Introduction au domaine de recherche
Oscillations et stabilité en EDP

Philippe Anjolras

Table des matières

1 Introduction

Lorsqu'on étudie une EDP d'évolution, la question de la stabilité des solutions revêt une importance particulière. Notamment, on peut considérer les deux notions de stabilité suivantes :

— Si on perturbe la donnée initiale, la solution reste-t-elle proche de la solution de référence ? Cette question est particulièrement importante d'un point de vue physique et numérique : si de petites perturbations font trop varier la solution, ni les mesures effectuées ni les approximations numériques ne pourront fournir de résultats probants. Cette question est liée à la notion de *problème bien posé*, qui consiste à demander la continuité de la solution par rapport à la donnée initiale.

— Si l'on considère une suite de solutions convergeant vers une limite, la limite suit-elle la même équation d'évolution ? En général, il peut apparaître des termes d'erreurs, généralement appelés *mesures de défaut*, auxquels on peut donner un sens physique. Cette question est liée de près à la théorie de l'*intégration convexe*, et dépend fortement de la notion de convergence considérée.

Dans cette introduction au domaine de recherche, l'objectif est de considérer de tels problèmes de stabilité dans des problèmes présentant, d'une façon ou d'une autre, une oscillation (rapide) qui, loin de rendre le problème plus délicat, ont au contraire tendance à le régulariser et le stabiliser. Les résultats sont des versions précisées de l'observation fondamentale suivante :

***Lemme* 1 (Riemann-Lebesgue)** *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{Z}^d$-périodique bornée, et $u : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors :*

$$\int_{[0,1]^d} f(tx)u(x)\ dx \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\int_{[0,1]^d} f(x)\ dx\right)\left(\int_{[0,1]^d} u(x)\ dx\right)$$

Ce lemme montre donc qu'en présence d'oscillations rapides, au premier ordre, on ne voit plus que la moyenne des fonctions considérées. Il peut aussi s'interpréter comme la convergence faible de $x \mapsto f(tx)$ vers sa moyenne.

Une fonction f particulière pour laquelle ce lemme est d'une importance cruciale est $f(x) = e^{ix\cdot\xi}$, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, mais on peut étendre le lemme de façon plus générale à des fonctions de la forme $f_t(x) = e^{it\Phi(x)}$, $t \to \infty$, pour Φ une fonction à valeurs réelles. Cela pousse donc à chercher des oscillations en variable de Fourier afin de montrer de la stabilité dans l'espace physique.

Dans ce document, on commencera par énoncer un théorème de phase stationnaire, qui permet de contrôler asymptotiquement des intégrales comportant un terme oscillant fortement plus finement que le lemme de Riemann-Lebesgue. Ensuite, on montrera ses applications pour l'obtention d'*inégalités dispersives*, qui permettent de contrôler la norme L^∞ de $u(t)$ en fonction de la norme L^1 de u_0 pour les solutions d'une EDP linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u = Lu \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \implies \|u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^\alpha}\|u_0\|_{L^1}$$

et L un opérateur différentiel linéaire adéquat, dit *dispersif*, C et α des constantes universelles (ne dépendant que de L et de la dimension). Enfin, on mentionnera l'approche des "résonances espace-temps" qui permet de montrer des résultats de stabilité sur des équations non-linéaires présentant une partie linéaire dispersive et un terme non-linéaire satisfaisant une condition de non-résonance.

La stabilité par passage à la limite faible est également liée aux oscillations rapides mais on se concentrera ici sur la première notion de stabilité.

2 Théorème de phase stationnaire

Notre objet d'étude principal dans cette section est l'étude d'intégrales de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx \tag{1}$$

et d'établir une asymptotique quand $t \to \infty$. Si v est à support compact, alors on peut séparer cette intégrale en morceaux arbitrairement petits par une partition de l'unité, ce qui justifie une heuristique locale : au voisinage d'un point x_0, on s'attend à ce que l'exponentielle complexe se comporte comme $e^{it\Phi(x_0)}e^{it(x-x_0)\cdot\nabla\Phi(x_0)}$ (au premier ordre). Le premier terme $e^{it\Phi(x_0)}$ est un terme de phase qui sort de l'intégrale, et si $\nabla\Phi(x_0) \neq 0$, on est ramené au cas du lemme de Riemann-Lebesgue pour le contrôle du second $e^{it(x-x_0)\cdot\nabla\Phi(x_0)}$. Il apparaît donc immédiatement que les points à observer en détail sont les x_0 tels que $\nabla\Phi(x_0) = 0$: ceux où la phase *stationne*.

