

# Introduction au domaine de recherche

Raphael Hiault

September 2023

## 1 Introduction

J'aimerais dans ce texte essayer d'expliquer la phrase suivante : "les variétés hyperboliques, c'est-à-dire au fibré canonique positif, sont géométriquement très différentes des espaces projectifs". Une telle phrase pour être vraiment comprise dans un cadre général demanderait probablement plusieurs centaines de pages. Dans ce texte nous étudierons un cas bien plus simple : celui des surfaces de Riemann. Nous commencerons par illustrer la rigidité de ces objets mathématiques, en présentant la petite panoplie de théorèmes connus sur leur sujet. Cela sera l'occasion pour nous de commencer à parler d'hyperbolicité et de ses manifestations géométriques. Nous verrons alors ensuite le théorème de Riemann-Roch, central mais dont ici seul l'esprit nous suffira pour mieux comprendre les surfaces de Riemann. On finira alors sur un aperçu rapide de l'état de la recherche actuelle concernant le degré d'irrationalité des variétés

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Surfaces de Riemann : un rappel</b>	<b>2</b>
2.1	Définitions . . . . .	2
2.2	Application entre surface de Riemann . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Théorème d'uniformisation, positivité et genre</b>	<b>4</b>
3.1	Enoncé du théorème d'uniformisation . . . . .	4
3.2	Hyperbolicité . . . . .	5
3.3	Genre d'une courbe . . . . .	6
3.4	Conclusion préliminaire . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Trouver des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann : un grand enjeu de la géométrie complexe</b>	<b>7</b>
4.1	Importance des fonctions méromorphes . . . . .	7
4.2	Diviseurs sur une courbe . . . . .	7
4.3	Théorème de Riemann-Roch . . . . .	8

<b>5</b>	<b>Mesure d'irrationnalité</b>	<b>9</b>
5.1	La notion de degré . . . . .	9
5.2	Théorème de Noether pour la gonality . . . . .	9
5.3	Des généralisations de ce théorème . . . . .	10
5.4	Bref récapitulatif . . . . .	10

## 2 Surfaces de Riemann : un rappel

### 2.1 Définitions

**Définition 1.** *Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1. On peut aussi parler de courbes lisse complexe.*

**Remarque 1.** *Pour plus de précision, ici on définit la notion de variété complexe de dimension 1 : c'est une variété réelle de dimension 2, dont les changements de cartes sont holomorphes. De fait, la nature de la définition rend beaucoup plus rigide les courbes complexes, ce qui d'ailleurs pourra se voir tout au long de ce travail. On se permet ici de ne pas définir en dimension supérieure la notion de variété car en dehors de l'espace projectif nous ne manipulerons seulement que des courbes.*

**Exemple 1.** *Un premier exemple est la droite projective complexe. De façon générale on peut penser à l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  comme l'ensemble des droites complexes de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . On peut montrer que  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  est bien une variété complexe de dimension  $n$ . Enfin, on peut simplement vérifier que deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{C}^{n+1}$  engendrent la même droite si et seulement si ils sont colinéaire (i.e il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $u = \lambda v$ ). On peut donc voir  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  comme un quotient de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . On notera  $[v_0, \dots, v_n]$  la classe d'équivalence du vecteur  $v = (v_0, \dots, v_n)$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .*

Comment penser à l'espace projectif? En réalité, au delà de l'intérêt en lui même de cet espace, nous allons plutôt regarder ses sous-variétés. Cela devient plus clair lorsque l'on pense à ces espaces comme des compactifications de  $\mathbb{C}^n$ . Par exemple, une façon facile de construire de telles sous-variétés est par l'annulation de polynômes homogènes :

**Définition 2.** *Pour  $F$  un polynôme en  $n + 1$  variables  $X_0, \dots, X_n$ , on dit que  $F$  est homogène de degré  $d$  si pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a :*

$$F(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \dots, X_n)$$

Cela permet de regarder une nouvelle famille de variété centrale en géométrie algébrique complexe :

