

Homogénéisation d'EDP dans les matériaux composites

Rapport d'Introduction au Domaine de Recherche

Cédric Baudet

9 octobre 2023

Table des matières

1	Introduction	1
2	Homogénéisation 1D par compacité	2
3	Homogénéisation 1D par développement multi-échelles	3
4	Homogénéisation de couches par développement raccordé	6
	Bibliographie	10

1 Introduction

L'homogénéisation est le domaine des mathématiques et de la physique qui étudie les milieux possédant des hétérogénéités à l'échelle microscopique dans le but de déduire leurs propriétés macroscopiques. Ces propriétés sont semblables à celles d'un milieu homogène, mais elles présentent souvent des spécificités qui ne pourraient pas être obtenues avec un milieu pur. Le champ des applications est très large et plusieurs modélisations existent pour traiter différentes situations :

- L'homogénéisation périodique : Elle traite les milieux possédant une structure microscopique périodique tels que les cristaux et des métamatériaux utilisés dans l'industrie de pointe. Ma thèse est motivée par cette dernière application puisqu'elle s'intéresse aux micro-revêtements complexes qui confèrent leur furtivité aux avions militaires.
- L'homogénéisation quasi-périodique : Les propriétés du milieu sont données par des fonctions quasi-périodiques, c'est-à-dire des traces dans des directions obliques de fonctions périodiques en dimension supérieure. Par exemple, $x \mapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ est quasi-périodique car c'est la trace de $(x, y) \mapsto \cos(x) + \cos(y)$ dans la direction $(1, \sqrt{2})$. De telles situations modélisent les quasi-cristaux, des solides aux propriétés similaires aux cristaux bien qu'ils ne soient pas rigoureusement périodiques.
- L'homogénéisation stochastique : Elle étudie les milieux désordonnés, tels que des mousses d'isolation thermique ou acoustique, ou bien des dépôts de poussière. Ce désordre est modélisé par un aléa sur les propriétés microscopique du milieu (propriétés du milieu en chaque point, position des poussières, etc.), qui doit vérifier des hypothèses de stationnarité et d'ergodicité pour être dans un régime d'homogénéisation. Et les résultats de convergence sont établis presque sûrement.

Dans tous les cas, la modélisation implique un paramètre $\varepsilon > 0$ proportionnel à la taille des hétérogénéités et qui tend vers 0. Pour tout ε , l'EDP étudiée possède une solution u_ε et l'objectif est de montrer que u_ε tend dans un certain sens vers une fonction u_0 et de trouver quelle EDP u_0 vérifie. C'est cette nouvelle EDP qui décrit le comportement homogénéisé du milieu. Pour aller plus loin, on peut aussi chercher un développement asymptotique complet de u_ε , par exemple sous la forme

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad u_\varepsilon = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n + o(\varepsilon^N) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pour établir des résultats de convergence plusieurs méthodes existent :

- Par compacité : Si (u_ε) est bornée dans un espace fonctionnel localement compact (en général pour la topologie faible), alors elle possède des sous-suites convergentes. On peut alors passer à la limite dans l'équation pour trouver l'EDP que la valeur d'adhérence vérifie. Et pourvu que cette EDP ait une unique solution, toutes les sous-suites possèdent la même limite, donc la suite converge.
- La Γ -convergence : C'est un mode de convergence de fonctionnelles qui permet de montrer la convergence de leurs minimiseurs, ce qui peut être adapté lorsque les fonctions u_ε peuvent être vues comme des minimiseurs de fonctionnelles.
- Le développement multi-échelle : Il procède par analyse-synthèse en partant de l'ansatz que le développement asymptotique est de la forme $u_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n(x, \frac{x}{\varepsilon}) + o(\varepsilon^N)$. Ici les arguments x et $\frac{x}{\varepsilon}$ décrivent respectivement l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. En injectant ce développement dans l'EDP, on peut trouver formellement quelles équations les u_n doivent vérifier. Puis la synthèse consiste à montrer la validité de ce développement.

Dans ce document, nous présenterons la première et la troisième méthodes dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Nous les illustrerons sur le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_0) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon) - b(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d , $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^2(\Omega)$. Et $a(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ désigne la fonction $x \mapsto a(\frac{x}{\varepsilon})$; de même pour $b(\frac{\cdot}{\varepsilon})$. De plus nous supposons que a et b sont 1-périodiques par rapport à chaque coordonnée de \mathbb{R}^d . Et nous supposons qu'il existe une constante strictement positive minorant a et b . Cette dernière hypothèse, classique en EDP, assure que le problème (\mathcal{P}_0) possède une unique solution u_ε dans $H^1(\Omega)$, l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui possèdent un gradient faible dans L^2 . De plus, il existe une constante $C > 0$ indépendante de f et ε telle que $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$. On dit que le problème (\mathcal{P}_0) est bien posé.