On appelle *point critique* un $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $\nabla\Phi(x_0) = 0$. On dira qu'il est *non-dégénéré* si $\nabla^2\Phi(x_0)$ est inversible. Par ailleurs, pour une matrice A symétrique et inversible, on définit le signe de A et on note $\mathrm{sgn}(A)$ l'entier égal au nombre de valeurs propres positives moins le nombre de valeurs propres négatives.

Le théorème suivant donne une asymptotique précise de l'intégrale oscillante (1).

Théorème 2 (de phase stationnaire) *Soit $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que ses points critiques sont non dégénérés. Alors on a l'asymptotique suivante quand $t \to \infty$:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x)e^{it\Phi(x)}\, dx = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{d/2} \sum_{x_0, \nabla\Phi(x_0)=0} v(x_0)e^{it\Phi(x_0)} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\nabla^2\Phi(x_0))}}{|\det(\nabla^2\Phi(x_0))|^{1/2}} + o(t^{-d/2})$$

***Remarque* 3** Les hypothèses sur v, Φ ci-dessus ne sont pas optimales ; par ailleurs, on peut continuer l'asymptotique à des ordres supérieurs : voir par exemple [Hör03], théorème 7.7.5. On peut également traiter des points critiques dégénérés, avec un ordre d'annulation de Φ fini, en perdant naturellement de la décroissance en t : voir par exemple [BO99] pour l'argument en dimension $d = 1$.

Démonstration
Dans la suite de notre discussion, les constantes optimales n'auront que peu d'importance. On va donc démontrer une version affaiblie du théorème ci-dessus :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} v(x)e^{it\Phi(x)}\, dx\right| \leq C(d, v, \Phi)t^{-d/2} \tag{2}$$

où $C(d, v, \Phi)$ est une constante indépendante de t, et dont la dépendance en v peut être prise en la norme L^∞ de dérivées jusqu'à un ordre fini et la taille du support de v.

La preuve de ce résultat repose alors essentiellement sur la combinaison d'intégrations par parties et de "chirurgie" pour découper les domaines d'intégration et séparer les voisinages des points critiques des zones où $\nabla\Phi$ est uniformément loin de 0. On sépare la preuve en trois étapes.

1. Un cas particulier Commençons par traiter le cas particulier où $|\nabla\Phi| \geq \varepsilon_0 > 0$ uniformément sur le support de v. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x)e^{it\Phi(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{v(x)\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|^2} \cdot \nabla\Phi(x)e^{it\Phi(x)}\, dx = -\frac{1}{it}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot \left(\frac{v(x)\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|^2}\right) e^{it\Phi(x)}\, dx$$

On gagne ainsi un facteur $1/t$ quitte à remplacer v par Lv, où l'opérateur L est défini par :

$$L = i\nabla \cdot \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2}$$

L'hypothèse $|\nabla\Phi| \geq \varepsilon_0$ assure que, pour tout $n \geq 0$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} v(x)e^{it\Phi(x)}\, dx\right| = t^{-n}\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\Phi(x)}L^n v(x)\, dx\right| \leq C(\varepsilon_0, v)t^{-n}$$

pour une certaine constante C. En particulier, dans le cas où il n'y a aucun point critique, on peut donc améliorer l'asymptotique et obtenir une décroissance polynomiale arbitrairement rapide en t.

2. Localisation Revenons à présent au cas général. Pour un point critique x_0, $\nabla^2\Phi(x_0)$ est inversible donc :

$$\nabla\Phi(x) = \nabla^2\Phi(x_0)\ (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

par expansion de Taylor et on peut trouver $\delta > 0$ ainsi qu'un voisinage borné U_{x_0} de x_0 tel que, sur ce voisinage, $|\nabla\Phi(x)| \geq \delta|x - x_0|$. u est à support compact et les points critiques de Φ sont non dégénérés, donc isolés, donc il y en a un nombre fini sur le support de v : en particulier on peut choisir δ uniforme en x_0, et les U_{x_0} disjoints. Notons $F = \text{supp}(v) \cap \{\nabla\Phi(x) = 0\}$ et donnons-nous une partition de l'unité :

$$1 = \widetilde{\chi} + \sum_{x_0 \in F} \chi_{x_0} \qquad \text{d'où} \qquad v = \widetilde{\chi}v + \sum_{x_0 \in F} \chi_{x_0} v$$

avec χ_{x_0} à support dans U_{x_0}, $\widetilde{\chi}$ à support dans $\mathbb{R}^d \setminus F$.