**Remarque 2.** *Une grande famille de variété, est celle est des variétés projectives. Une telle variété est définie par l'annulation d'un ou plusieurs polynômes homogènes dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Plus précisément, si  $F$  est un polynôme en  $n + 1$  variables,  $P = [X_0, \dots, X_n]$  est dans la variété bien définie par  $F$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  si  $F(X_0, \dots, X_n) = 0$ . La condition d'homogénéité assure que cela est bien défini.*

**Exemple 2.** *Un exemple peut-être donné : le cas d'une courbe complexe dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . On peut regarder par exemple la variété définie par l'annulation de  $Y^2Z - X^3 - XZ^2$ . Pour se donner une certaine intuition, on peut ici repérer une certaine similitude entre l'équation*

$Y^2Z - X^3 - XZ^2 = 0$  et  $y^2 = x^3 + x$ . La dernière est bien connue, et s'obtient en fixant  $Z = 1$  dans la première. Réciproquement, la courbe projective décrite par la première équation s'obtient en ajoutant un point à l'infini sur la courbe définie par la seconde équation.

Après avoir lu cela, la.e lecteur.ice peut se demander quel est l'intérêt de regarder des variétés projectives ? J'aimerais proposer ici quelques raisons.

D'abord, j'aimerais préciser que toute explication retrospective de la justification d'un objet mathématiques est vouée à l'échec, le plus souvent. En effet, le simple travail même d'élaboration de l'objet fait partie de la démarche permettant de penser l'objet comme naturel. Chaque hypothèse se trouve alors dûment justifiée et "naturelle". Ainsi, quand bien même j'aimerais convaincre ici la.e lecteur.ice du caractère intuitif des espaces projectifs, la réalité est plutôt que cela vient en manipulant les objets géométriques en question.

Tout de même on peut déjà voir qu'en particulier, naturellement apparaît la droite projective bien connue sous le nom de sphère de Riemann. Plus généralement, les espaces projectifs sont des sortes de compactifications des espaces  $\mathbb{C}^n$ . L'intérêt de la compactification est notamment, pour étudier les intersections de courbes par exemple. Dans ce cadre, la théorie s'énonce bien plus clairement. En effet, deux courbes peuvent ne pas se croiser dans  $\mathbb{C}^n$  néanmoins cela n'est pas possible dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}^n)$ . D'ailleurs un théorème de Bézout nous dit que cela ne dépendra que du degré de nos courbes, notion que je mentionnerai plus tard.

Enfin, un argument venant après avoir fait la théorie, montre que le cadre des variétés projectives est un bon cadre. Cet argument est l'algébrisation des surfaces de Riemann. Disons d'ailleurs un peu plus sur le sujet. D'abord la formalisation de ce résultat demande l'introduction de nouveaux objets et de nouvelle méthode, à savoir les faisceaux et leur cohomologie. Ce sera Serre, un des mathématiciens ayant développé ce langage qui prouvera ce résultat en 1956 dans [3]. Le contenu même du théorème s'exprime donc dans un langage différent de celui dans lequel on travail maintenant mais son contenu est tout de même compréhensible pour nous. Le GAGA exprime le fait que toute surface de Riemann compacte (c'est à dire un objet de nature analytique) est aussi une variété algébrique projective (c'est à dire défini par l'annulation de polynôme). Ce théorème illustre d'abord la rigidité du monde complexe, Le monde de la géométrie complexe serait donc plus de nature algébrique qu'analytique ? Néanmoins ce serait faire une faute grave de n'utiliser que des méthodes algébriques pour appréhender ces objets, au contraire, l'intérêt même de ce théorème est qu'il permet d'utiliser un arsenal de technique différentes (courbure, cohomologie etc) et même de les mélanger.

## 2.2 Application entre surface de Riemann

Nous aimerions maintenant exprimer quelques propriétés des applications entre surface de Riemann. Leur rigidité impressionnera probablement la.e lecteur.ice. On se fixe maintenant  $X, Y$  deux surfaces de Riemann compactes Ce qu'il faudrait retenir de cette section est le fait qu'une application entre surface de Riemann compacte est en réalité la donnée d'un revêtement ramifié :

**Proposition 1.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme non-constant de surface de Riemann com-*

pacte. Alors,  $f$  est surjective et la fibre d'un point générique est de cardinal constant que l'on appelle le degré de  $f$