Le problème (\mathcal{P}_0) est un exemple typique d'équation elliptique, une famille large d'EDP dont font partie par exemple les équations de Laplace, Poisson et Helmholtz (équation des ondes en régime harmonique). C'est donc un bon exemple pour présenter l'homogénéisation, les techniques données s'adaptant aux autres équations elliptiques.

2 Homogénéisation 1D par compacité

Commençons simple, en considérant la version suivante du problème (\mathcal{P}_0) posée dans $H^1(]0, 1[)$:

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} (a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u'_\varepsilon)' - b(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u_\varepsilon = f & \text{sur }]0, 1[\\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0 \end{cases}$$

où a, b et f vérifient les mêmes hypothèses que dans (\mathcal{P}_0) .

Nous allons montrer qu'à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, u_ε tend vers une fonction u_0 vérifiant $a^* u_0'' - b^* u_0 = f$ pour certains nombres a^* et b^* , qui sont les coefficients homogénéisés de l'EDP. La justification intuitive est que, comme les fonctions $a(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ et $b(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ oscillent très vites lorsque ε est petit, à la limite u_ε ne voit plus que leur comportement moyen. Cependant les valeurs exactes de a^* et b^* ne sont pas évidentes. La proposition suivante montre que b^* est la moyenne arithmétique de b tandis que a^* est la moyenne harmonique :

$$b^* = \langle b \rangle := \int_0^1 b(x) dx \quad \text{et} \quad a^* = \langle a^{-1} \rangle^{-1} := \left(\int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \right)^{-1}.$$

Proposition 1 :

u_ε converge faiblement dans H^1 et fortement dans L^2 vers l'unique solution $u_0 \in H^1(]0, 1[)$ de :

$$\begin{cases} \langle a^{-1} \rangle^{-1} u_0'' - \langle b \rangle u_0 = f & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La présence de la moyenne harmonique peut surprendre, mais elle se comprend mieux en regardant l'équation suivante encore plus simple

$$(\mathcal{P}'_1) \quad a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u_\varepsilon = f \quad \text{sur }]0, 1[.$$

Ici nous avons bien sûr $u_\varepsilon = a(\frac{\cdot}{\varepsilon})^{-1} f$. Or le lemme de Riemann-Lebesgue énonce que :

$$\forall \varphi \in L^1(]0, 1[), \quad \int_0^1 a(\frac{\cdot}{\varepsilon})^{-1} \varphi(x) dx \rightarrow \langle a^{-1} \rangle \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Autrement dit, $a(\frac{\cdot}{\varepsilon})^{-1} \xrightarrow{L^\infty^*} \langle a^{-1} \rangle$. D'où $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} \langle a^{-1} \rangle f$. C'est-à-dire que u_ε converge vers la solution u_0 de $\langle a^{-1} \rangle^{-1} u_0 = f$. La même approche calculatoire explicite peut être menée sur l'équation $(a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u'_\varepsilon)' = f$, par intégration de $f(x)$ puis de $a(\frac{x}{\varepsilon})^{-1} \int^x f$.

À présent revenons au problème (\mathcal{P}_1) et démontrons la proposition 1 par des outils de compacité.

Preuve: Notons $a_\varepsilon := a(\frac{\cdot}{\varepsilon})$, $b_\varepsilon := b(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ et $v_\varepsilon := a_\varepsilon u'_\varepsilon$. Le problème (\mathcal{P}_1) étant bien posé, la famille (u_ε) est bornée dans H^1 . De même, (v_ε) est bornée dans H^1 car $v_\varepsilon = a_\varepsilon u'_\varepsilon$ et $v'_\varepsilon = f + b_\varepsilon u_\varepsilon$ sont toutes deux bornés dans L^2 . Donc par compacité locale faible de H^1 , il existe une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et $u_0, v_0 \in H^1$ tels que $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{H^1} u_0$ et $v_{\varepsilon_n} \xrightarrow{H^1} v_0$. Puis par le théorème de Rellich (le domaine étant borné), $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{L^2} u_0$ et $v_{\varepsilon_n} \xrightarrow{L^2} v_0$. Or d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $b_\varepsilon \xrightarrow{L^\infty^*} \langle b \rangle$ et $a_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{L^\infty^*} \langle a^{-1} \rangle$. Donc par convergence fort-faible, $b_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{L^2} \langle b \rangle u_0$ et $u'_{\varepsilon_n} = a_{\varepsilon_n}^{-1} v_{\varepsilon_n} \xrightarrow{L^2} \langle a^{-1} \rangle v_0$. Mais $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{H^1} u_0$ implique déjà que $u'_{\varepsilon_n} \xrightarrow{L^2} u'_0$, donc $u'_0 = \langle a^{-1} \rangle v_0$. Finalement nous pouvons passer l'équation $f = v'_{\varepsilon_n} - b_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}$ à la limite faible dans L^2 , ce qui donne