On se ramène ainsi à contrôler un nombre fini d'intégrales de la forme (1), en remplaçant v par $v\widetilde{\chi}$ ou $v\chi_{x_0}$ pour un x_0. Comme Φ n'a aucun point critique sur le support de $v\widetilde{\chi}$, l'intégrale correspondante a une décroissance arbitraire et on a en particulier (2) par le cas 1. Les autres intégrales sont toutes similaires et en nombre fini, on en traite une dans ce qui suit, en notant simplement v pour $v\chi_{x_0}$.

3. Contrôle local Soit x_0 un point critique. On s'est ramené au cas où, sur le support de v, $|\nabla\Phi(x)| \geq \delta|x - x_0|$, mais cette inégalité n'est pas suffisante pour effectuer des intégrations par parties sur $\mathbb{R}^d$ entier. On effectue donc un second découpage :

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx = \int_{B(x_0,\varepsilon)} v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx + \int_{B(x_0,\varepsilon)^c} v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre à fixer plus tard.

Le premier terme est simplement contrôlé par le volume de la boule fois la norme L^∞ de l'intégrande :

$$\left| \int_{B(x_0,\varepsilon)} v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx \right| \leq C(d, v)\varepsilon^d \tag{3}$$

Pour contrôler le second terme, on effectue des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,\varepsilon)^c} v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx = t^{-n} &\int_{B(x_0,\varepsilon)^c} e^{it\Phi(x)} L^n v(x)\ dx \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} t^{-j-1} \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \frac{\nabla\Phi(x)\cdot\nu(x)}{|\nabla\Phi(x)|^2} L^j v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx\end{aligned}$$

où $\nu(x)$ est la normale à la boule $B(x_0, \varepsilon)$ en x, correctement orientée. Ici, n est un entier fixé, fini, à choisir assez grand.

Examinons les termes de la forme $L^k v$. Étant donné les hypothèses, les termes les "plus mauvais" sont ceux où toutes les dérivées tombent sur Φ. Alors, à des constantes près qui dépendent de normes L^∞ de v, Φ et leurs dérivées, ainsi que de la taille du support de v :

$$|L^k v| \leq C(v, \Phi, k)\frac{1}{|\nabla\Phi(x)|^{2k}} \leq C(v, \Phi, k, \delta)|x - x_0|^{-2k}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_{B(x_0,\varepsilon)^c} v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx\right| &\le Ct^{-n}\int_{B(x_0,\varepsilon)^c}|x-x_0|^{-2n}\ dx + C\sum_{j=0}^{n-1} t^{-j-1}|\partial B(x_0,\varepsilon)|\varepsilon^{-2j-1} \\ &\le Ct^{-n}\int_\varepsilon^\infty r^{-2n+d-1}\ dr + C\sum_{j=0}^{n-1} t^{-j-1}\varepsilon^{-2j+d-2}\end{aligned}$$

On choisit donc n tel que $2n+1-d>1$. Alors :

$$\left|\int_{B(x_0,\varepsilon)^c} v(x)e^{it\Phi(x)}\ dx\right| \le Ct^{-n}\varepsilon^{-2n+d} + C\sum_{j=0}^{n-1} t^{-j-1}\varepsilon^{-2j+d-2} \tag{4}$$

Le choix naturel de ε apparaît alors comme $\varepsilon = t^{-1/2}$. Pour ce choix, en mettant ensemble les inégalités (3) et (4), on obtient bien un contrôle en $t^{-d/2}$ comme voulu dans (2). □

3 Estimées dispersives

3.1 Inégalité dispersive

L'objet de cette section est d'appliquer le théorème de phase oscillante à des Φ qui représentent l'évolution d'une certaine équation linéaire.

Considérons en effet le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5}$$

où $L = \omega(D)$ est un multiplicateur de Fourier, c'est-à-dire

$$Lu = -i\mathcal{F}^{-1}\left(\omega(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)\right)$$

avec $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier. (Ce n'est que peu restrictif : par exemple, en choisissant ω polynomial à coefficients constants en les coordonnées de ξ, on peut obtenir tous les opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants.)