*Démonstration.* La partie portant sur la surjectivité de l'application est simple : on peut vérifier que  $f$  est une application ouverte puisque non-constante (c'est un fait bien connu d'analyse complexe qui est local et donc se transporte dans le cas des variétés). Ainsi, puisque l'image de  $f$  est fermée (l'image d'un compact par une application continue est compacte), alors l'image  $f(X)$  est à la fois ouverte et fermée, c'est donc  $Y$

Pour vérifier que le cardinal d'une fibre d'un point générique est constant, cela repose sur quelques calculs. Ce fait est néanmoins une conséquence plus ou moins directe de la forme normale des applications holomorphes de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$   $\square$

**Remarque 3.** *Nous mentionnons ici l'idée de point générique. L'appréciation du sens de ce terme est souvent variée. Ici, nous sous-entendons qu'en dehors d'un nombre de point fini, chaque fibre est de même cardinal.*

Enfin, un dernier fait, qui justifiera plus loin notre travail sur les fonctions méromorphes est le fait suivant :

**Proposition 2.** *Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , une application holomorphe. Alors,  $f$  est constante*

*Démonstration.* Supposons que  $f$  ne soit pas constante. On regarde l'application  $x \in X \mapsto |f(x)|$ . Elle atteint son maximum en un point  $P \in X$ . En choisissant une carte  $\phi$  centrée en  $P$ , on voit alors que  $f \circ \phi$  contredit le principe du maximum (le maximum devrait être atteint sur les bords et non dans l'intérieur de notre domaine), elle est donc en réalité constante par connexité.  $\square$

Pour donner un avant goût de l'objet final de ce texte, on peut d'ores et déjà expliquer que ce nous essayerons sera d'évaluer le plus petit degré d'un morphisme de surface de Riemann  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Pour autant, nous retardons l'étude de ce problème pour laisser le lecteur se familiariser avec le sujet.

### 3 Théorème d'uniformisation, positivité et genre

Ici, nous essayons de communiquer au lecteur une manière de classer les surfaces de Riemann à travers diverses propriétés géométriques. Pour cela, nous allons énoncer un résultat de classification pour en exploiter les conséquences géométriques. Ce sera l'occasion d'introduire un élément central de mon sujet de thèse : l'hyperbolicité.

#### 3.1 Énoncé du théorème d'uniformisation

Nous allons ici présenter ce qui est souvent appelé le théorème d'uniformisation de Riemann. Ce théorème établit une sorte de trichotomie qui sera très précieuse pour la suite de cette exposé.

**Théorème 1.** *Soit  $X$  une surface de Riemann. Alors,  $X$  appartient à l'une de ces trois grandes classes : les surfaces de Riemann elliptiques c'est-à-dire celle isomorphe à la droite*

projective  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . les surfaces de Riemann parabolique : à savoir,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^*$ , mais aussi les tores plats. Enfin les surfaces de Riemann hyperboliques : ce sont les quotient de la boule ouverte de  $\mathbb{C}$  par un sous groupe discret de  $PSL(2, \mathbb{R})$  agissant librement.

Cette trichotomie si l'on veut la résumer rapidement classe les surfaces de Riemann en fonction de leur revêtement universel : à savoir pour le premier groupe la sphère de Riemann, pour le second le plan complexe et pour le dernier la boule unité). C'est exactement ce fait que nous allons exploiter, et notamment ses conséquences géométriques.

### 3.2 Hyperbolicité

Ici nous introduisons une notion centrale de ce texte : "l'hyperbolicité". La.e lecteur.ice malin.e aura déjà remarqué la notion de ce mot dans la trichotomie des surfaces de Riemann. Il se trouve en réalité, que le concept d'hyperbolicité est un concept bien plus large et présent sous différentes formes à travers toutes les mathématiques. D'ailleurs au sein même de la géométrie, le concept peut revêtir différents sens. Ici, puisque nous allons nous restreindre aux surfaces de Riemann compacte, nous limitons la polysémie.

**Définition 3.** Soit  $X$  une surface de Riemann on dira que  $X$  est hyperbolique au sens de Brody s'il n'existe pas d'explication non-constante holomorphe  $f : \mathbb{C} \rightarrow X$

Comment comprendre cette propriété ? Ici l'idée est assez simple : une variété est hyperbolique si elle n'admet pas de "courbe" comme sous-variété. C'est donc une condition en réalité très géométrique.