$$f = v'_0 - \langle b \rangle u_0 = (\langle a^{-1} \rangle^{-1} u'_0)' - \langle b \rangle u_0.$$

De plus $u_0(0) = u_0(1) = 0$ car $H_0^1(\Omega)$ est fermé pour la topologie faible.

Enfin, le problème vérifié par u_0 possède une unique solution. Donc toutes les sous-suites convergentes de (u_ε) convergent vers u_0 , i.e. u_ε converge vers u_0 . \square

Pour obtenir de plus la limite forte dans L^2 de ∇u_ε , on peut utiliser la compacité sur un autre mode de convergence plus fin : la convergence double échelle (voir [1]). Elle est définie ainsi : $v_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ converge double-échelle vers $v_0 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, L^1_{\text{loc,per}}(\mathbb{R}^d))$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^d)), \quad \int_\Omega v_\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times [0, 1]^d} v_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Par exemple, la fonction $x \mapsto e^x \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon})$ converge vers $(x, y) \mapsto e^x \sin(2\pi y)$. On peut alors montrer qu'il existe $u_1 \in L^2([0, 1], H^1_{\text{loc,per}}(\mathbb{R}))$ telle que ∇u_ε converge double-échelle vers $(x, y) \mapsto \nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)$. Mais plutôt que de détailler cet outil, nous allons passer à une autre méthode aux résultats plus forts : le développement multi-échelles.

3 Homogénéisation 1D par développement multi-échelles

Dans cette partie, nous allons établir le comportement asymptotique de la solution $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R})$ du problème suivant :

$$(\mathcal{P}_2) \quad (a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u'_\varepsilon)' - b(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

Nous nous limitons à la dimension 1 pour simplifier les calculs, mais la démarche est généralisable à toute dimension (voir [5, 2]). Nous utiliserons la méthode dite du développement multi-échelles. Son principe est de postuler un développement de la forme

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

où les fonctions u_n ne dépendent ni de ε ni de N et où u_n est périodique par rapport à sa seconde variable pour tout n . Ce postulat est nommé *ansatz*. Ensuite, la méthode consiste à injecter ce développement dans l'équation (\mathcal{P}_2) , à identifier les différentes puissances de ε pour en déduire les équations vérifiées par les termes u_n , à montrer qu'il existe des fonctions u_n vérifiant ces équations, puis à démontrer que les sommes partielles $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n$ forment un développement asymptotique de u_ε .

En réalité, la série encadrée est un abus de notation car nous n'en montrerons pas la convergence. Mais cette abus est classique et il permet de trouver les bonnes équations pour les u_n par un simple calcul formel (ci-dessous). Et ceci n'impacte pas la rigueur de la méthode car la première phase n'est qu'exploratoire, tandis que les estimations d'erreur finales démontrent le développement asymptotique comme il se doit.

Commençons. Notons $X = \frac{x}{\varepsilon}$ la seconde variable des u_n . Nous avons $\frac{d}{dx}v(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \partial_x v(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_X v(x, \frac{x}{\varepsilon})$ pour toute fonction différentiable v . Donc en injectant $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n$ dans (\mathcal{P}_2) , nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} u_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= (\partial_x + \varepsilon^{-1} \partial_X) \left(a(X) (\partial_x + \varepsilon^{-1} \partial_X) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, X) \right) \Big|_{X=\frac{x}{\varepsilon}} - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(\varepsilon^{-2} \partial_X (a(X) \partial_X u_n(x, X)) + \varepsilon^{-1} (a(X) \partial_X + \partial_X a(X)) \partial_x u_n(x, X) \right. \\ &\quad \left. + (a(X) \partial_x^2 - b(X)) u_n(x, X) \right) \Big|_{X=\frac{x}{\varepsilon}} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} \varepsilon^n \left(\partial_X (a(X) \partial_X u_{n+2}(x, X)) + (a(X) \partial_X + \partial_X a(X)) \partial_x u_{n+1}(x, X) \right. \\ &\quad \left. + (a(X) \partial_x^2 - b(X)) u_n(x, X) \right) \Big|_{X=\frac{x}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

avec par convention $u_{-2} = u_{-1} = 0$ et $(a \partial_X + \partial_X a)v := a \partial_X v + \partial_X (av)$ pour toute fonction v .