Cherchons à résoudre cette équation, par exemple dans $C^1([0,\infty),\mathcal{S})$. Alors on peut appliquer la transformée de Fourier en espace seulement :

$$\partial_t\widehat{u}(t,\xi) = -i\omega(\xi)\widehat{u}(t,\xi)$$

À ξ fixé, c'est une équation différentielle linéaire dont on peut calculer explicitement la solution :

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)e^{-it\omega(\xi)}$$

Ainsi :

$$u(t,x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi - it\omega(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)\ d\xi \tag{6}$$

Afin que l'exponentielle soit purement complexe, on demande à ce que $\omega(\mathbb{R}^d)\subset\mathbb{R}$. (Cette condition est déjà plus restrictive : elle correspond à la conservation de la norme L^2, et exclut par exemple l'équation de la chaleur.)

Il paraît alors naturel (compte tenu de l'ordre des sections de ce document) d'espérer contrôler u au temps t, t grand, à partir du théorème de phase stationnaire et de normes de u_0. Plus précisément, si on pose $K_t \in \mathcal{S}'$ la distribution de transformée de Fourier $e^{-it\omega(\xi)}$, on a :

$$u(t) = K_t * u_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|K_t\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^1}$$

par le théorème de Young pour la convolution. Il suffit donc de montrer que K_t, qui n'est a priori qu'une distribution tempérée, est en réalité une fonction bornée. On écrit alors formellement :

$$K_t(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi - it\omega(\xi)} \, d\xi = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it((x/t)\cdot\xi - \omega(\xi))} \, d\xi$$

qu'on veut estimer pour tout x de façon uniforme, et donc en particulier pour tx ($t > 0$), donc on s'est ramené à :

$$(2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it(x\cdot\xi - \omega(\xi))} \, d\xi$$

Si on peut appliquer le théorème de phase stationnaire à x fixé et avec $v \equiv 1$ (qui n'est plus à support compact), il suffirait de contrôler le gradient de $\Phi(\xi) = x \cdot \xi - \omega(\xi)$, qui est $x - \nabla\omega(\xi)$. Cela motive la définition suivante.

Définition 4 *On dit que L associé à ω est* ***dispersif*** *si ω est à valeurs réelles et que $\nabla^2\omega$ est uniformément minoré.*

En particulier, la seconde condition est nécessaire et suffisante pour que Φ n'ait que des points critiques non dégénérés, quel que soit x. Remarquons que l'hypothèse assure que $\xi \mapsto \nabla h(\xi)$ est injectif.

Remarque **5** Cette définition de "dispersif" est simplificatrice, afin de conserver des hypothèses pratiques, assez générales, mais qui peuvent se révéler trop fortes. La condition ω à valeurs réelles est toujours demandée ; en revanche, la minoration de la Hessienne de ω peut être lourdement amoindrie, notamment en autorisant des annulations, des points critiques non isolés... au prix de complications techniques et de résultats plus faibles.

Afin de simplifier l'exposition, on se restreint à présent à ω homogène de degré 2 en ξ, c'est-à-dire $\omega(\lambda\xi) = \lambda^2\omega(\xi)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 6 (Estimée dispersive) *On a le contrôle :*

$$\|K_t\|_{L^\infty} \leq C(d,h)t^{-d/2}$$

En particulier, pour toute solution de l'équation linéaire correspondante,

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(d,h)t^{-d/2}\|u_0\|_{L^1}$$

Démonstration
On donne seulement une esquisse de la preuve.

On peut commencer par remettre le problème à l'échelle, au moins formellement :

$$K_t(tx) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it(x\cdot\xi-\omega(\xi))}\, d\xi = (2\pi)^{-d/2}|x|^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{it|x|^2(\overline{x}\cdot\overline{\xi}-\omega(\overline{\xi})}\, d\xi \tag{7}$$

par changement de variable $\xi = |x|\overline{\xi}$, et où on a noté $x = \overline{x}|x|$ (au moins pour $x \neq 0$). Supposons dans un premier temps que $|x| \geq 1$.

Les points de phase stationnaire correspondent à $\xi = (\nabla\omega)^{-1}(-x)$ qui est unique par l'hypothèse faite sur ω. De plus, ω est homogène d'ordre 2, donc $\nabla\omega$ est homogène d'ordre 1, donc $(\nabla\omega)^{-1}$ aussi et $\|(\nabla\omega)^{-1}(-x)\| \leq C\|x\|$, pour une constante C dépendant uniquement de ω. En particulier, $|\overline{\xi}|$ est d'ordre 1.

En utilisant une décomposition de Littlewood-Paley adaptée au point x considéré, on peut rendre ces raisonnements rigoureux. Ensuite, toutes les contributions en-dehors d'une boule de rayon fixe (en variable renormalisée $\overline{\xi}$) peuvent être contrôlées par un argument similaire à celui employé dans la technique de phase stationnaire : en effet, assez loin de l'origine il n'y a plus de point critique et on peut simplement effectuer des intégrations par parties pour contrôler aussi finement qu'on veut le comportement des contributions des hautes fréquences.