**Remarque 4.** Ici, dans la définition, nous parlons d'hyperbolicité au sens de Brody. En effet, il existe différentes manières de définir une propriété d'hyperbolicité comme l'hyperbolicité au sens de Kobayashi. Dès lors que nous regardons le cas compact, les deux notions coïncident.

Naturellement, on peut se demander si la catégorie des surfaces de Riemann hyperboliques (du théorème d'Uniformisation) coïncide avec celle hyperbolique au sens de Brody. Il se trouve que oui et que la preuve est immédiate :

*Démonstration.* Soit  $X$  une surface de Riemann qui ne soit pas hyperbolique. Dans ce cas  $X$  est elliptique ou parabolique. Dans le premier cas,  $X$  est la droite projective, on peut donc définir  $z \mapsto [z : 1]$ , dont on voit que c'est une application holomorphe non-constante. Dans le cas parabolique, on peut ou bien considérer l'application exponentielle si  $X$  est isomorphe à  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ , ce qui donne une application holomorphe non-constante comme voulue. Si c'est un tore de genre 1, on peut simplement prendre l'action de  $\mathbb{C}$  sur le tore (par les translations). Ainsi, dans chacun de ces cas, on voit ici que  $X$  n'est pas hyperbolique au sens de Brody.

Dans l'autre sens, si  $X$  est hyperbolique, alors elle est bien hyperbolique au sens de Brody. En effet, considérons une application  $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ , alors, elle se factorise à travers le revêtement universelle de  $X$  c'est-à-dire la boule ouverte de rayon 1 de  $\mathbb{C}$ . On en déduit alors immédiatement qu'elle doit-être constante puisque bornée.  $\square$

On voit donc maintenant une autre propriété de notre trichotomie, qui si l'on se concentre sur la propriété d'hyperbolicité se résume en une dichotomie. On va maintenant voir que l'on peut ajouter une nouvelle donnée géométrique influencée par les propriétés d'hyperbolicité : le genre.

### 3.3 Genre d'une courbe

Le genre est un invariant géométrique que l'on peut associer à chaque courbe complexe dans l'objectif de les différencier. A comprendre ici, deux courbes de genre différents ne pourront être isomorphes. Il existe différentes manières de parler du genre d'une courbe, plus ou moins simple, ici nous allons prendre une définition assez géométrique, et mentionneront une autre interprétation encore plus géométrique de ce fait. On fixe donc  $X$  une surface de Riemann compacte

**Définition 4.** *On appelle genre de  $X$  la dimension de  $H^0(X, \omega_X)$  i.e l'espace vectoriel des formes différentielles définies globalement sur  $X$ . On le note  $g$  et  $g$  est fini.*

Cette définition est une sorte de définition-théorème, puisqu'il suppose de savoir que  $H^0(X, \omega_X)$  est dimension finie (fait qui est démontré par Riemann-Roch dans la théorie!). Une autre manière de voir le genre, bien plus topologique est de voir  $g$  comme le nombre de trou de la surface réelle associée à  $X$ . Cette définition possède l'avantage de donner une intuition claire et topologique de ce nombre mais est fortement limitante pour comprendre comment l'interpréter quantitativement dans nos calculs (au delà de l'aspect évidemment qualitatif de la différence géométrique évidente de ne pas avoir le même nombre de trou.) On admettra ici l'équivalence des deux notions.

Comment le genre et l'hyperbolicité des surfaces de Riemann se comportent vis-à-vis de l'un et l'autre? Sans mener de grands calculs, on peut en réalité retomber sur la dichotomie hyperbolique/non-hyperbolique, qui ici s'exprime sous la forme  $g \leq 1$  ou  $g \geq 2$ . En effet on peut vérifier que les variétés de genre 0 sont isomorphes à la droite projective et celles de genre 1 sont les tores (avec l'interprétation topologique cela devient quasiment immédiat). Ainsi, le théorème d'uniformisation nous assure que les surfaces de Riemann de genre  $g \geq 2$  sont exactement les surfaces de Riemann hyperbolique.