En identifiant formellement les différentes puissances de ε , nous obtenons : $\forall n \geq -2, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\partial_X (a(X) \partial_X u_{n+2}(x, X)) + (a(X) \partial_X + \partial_X a(X)) \partial_x u_{n+1}(x, X) + (a(X) \partial_x^2 - b(X)) u_n(x, X) \right) \Big|_{X=\frac{x}{\varepsilon}} = f(x) \cdot \delta_{n,0}.$$

avec δ le symbole de Kronecker. Puis, cette égalité devant être vraie pour tout ε , les fonctions de (x, X) sous-jacentes sont aussi égales, c'est-à-dire que : $\forall n \geq -2, \forall (x, X) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\partial_X (a \partial_X u_{n+2}) + (a \partial_X + \partial_X a) \partial_x u_{n+1} + (a \partial_x^2 - b) u_n = f \cdot \delta_{n,0}} \quad (\mathcal{E}_n)$$

où il est sous-entendu que a et b dépendent de X , et f de x . Schématiquement, cette équation donne u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n . Potentiellement, elle impose aussi certaines régularités sur a , u_n , u_{n+1} et u_{n+2} à cause des dérivées présentes, mais nous ne nous en préoccupons pas pour l'instant. Pour exploiter (\mathcal{E}_n) nous aurons besoin du lemme suivant qui découle de la théorie des équations elliptiques.

Lemme 1 : Soit $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique et de moyenne nulle. Supposons que v est L^2_{loc} ou est la dérivée faible d'une fonction L^2_{loc} . Alors l'équation $\partial_X (a \partial_X u) = v$ possède une unique solution 1-périodique dans $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, à une constante près.

Remarque : La condition de moyenne nulle est clairement nécessaire à l'existence de solutions puisque v doit être la dérivée d'une fonction périodique. Et en quelque sorte, ce lemme affirme qu'elle est aussi suffisante.

Maintenant, examinons les conséquences de l'équation (\mathcal{E}_n) sur les premiers termes.

1. (\mathcal{E}_{-2}) donne $\partial_X (a \partial_X u_0) = 0$, donc u_0 est constant par rapport à X d'après le lemme ci-dessus. Nous écrirons donc $u_0(x)$ au lieu de $u_0(x, X)$.

2. (\mathcal{E}_{-1}) donne $\partial_X(a\partial_X u_1) + (a\partial_X + \partial_X a)\partial_x u_0 = 0$. Or $\partial_X u_0 = 0$, donc :

$$\partial_X(a\partial_X u_1) = -\partial_X a \cdot \partial_x u_0.$$

Puis, d'après le lemme précédent, il existe une unique fonction $X \mapsto \psi_1(X)$ vérifiant $\partial_X(a\partial_X \psi_1) = -\partial_X a$ et $\langle \psi_1 \rangle := \int_0^1 \psi_1(X) dX = 0$. Et pour tout x , il existe une constante $c(x)$ telle que : $\forall X \in \mathbb{R}$, $u_1(x, X) = \partial_x u_0(x) \psi_1(X) + c(x)$. De plus, c est la moyenne de u_1 à x fixé : $c(x) = \langle u_1 \rangle(x) := \int_0^1 u_1(x, X) dX$. Donc :

$$\forall (x, X) \in \mathbb{R}^2, \quad u_1(x, X) = \partial_x u_0(x) \psi_1(X) + \langle u_1 \rangle(x).$$

La fonction ψ_1 est appelée un correcteur.