Il ne reste ensuite que les basses fréquences, ce qui peut être assimilé à l'ajout d'une fonction $v \in C_c^\infty$ comme dans l'énoncé du théorème de phase stationnaire. On obtient alors, à une constante près :

$$|K_t(tx)| \leq C|x|^d(t|x|^2)^{-d/2} = Ct^{-d/2}$$

comme voulu.

Pour traiter le cas $|x| \leq 1$, on n'effectue pas le changement de variable (7) et le reste de l'argument se déroule identiquement. □

***Corollaire* 7** *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $1 \leq p \leq 2$, p' son exposant conjugué $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ et pour tout $u_0 \in L^p$:*

$$\|e^{tL}u_0\|_{L^{p'}} \leq Ct^{\frac{d}{2}-\frac{d}{p}}\|u_0\|_{L^p}$$

Démonstration
C'est une conséquence de $\|e^{tL}u_0\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$, du théorème 6, puis de l'inégalité d'interpolation du théorème de Riesz-Thorin (énoncé par exemple dans [Gér22]). □

***Remarque* 8** Un cas bien connu d'équation dispersive est l'équation de Schrödinger (linéaire) :

$$i\partial_t u + \Delta u = 0$$

qui correspond à $\omega(\xi) = |\xi|^2$. Notre théorème s'applique à ce cas particulier, mais on démontre généralement le résultat plus directement : en effet, $e^{it|\xi|^2}$ est une gaussienne (complexe) dont on peut donc calculer explicitement la transformée de Fourier. Cela permet d'obtenir une constante optimale dans l'estimée dispersive. En revanche, on ne sait pas calculer la transformée de Fourier de $e^{-it\omega(\xi)}$ pour un ω général.

***Remarque* 9 (En quoi est-ce "dispersif" ?)** La formule (6) assure que la solution issue d'une onde plane reste une onde plane, avec un déphasage dépendant du temps (une onde plane correspond au cas où $\widehat{u_0}$ est une masse de Dirac).

Considérons maintenant le cas où u_0 n'est pas une onde plane, mais proche d'une onde plane au sens où $\widehat{u_0}$ est une approximation de l'unité, une fonction lisse approchant une masse de Dirac :

$$\widehat{u_0}(\xi) = \varepsilon^{-d} a\left(\frac{\xi - \xi_0}{\varepsilon}\right)$$

avec $\varepsilon > 0$ un petit paramètre, $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ une fréquence fixée, et $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que $a > 0$ au voisinage de 0 et $\int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\, d\xi = 1$. Dans ce cas, la formule (6) devient :

$$u(t,x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} a(\eta) e^{ix\cdot\xi_0 + i\varepsilon x\cdot\eta - it\omega(\xi_0+\varepsilon\eta)}\, d\eta$$

après changement de variable $\eta = \frac{\xi-\xi_0}{\varepsilon}$. En effectuant formellement un développement de Taylor de ω autour de ξ_0 et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on trouve alors :

$$u(t,x) \simeq (2\pi)^{-d/2} e^{ix\cdot\xi_0 - it\omega(\xi_0)} \int_{\mathbb{R}^d} a(\eta) e^{i\eta\cdot(\varepsilon x - t\varepsilon\nabla\omega(\xi_0))}\, d\eta = e^{ix\cdot\xi_0 - it\omega(\xi_0)} U(\varepsilon(x - t\nabla\omega(\xi_0)))$$

où on a posé

$$U(y) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} a(\eta) e^{iy\cdot\eta}\, d\eta$$

On s'aperçoit alors que la solution est égale (aux premiers ordres, quand ε est petit) à la solution issue de l'onde plane en ξ_0, multipliée par un terme solution d'une équation de transport pour laquelle la vitesse est $v(\xi_0) = \nabla\omega(\xi_0)$, appelée *vitesse de groupe*.

Les considérations ci-dessus sont valables très généralement : mais si $\nabla^2\omega$ est minoré uniformément, cela implique en particulier que $\nabla\omega$ est injectif, donc que deux ondes planes (ou plutôt approximations d'ondes planes) évoluent en se déplaçant dans l'espace physique à des vitesses différentes, et ont donc tendance à se séparer en temps long. L'équation est linéaire et la transformée de Fourier donne précisément une décomposition en ondes planes : c'est la différence des vitesses de groupe qui est à l'œuvre dans l'inégalité dispersive. Cette séparation des ondes distinctes est un point central pour le traitement des non-linéarités : elle assure que, en temps long, on peut s'attendre à ce que des ondes distinctes n'interagissent plus dans la non-linéarité (au moins heuristiquement).