**Remarque 5.** *Pour prouver que les surfaces de Riemann de genre 0 sont isomorphes à la droite projective on a besoin d'un théorème celui de Riemann-Hurwitz et de comprendre les applications entre surface de Riemann comme revêtement (ce que l'on abordera plus tard)*

Parmi les courbes de genre plus grand que 2 peut aussi s'établir une dichotomie : hyperelliptique/non-hyperelliptique. Expliquons la rapidement. Les courbes hyperelliptiques sont des courbes définies par une équation algébrique du type  $y^2 = f(x)$  où  $f$  est un polynôme. La particularité de ces courbes est que leur fibré cotangent (ici on peut simplement se dire l'ensemble des 1-formes holomorphes globalement définies) n'est pas très ample, c'est-à-dire que pour toute paire de point sur la courbe, nous ne pouvons pas nécessairement trouver une 1-forme s'annulant à l'un des points donnés mais pas l'autre. Par exemple, toutes les courbes de genre 2 sont hyperelliptiques, mais des modèles existent aussi en dimension supérieure. A contrario, celles non-hyperelliptiques ont un fibré cotangent très ample, ce qui les rend "plus hyperbolique". On le verra plus tard lorsque nous parlerons de gonologie d'une courbe mais cette distinction reflète des comportements géométriques très différents vis-à-vis de cet invariant.

### 3.4 Conclusion préliminaire

Pour conclure cette section, j'espère que le lecteur sera convaincu maintenant de l'intérêt de la notion d'hyperbolicité. En effet, cette notion a priori quelconque révèle un

type de géométrie particulière sur les surfaces concernées et donc peut se concevoir comme une classe de variété très large et géométrique (celle de genre plus grand que 2 et ayant beaucoup de forme différentielle) pourtant très rigide (non-existence de certaines applications holomorphes non-constante). On touche ici à une idée qui est celle de la "positivité". La trichotomie annoncée ici peut en réalité assez bien se généraliser en dimension supérieure en parlant de la positivité du fibré cotangent d'une variété. Cela revient à demander que cette variété possède "suffisamment" de forme différentielle. L'étude de la positivité est un sujet actuellement très dynamique. En effet, en arithmétique cela a donné lieu à l'un des plus grands théorèmes du 20e siècle, le théorème de Faltings. Ce théorème explique qu'il n'y a qu'un nombre fini de point rationnel sur une courbe de genre plus grand que 2.

## 4 Trouver des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann : un grand enjeu de la géométrie complexe

Pour le moment nous n'avons pas encore abordé une des questions fondamentales de l'étude des surfaces de Riemann : l'existence de fonctions méromorphes et des formes différentielles sur ces dernières. Pourtant, un théorème apporte cette réponse et joue un rôle fondamental dans la preuve de GAGA (que nous expliciterons pas ici). Ce théorème est le théorème de Riemann-Roch. Avant cela, nous essayons de motiver l'étude des fonctions méromorphes et devront passer par quelques définitions additionnelles.

### 4.1 Importance des fonctions méromorphes

Comme nous avons pu le mentionner dans la section précédente, le bon endroit pour faire de la géométrie complexe est souvent l'espace projectif. Nous avons proposé de le regarder comme une sorte d'espace affine, ce qui nous invitait donc à regarder ses sous-variétés. En particulier, nous avons parlé de celles définies par l'annulation de polynômes qui de fait sont des variétés algébriques. Pour autant a priori, une surface de Riemann quelconque est donnée comme un espace topologique abstrait et ne réalise pas comme sous-variété de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Une question naturelle est donc : peut-on réaliser toute surface de Riemann comme une sous-variété d'un espace projectif ? Comment faire cela ? Tout cela en réalité revient à l'existence de fonctions méromorphes sur la surface de Riemann donnée que l'on note  $X$ . En effet, supposons que  $X$  admette des fonctions méromorphe  $f_1, \dots, f_n$  qui n'ont pas de zéros communs, alors, on peut définir une application  $f : x \in X \mapsto [1 : f_1(x), \dots, f_n(x)]$ . On peut vérifier que cela est bien défini et espérer que si nous disposons de suffisamment de fonctions méromorphes sur  $X$  que nous ayons une immersion fermée dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . La réponse est : oui ! C'est le théorème de Riemann-Roch qui nous permettra de réaliser cela.

