en combinant avec d'autres résultats, produit de nombreuses propriétés.

5 Biologie et conclusion

De manière très intéressante, la première apparition connue de la magnitude d'un espace métrique fini a eu lieu en biologie, dans un article de 2 économistes de formation, Solow et Polasky ([6]) en 1994. Ceux-ci, indépendamment de toute considération théorique pour les mathématiques derrières, utilisent la magnitude comme une mesure de la biodiversité avec une intuition utilitariste.

Plus tard, plusieurs mathématicien·nes spécialisé·es dans la magnitude se sont intéressés au lien entre mesure de (bio)diversité et magnitude, par exemple Leinster et Meckes.

Un exemple assez simple frappant et qui préfigure aussi des liens entre magnitude et homologie persistante, relation très riche dont je n'ai pas parlé ici, est celui de l'espace induit par l'espace ultramétrique induit par un arbre phylogénétique d'un groupe d'espèces. Les espèces peuvent être regroupées par catégories de plus en plus grandes : espèce, genre, famille, ordre, classe, division, règne et domaine étant la classification la plus classique en biologie. On peut alors créer un arbre ou un noeud à un niveau correspond à une séparation à ce niveau précis. Cela aboutit à une distance ultramétrique entre les espèces. Or, dans la fonction de magnitude, il est possible de lire, en fonction de la valeur de t, le nombre d'espèces puis de genres, de familles, d'ordres etc.

En conclusion, la magnitude ne cesse d'étonner par ses propriétés et ses applications. Nous avons ici exploré les questions théoriques liées à la magnitude en tant que tel, mais il reste beaucoup à explorer sur le calcul concret de la magnitude, la fonction de magnitude mais de manière plus générale sur la magnitude de certaines catégories enrichies ou bien sur l'homologie de magnitude qui fait le lien entre homologie et magnitude.

Tom Leinster garde une liste actualisée de références liées à la magnitude sur son site personnel.

References

[Law73] F. William Lawvere. "Metric spaces, generalized logic, and closed categories". In: *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano* 43.1 (Dec. 1973), pp. 135–166. ISSN: 1424-9294. DOI: 10.1007/BF02924844. URL: https://doi.org/10.1007/BF02924844.

[Lei06] Tom Leinster. *The Euler characteristic of a category*. 2006. arXiv: math/0610260 [math.CT].

[Mec12] Mark W. Meckes. "Positive definite metric spaces". In: *Positivity* 17.3 (Sept. 2012), pp. 733–757. DOI: 10.1007/s11117-012-0202-8. URL: https://doi.org/10.1007%2Fs11117-012-0202-8.

[Mec14] Mark W. Meckes. "Magnitude, Diversity, Capacities, and Dimensions of Metric Spaces". In: *Potential Analysis* 42.2 (Oct. 2014), pp. 549–572. DOI: 10.1007/s11118-014-9444-3. URL: https://doi.org/10.1007%2Fs11118-014-9444-3.

[Mec20] Mark W. Meckes. "ON THE MAGNITUDE AND INTRINSIC VOLUMES OF A CONVEX BODY IN EUCLIDEAN SPACE". In: *Mathematika* 66.2 (Mar. 2020), pp. 343–355. DOI: 10.1112/mtk.12024. URL: https://doi.org/10.1112%2Fmtk.12024.

[SP94] Andrew R. Solow and Stephen Polasky. "Measuring biological diversity". In: *Environmental and Ecological Statistics* 1.2 (June 1994), pp. 95–103. ISSN: 1573-3009. DOI: 10.1007/BF02426650. URL: https://doi.org/10.1007/BF02426650.

[Wil13] Simon Willerton. "On the magnitude of spheres, surfaces and other homogeneous spaces". In: *Geometriae Dedicata* 168.1 (Feb. 2013), pp. 291–310. DOI: 10.1007/s10711-013-9831-8. URL: https://doi.org/10.1007%2Fs10711-013-9831-8.