3.2 Vers les EDP non-linéaires

L'inégalité dispersive établie en sous-section précédente trouve toute sa force, non pour estimer le comportement de solutions d'équations linéaires, mais pour contrôler celui de solutions d'équations non-linéaires. Plus précisément, on s'intéresse à une équation du type :

$$\partial_t u = Lu + \mathcal{N}(u)$$

où L est une partie linéaire dispersive et $\mathcal{N}(u)$ correspond à un terme non-linéaire. On pourra par exemple choisir $|\mathcal{N}(u)| \leq C|u|^\alpha$ pour un certain $\alpha > 1$.

Contrairement au cas linéaire, on ne peut alors pas donner une expression de u en fonction de u_0 uniquement, en raison de la présence du terme non-linéaire (ou en tout cas pas dans le cas général). En revanche, on peut écrire une représentation implicite, la formule de Duhamel :

$$u(t) = e^{tL} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)L} \mathcal{N}(u)(s)\, ds$$

Ensuite, pour montrer l'existence globale de solutions à ce genre d'équations, on combine deux résultats :

— *Existence locale* : on montre que, pour tout u_0 donnée initiale assez régulière, on dispose d'une solution u (dont la régularité dépend de celle de u_0) sur un intervalle de temps $[0, T)$ avec $T > 0$. Ce genre de résultat est typiquement démontré par un argument de point fixe, qui permet alors d'ajouter une condition d'explosion : si $T < \infty$ et est choisi maximal, alors une certaine norme de $u(t)$ explose quand $t \to T^-$.

— *Contrôle des normes* : Puisqu'une certaine norme explose quand on se rapproche du temps d'existence maximal, il suffit de contrôler la norme de $u(t)$ par la formule de Duhamel. Le terme $e^{tL}u_0$ ne pose pas de souci ; en revanche, pour contrôler le terme intégral, il faut disposer d'une décroissance de l'intégrand. C'est là qu'intervient l'inégalité dispersive, qui offre une décroissance en $(t-s)$.

Cette stratégie générale doit ensuite être peaufinée pour marcher tout à fait. En particulier, on n'applique pas forcément directement l'inégalité dispersive, mais plutôt une *inégalité de Strichartz*, qui contrôle des normes $L_t^p L_x^q$ de u (on pourra se référer à [Gér22] ou [Tao06]) :

Théorème 10 (Strichartz) *Soit $1 \leq q, r \leq \infty$ tels que $q > 2$ et $\frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2}$. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $u_0 \in L^2$ et u la solution de (5) :*

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r} \leq C\|u_0\|_{L^2}$$

Une remarque importante est cependant la suivante : cette technique exploite la structure de la linéarité (en ceci qu'on applique l'inégalité dispersive), mais pas celle de la non-linéarité, ou en tout cas pas au-delà d'une domination du type $|\mathcal{N}(u)| \leq C|u|^\alpha$. L'objet de la section suivante est précisément de montrer comment une structure plus fine de $\mathcal{N}(u)$ peut être étudiée afin d'obtenir également des résultats d'existence globale.

4 Résonances espace-temps

Considérons l'équation :

$$\partial_t u = Lu + \mathcal{N}(u)$$

où L est une partie linéaire dispersive, $\mathcal{N}(u)$ une contribution non-linéaire.

Considérons par exemple le cas où

$$\widehat{\mathcal{N}(u)} = \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi, \eta)\widehat{u}(\xi - \eta)\widehat{u}(\eta)\, d\eta$$

où m est une fonction (assez régulière). Par exemple, si $m \equiv 1$, $\mathcal{N}(u)$ correspond à u^2 (à une constante près), mais on peut aussi y ajouter des dérivées, effectuer des combinaisons linéaires, ...

En raison de la partie linéaire, introduisons la *fonction profil* :

$$f(t) = e^{-tL}u(t)$$

Ainsi, f vérifie :

$$\partial_t f = -Le^{tL}u(t) + e^{-tL}Lu + e^{-tL}\mathcal{N}(u) = e^{-tL}\mathcal{N}(e^{tL}f)$$

On peut alors écrire la formule de Duhamel pour f :

$$f(t) = f(1) + \int_1^t e^{-sL}\mathcal{N}(e^{sL}f(s))\ ds$$

Ce qui donne en variable de Fourier :

$$\widehat{f}(t,\xi) = \widehat{f}(1,\xi) + \int_1^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{is(\omega(\xi)-\omega(\xi-\eta)-\omega(\eta))} m(\xi,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\widehat{f}(s,\eta)\ d\eta ds$$

On voit alors apparaître une nouvelle phase $\varphi(\xi,\eta) = \omega(\xi) - \omega(\xi-\eta) - \omega(\eta)$.