### 4.2 Diviseurs sur une courbe

Regardons  $X$  une courbe complexe. On définit la notions de diviseur :

**Définition 5.** *On appelle diviseur, tout élément du groupe libre engendré par les points de  $X$*

**Exemple 3.** *On peut regarder la courbe elliptique  $y^2 = x^3 + x$  dans  $\mathbb{C}^2$ . Alors, si l'on note  $P = (1, \sqrt{2})$  et  $Q = (2, \sqrt{10})$ , alors  $P + Q$  est un diviseur sur cette courbe.*

On peut associer à toute fonction depuis une surface de Riemann dans  $\mathbb{C}$  un diviseur :

**Définition 6.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction méromorphe, alors on peut associer à  $f$  un diviseur noté  $\text{div}(f)$  défini par  $\sum_{x \in X} \text{ord}_x(f)[x]$

Ce qu'un diviseur de fonction encode ce sont simplement les zéros et les pôles de la fonction. Nous avons volontairement omis de définir les notions d'ordre d'un point. En réalité, il suffit de savoir que la notion est bien définie pour une fonction holomorphe  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dès lors, il suffit de travailler dans des cartes locales sur la surface de Riemann pour pouvoir calculer les ordres voulus.

On peut maintenant exprimer plus facilement maintenant les questions d'existence de fonctions :

**Définition 7.** Soit  $D$  un diviseur sur une surface de Riemann. On note  $\mathcal{L}(D)$  l'espace des fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\text{div}(f) + D \geq 0$

**Exemple 4.** Reprenons notre exemple sur notre courbe elliptique  $E$  définie avant. On peut alors regarder  $\mathcal{L}(D)$  c'est à dire les fonctions qui ont au plus des pôles d'ordre 1 en  $P$  et  $Q$  et sans contrainte sur les zéros.

Enfin une notion importante est celle de degré d'un diviseur :

**Définition 8.** Soit  $X$  une surface de Riemann et  $D = \sum_{x \in X} n_x[x]$ , on appelle degré de  $D$  la somme  $\sum_{x \in X} n_x$

On verra que lorsque l'on regarde un espace  $\mathcal{L}(D)$  pour  $D$  un diviseur de haut degré sur une surface de Riemann alors, il existe des fonctions dans cet espace. Ce résultat est en réalité plutôt intuitif. En effet pour  $D$  un diviseur de haut degré, l'espace  $\mathcal{L}(D)$  consiste des fonctions avec notamment les pôles autorisés par le diviseur  $D$ . Or, en étant de haut degré les fonctions de  $\mathcal{L}(D)$  sont autorisées à avoir de nombreux pôles, ce qui laisse donc un plus grand degré de liberté.

### 4.3 Théorème de Riemann-Roch

L'objet maintenant de cette sous-section est d'enfin énoncer le théorème de Riemann-Roch. Ce théorème comme dit permet aux géomètres de contrôler l'existence de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann. Voici un énoncé de ce théorème

**Théorème 2.** Soit  $X$  une surface de Riemann compacte et  $D$  un diviseur sur  $X$  de degré  $m$ . Si  $D$  est effectif, alors  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \geq m - g + 1$ . Dans le cas où  $m \geq 2g - 1$ , alors  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = m - g + 1$

**Remarque 6.** Le théorème en réalité ne s'énonce pas de cette manière là. Dans le langage moderne le théorème de Riemann-Roch exprime la différence de dimension entre deux groupes de cohomologie en fonction du genre de la surface notamment. C'est avec la dualité de Serre, qui fait le lien entre ces différents groupes de cohomologie que nous sommes capables de retirer du théorème de Riemann-Roch une forme exploitable, comme celle exposée ici.

Que dire sur ce théorème ? D'abord il est spécifique au cas des surfaces de Riemann puisque l'on ne retrouve pas d'équivalent en dimension supérieure. C'est probablement une des raisons pourquoi les surfaces de Riemann sont si rigides. C'est d'ailleurs ce théorème qui nous permet de réaliser toute surface de Riemann en tant que surface projective.  $\text{deg}(D)$ .