Si l'on souhaite appliquer une technique de type phase stationnaire, il suffit alors de chercher les points où $\nabla_\eta \varphi = 0$, qu'on appelle points de *résonance en espace*, mais aussi les points où $\varphi = 0$, qu'on appelle points de *résonance en temps* : en effet, la formule de Duhamel offre également la présence d'une intégrale en temps, donc on peut envisager d'effectuer des intégrations par parties dans cette direction également.

Les points de *résonance espace-temps* sont alors simplement définis comme les (ξ,η) tels que $\varphi(\xi,\eta) = 0$ et $\nabla_\eta \varphi(\xi,\eta) = 0$.

En général, il n'y a aucune raison d'espérer que l'ensemble des points résonnants soit vide. En revanche, l'équation satisfait la condition de *non-résonance* si la fonction m qui apparaît dans la non-linéarité est telle que $m(\xi,\eta) = 0$ sur l'ensemble résonnant, ou même vérifie une relation de la forme :

$$m(\xi,\eta) = a(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)\nabla_\eta\varphi(\xi,\eta)$$

pour des fonctions a, b assez régulières (la régularité demandée dépend du problème considéré).

Cette forme particulière de m permet alors d'effectuer des intégrations par parties en fréquence et en temps :

$$\begin{aligned}
&\int_1^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{is\varphi(\xi,\eta)} \left(a(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)\nabla_\eta\varphi(\xi,\eta)\right) \widehat{f}(s,\xi-\eta)\widehat{f}(s,\eta)\ d\eta ds \\
&= \int_1^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{is\varphi(\xi,\eta)} \frac{i}{s} \nabla_\eta \left(b(\xi,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\widehat{f}(s,\eta) \right)\ d\eta ds && (xf) \\
&+ \int_1^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{is\varphi(\xi,\eta)} i a(\xi,\eta)\partial_s \left(\widehat{f}(s,\xi-\eta)\widehat{f}(s,\eta) \right)\ d\eta ds && (\partial_s f) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi(\xi,\eta)} \frac{1}{i} a(\xi,\eta)\widehat{f}(t,\xi-\eta)\widehat{f}(t,\eta)\ d\eta + \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi(\xi,\eta)} i a(\xi,\eta)\widehat{f}(1,\xi-\eta)\widehat{f}(1,\eta)\ d\eta && (\text{bord})
\end{aligned}$$

Pour une intégration par parties en fréquence, on fait apparaître un facteur $1/s$, au prix de termes $\nabla_\eta \widehat{f}$, c'est-à-dire xf en variable spatiale.

Pour une intégration par parties en temps, on fait apparaître des termes de bord (plus simples à contrôler car non intégrés en temps) et des termes avec un facteur $\partial_s \widehat{f}$. Mais $\partial_s \widehat{f}$ est quadratique en f, donc on gagne également en décroissance.

On remarque alors qu'il faut alors typiquement contrôler également xf, ce qui correspond à $\nabla_\xi \widehat{f}$ en variable de Fourier. Le "pire" terme est alors, en général, celui où la dérivée ∇_ξ tape contre l'exponentielle $e^{is\varphi(\xi,\eta)}$, car cela fait apparaître un facteur $s\nabla_\xi\varphi(\xi,\eta)$. Il faut alors souvent chercher une relation de la forme :

$$\nabla_\xi \varphi = \widetilde{a}\nabla_\eta\varphi + \widetilde{b}\varphi$$

et éventuellement continuer à un ordre supérieur avec $x^2 f$...

Cela donne l'idée générale de la technique des résonances espace-temps, développée originellement dans [GMS12] et [GMS09]. Cette heuristique doit ensuite être complétée par des calculs plus rigoureux et un bon choix de normes à contrôler, qui dépendent du problème considéré.

5 Perspectives

Dans cette section, je présente une des questions sur lesquelles j'ai commencé à travailler.

Considérons dans un premier temps l'équation de Maxwell linéaire dans le vide (avec paramètres physiques renormalisés à 1 par choix d'unités) :

$$\begin{aligned} \partial_t B + \nabla \wedge E = 0, \qquad \nabla \cdot B = 0 \\ \partial_t E - \nabla \wedge B = 0, \qquad \nabla \cdot E = 0 \end{aligned}$$

On distingue alors deux types d'équations : les équations d'évolution (à gauche) et les équations de "contrainte" (à droite), qui sont quant à elles préservées par l'évolution. Remarquons que

$$\partial_{tt} B = -\partial_t \nabla \wedge E = -\nabla \wedge (\nabla \wedge B) = \Delta B - \nabla(\nabla \cdot B)$$

En particulier, si la contrainte de divergence nulle est vérifiée, alors B vérifie une équation des ondes, mais c'est faux dans le cas général : plus précisément, si on considère l'équation dans l'espace de Fourier, la partie linéaire possède comme valeurs propres $+|\xi|, -|\xi|$ (qui correspondent à l'équation des ondes) et 0, mais les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont précisément contrôlés par les contraintes de divergence nulle. Or l'équation

$$\partial_t u + \omega(D) u = 0$$

pour $\omega(\xi) = \pm|\xi|$ possède également une propriété de dispersion (plus faible que celle examinée dans les sections précédentes) donnant lieu à une inégalité dispersive (voir par exemple [SS98]), mais il est clair que

$$\partial_t u = 0$$

n'est pas dispersif. Il est donc nécessaire de tenir en compte ces équations supplémentaires pour effectuer une analyse sur des problèmes non-linéaires.

Le même genre de phénomène se produit dans le système de Born-Infeld, qui est une généralisation non-linéaire des équations de Maxwell. Si l'on cherche à comprendre le comportement de petites perturbations d'une constante, on observe deux contributions : une première portion suivant une équation des ondes en partie linéaire, et se comportant dans la non-linéarité en respectant des conditions de non-résonance espace-temps ; et une seconde portion suivant une équation de partie linéaire nulle (donc non dispersive !) et contribuant dans les non-linéarités sans respecter de condition de non-résonance.

En revanche, la seconde portion est exactement contrôlée par les "équations de contrainte" de type annulation de la divergence. Mieux : ces équations de contrainte elles-mêmes, étant non-linéaires, vérifient une condition de non-résonance qui les rend exploitable... Un premier travail consiste à étendre le travail de Pusateri et Shatah dans [PS13] à l'équation de Born-Infeld pour montrer la stabilité au voisinage des constantes, en s'appuyant notamment sur la formulation de l'équation de Born-Infeld développée par Brenier dans [Bre05].

Références

[BO99] Carl M. Bender et Steven A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I. Asymptotic methods and perturbation theory.* English. Reprint of the original 1978. New York, NY : Springer, 1999. isbn : 0-387-98931-5.

[Bre05] Yann Brenier. “Le système de Born-Infeld élargi : des ondes aux particules et aux cordes”. fr. In : *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi "Séminaire Goulaouic-Schwartz"* (2004-2005). talk :7. url : `http://www.numdam.org/item/SEDP_2004-2005____A7_0/`.

[Gér22] Patrick Gérard. *Dispersive equations.* cours donné à l'université d'Orsay. 2022.

[GMS12] Pierre Germain, Nader Masmoudi et Jalal Shatah. “Global solutions for 2D quadratic Schrödinger equations”. English. In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 97.5 (2012), p. 505-543. issn : 0021-7824. doi : `10.1016/j.matpur.2011.09.008`.

[GMS09] Pierre Germain, Nader Masmoudi et Jalal Shatah. “Global solutions for 3D quadratic Schrödinger equations”. English. In : *Int. Math. Res. Not.* 2009.3 (2009), p. 414-432. issn : 1073-7928. doi : `10.1093/imrn/rnn135`.

[Hör03] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I : Distribution theory and Fourier analysis.* English. Reprint of the 2nd edition 1990. Class. Math. Berlin : Springer, 2003. isbn : 3-540-00662-1.

[PS13] Fabio Pusateri et Jalal Shatah. “Space-time resonances and the null condition for first-order systems of wave equations”. English. In : *Commun. Pure Appl. Math.* 66.10 (2013), p. 1495-1540. issn : 0010-3640. doi : `10.1002/cpa.21461`.

[SS98] Jalal Shatah et Michael Struwe. *Geometric wave equations.* English. T. 2. Courant Lect. Notes Math. New York, NY : New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1998. isbn : 0-9658703-1-6.

[Tao06] Terence Tao. *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis.* English. T. 106. CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2006. isbn : 0-8218-4143-2.