## 5 Mesure d'irrationnalité

Nous aimerons maintenant présenter un invariant au centre du sujet de thèse que vise à vulgariser cet écrit. Comme nous avons déjà pu le mentionner avant, nous cherchons à mesurer à quel point une surface de Riemann compacte notée  $X$  est "différente" du modèle canonique de surface de Riemann à savoir la droite projective complexe. Pour cela, nous pouvons avoir envie d'étudier les morphismes  $f \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Nous savons que ce sont donc les revêtement de la droite projective complexe par  $X$  et que si  $\deg(f) = 1$  alors  $f$  est un isomorphisme. Cela motive la définition suivante :

**Définition 9.** *Soit  $X$  une surface de Riemann compacte, on définit la gonalité de  $X$  notée  $\text{gon}(X)$  le plus petit degré d'un morphisme  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .*

On cherche donc à mesurer la différence au modèle canonique en mesurant à quel point il n'est pas possible d'avoir un isomorphisme avec la droite projective. Naturellement, on s'attend à ce que les surface de Riemann hyperbolique admettent une gonalité plus élevée que le reste des autres surfaces de Riemann étudiée. En effet, on peut vérifier que le degré d'irrationnalité des variétés parabolique, c'est-à-dire les courbes elliptique est 2 et celui des variétés ellitpiques est évidemment 1. Pour autant nous ne savons pas calculer la gonalité d'une surface de Riemann hyperbolique dans le cas général a priori. Le seul cas connu est celui des courbes hyperelliptique dont la gonalité est 2. Néanmoins, un résultat plutôt satisfaisant existe dans cette direction. Nous le présentons dans la sous-section suivante.

### 5.1 La notion de degré

Soit  $X$  une surface de Riemann projective (hypothèse inutile mais ici, nous sous-entendons que nous choisissons une surface de Riemann avec une immersion fermée dans un espace projectif). On appelle son degré, le nombre de point d'intersection de  $X$  et d'une droite générique (ici générique ne sera pas défini mais peut-être pris au sens de "en général"). Pour les hypersurfaces, le degré admet un lien très clair avec la positivité de leur fibré cotangent. En effet, si  $X$  est une hypersurface de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , alors son fibré canonique (qui est la version algébrique/faisceutique de l'espace cotangent) est isomorphe à  $\mathcal{O}_X(d - n - 2)$ . Pour la.e lecteur.ice qui ne manipule pas se langage, cela veut juste dire que l'hypersurface admet a priori beaucoup de forme différentielle. Dans le cas des surfaces de Riemann, cela revient donc à considérer certaines surfaces de Riemann hyperbolique.

### 5.2 Théorème de Noether pour la gonalité

Le théorème de Noether est le point de départ de toute une activité mathématiques actuelle, visant à élargir ce théorème en dimension supérieure. Son intitulé est le suivant :

**Théorème 3.** *Soit  $X$  une courbe algébrique complexe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  (donc une hypersurface). Notons  $d$  son degré et supposons que  $d \geq 5$ , alors :*

$$\text{gon}(X) = d - 2$$

Ce théorème est donc un premier résultat allant dans le sens de l'intuition que nous essayons ici d'expliquer : les surfaces de Riemann hyperbolique sont d'autant plus différentes

de la droite projective qu'elles sont "très" hyperbolique (c'est-à-dire très positive). Comment prouver un tel théorème? Nous ne le ferons pas, mais, nous sommes capable d'exhiber la famille d'application minimisante pour le degré des revêtements. En effet, ces dernières sont la projections depuis un point  $p \in X$  sur une copie de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Alors, dans une fibre générique d'une telle application nous trouvons  $d - 1$  points : en effet, comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous, la droite projetant depuis le point  $P$  sur une copie de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  doit passer par  $d - 1$  autres points de la surface de Riemann  $X$  qui seront donc tous dans la même fibre par construction.

### 5.3 Des généralisations de ce théorème

Comment généraliser un tel résultat? Il faudrait d'abord être capable de définir de nouvelle mesure d'irrationnalité en dimension supérieure. Cela en réalité a été déjà fait, l'une des plus étudiées est le degré d'irrationnalité. En première lecture, la.e lecteur.ice non familier.e avec la géométrie algébrique peut sauter cette prochaine sous-section.

**Définition 10.** *Soit  $X$  une variété algébrique projective lisse de dimension  $n$ . On appelle degré d'irrationnalité, le plus petit degré d'une application rationnelle dominante  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . On le note  $d_r(X)$*

Ici nous devons abandonner l'idée que nous manipulons des revêtements même si cette intuition reste précieuse. Dans [1], un article de 2017 est prouvé un résultat dans la lignée du théorème de Noether :

**Théorème 4.** *Soit  $X$  une hypersurface très générale de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ . Dans le cas où  $d \geq 2n + 1$ , alors  $d_r(X) = d - 1$ . Si  $d \geq 2n + 2$ , alors, les applications minimisant le degré sont les projections depuis un point de l'hypersurface.*

Ce théorème poursuit donc notre intuition jusque là construite que les variétés hyperboliques admettent un haut degré d'irrationnalité. Néanmoins, le lien explicite entre degré et hyperbolicité reste flou en dehors du cas des hypersurfaces.

Dans d'autres cas ont été établis des résultats plus précis. On peut mentionner [1], lui aussi de 2017 qui étudie les hypersurfaces de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , en proposant un traitement systématique de toutes les hypersurfaces de degré au moins 7 de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Cet article repose sur une subtile étude de la géométrie de ces surfaces et mentionnerons un peu plus tard un des ces résultats.

Aussi, on peut mentionner [2], dans lequel est par exemple prouvé que le degré d'irrationnalité du produit de deux courbes hyperelliptiques est égal à 4.

### 5.4 Bref récapitulatif

Pour le moment les seuls lien explicites entre grand degré d'irrationnalité et hyperbolicité se font à travers les théorèmes que nous avons cités précédemment.

Néanmoins, cela ne paraît pas assez satisfaisant. En effet, dans un premier temps, chacun.e pourrait s'attendre à ce que le degré d'irrationnalité d'une variété projective de degré  $d$  soit  $d - 1$ . Pourtant, des contre-exemples ont déjà été trouvés, et laisse penser que la question

est en réalité plus subtile et dépend notamment de la géométrie de la variété elle-même et notamment de ses sous-variétés. En effet, dans [1], un contre exemple trouvé est celui d'une variété contenant deux droites. Ainsi, il semblerait qu'il y ait lumière à faire encore sur la géométrie interne des variétés hyperboliques pour mieux comprendre le fonctionnement du degré d'irrationalité.

Si nous effectuons un retour dans le cas des surfaces de Riemann, le genre ne semble pas être la seule information conditionnant la positivité du fibré cotangent. En effet, en dehors de la dichotomie  $g \geq 2, g \leq 1$ , nous ne pouvons a priori pas retirer plus d'information sur le degré d'irrationnalité des surfaces de Riemann sans autre hypothèse. Par exemple, dans le cadre des courbes hyperelliptique, qui peuvent être de genre élevé, le degré d'irrationnalité est toujours égal à 2.

Enfin tous ces théorèmes du type Noether mentionnés avant ne s'intéressent pour le moment seulement au cas des hypersurfaces. Ce cas est d'intérêt puisque nous savons calculer leur fibré canonique (c'est-à-dire leur cotangent). Pour autant il est présente la limite que la plus part des variétés complexes ne sont pas des hypersurfaces

Mon sujet de thèse justement s'inscrit exactement dans cette opportunité. Je cherche justement sous la direction de Damian Brotbek et Gianluca Pacienza, à proposer un meilleur contrôle du degré d'irrationalité des variétés hyperboliques.

## Références

- [1] Francesco BASTIANELLI et al. "Measures of irrationality for hypersurfaces of large degree". In : *Compositio Mathematica* 153.11 (2017), p. 2368-2393.
- [2] Nathan CHEN et Olivier MARTIN. "Rational maps from products of curves to surfaces with  $pg=q=0$ ". In : *Mathematische Zeitschrift* 304.4 (2023), p. 62.
- [3] Jean-Pierre SERRE. "Géométrie algébrique et géométrie analytique". In : *Annales de l'institut Fourier*. T. 6. 1956, p. 1-42.