3. En intégrant (\mathcal{E}_0) par rapport à X , nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^1 a(X) \partial_X \partial_x u_1(x, X) dX + (\langle a \rangle \partial_x^2 - \langle b \rangle) u_0(x) = f(x)$$

car les intégrales de dérivées en X de fonctions périodiques sont nulles. En utilisant la décomposition de u_1 précédemment trouvée, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 a(X) (\partial_x^2 u_0(x) \partial_X \psi_1(X) + \partial_X \partial_x \langle u_1 \rangle(x)) dX + (\langle a \rangle \partial_x^2 - \langle b \rangle) u_0(x) \\ &= \underbrace{\langle a \partial_X \psi_1 + a \rangle}_{:= a^*} \partial_x^2 u_0 - \langle b \rangle u_0(x) \end{aligned}$$

Remarque : On peut calculer explicitement que $a\partial_X \psi_1 = \langle a^{-1} \rangle^{-1} - a$, donc $a^* = \langle a^{-1} \rangle^{-1}$ (et $a\partial_X \psi_1 + a$ est constante au passage). C'est bien cohérent avec la proposition 1. Mais la nouvelle expression de a^* se généralise en dimension supérieure si a devient une fonction matricielle $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ elliptique. Dans ce cas, le coefficient (i, j) de A^* vaut :

$$A_{ij}^* = \int_{[0,1]^d} \left(A_{ij}(X) + \sum_{k=1}^d A_{ik}(X) \cdot \partial_{X_k} \psi_{1,j}(X) \right) dX$$

où $X = (X_1, \dots, X_d)$ et pour tout k , $\text{div}(A\nabla \psi_{1,j}) = -\text{div}(Ae_j)$ avec (e_j) la base canonique. Remarquez que A^* peut être non proportionnelle à I_d même si A l'est, créant une isotropie.

Pour les termes suivants, le fonctionnement est similaire : la décomposition de u_n en correcteurs + $\langle u_n \rangle(x)$ est donnée par (\mathcal{E}_{n-2}) , tandis que l'équation vérifiée par $\langle u_n \rangle$ est donnée par la moyenne de (\mathcal{E}_n) . Pour compléter les équations de u_1 , donnons succinctement les deux étapes suivantes :

4. L'équation (\mathcal{E}_0) donne

$$\begin{aligned} \partial_X(a\partial_X u_2) &= f - (a\partial_x^2 - b)u_0 - (a\partial_X + \partial_X a)\partial_x u_1 \\ &= [(a\partial_X \psi_1 + a) \partial_x^2 u_0 + \langle b \rangle u_0] - (a\partial_x^2 - b)u_0 - (a\partial_X + \partial_X a)\psi_1 \cdot \partial_x^2 u_0 - \partial_X a \cdot \partial_x \langle u_1 \rangle \\ &= -\partial_X(a\psi_1) \cdot \partial_x^2 u_0 + (\langle b \rangle - b)u_0 - \partial_X a \cdot \partial_x \langle u_1 \rangle \end{aligned}$$

Notons ψ_2 et ψ_3 les correcteurs de moyenne nulle vérifiant $\partial_X(a\partial_X \psi_2) = -\partial_X(a\psi_1)$ et $\partial_X(a\partial_X \psi_3) = \langle b \rangle - b$. Alors : $\forall (x, X)$, $u_2(x, X) = \partial_x \langle u_1 \rangle(x) \psi_1(X) + \partial_x^2 u_0(x) \psi_2(X) + u_0(x) \psi_3(X) + \langle u_2 \rangle(x)$.

5. La moyenne sur X de (\mathcal{E}_1) donne pour tout x :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (a(X) \partial_X \partial_x u_2(x, X) + (a(X) \partial_x^2 - b(X)) u_1(x, X)) dX \\ &= \langle a \partial_X \psi_1 \rangle \cdot \partial_x^2 \langle u_1 \rangle(x) + \langle a \partial_X \psi_2 \rangle \cdot \partial_x^3 u_0(x) + \langle a \partial_X \psi_3 \rangle \cdot \partial_x u_0(x) \\ &\quad + \langle a \psi_1 \rangle \cdot \partial_x^3 u_0(x) - \langle b \psi_1 \rangle \cdot \partial_x u_0(x) + (\langle a \rangle \partial_x^2 - \langle b \rangle) \cdot \langle u_1 \rangle(x) \end{aligned}$$

Or les termes en $\partial_x^3 u_0$ se compensent car on peut vérifier que $a\partial_X \psi_2 + a\psi_1 = 0$. D'où :

$$(a^* \partial_x^2 - \langle b \rangle) \cdot \langle u_1 \rangle(x) = \langle b \psi_1 - a \partial_X \psi_3 \rangle \cdot \partial_x u_0(x).$$

Nous nous arrêtons là dans le développement, mais il est possible de continuer de même. Et maintenant que nous avons les équations vérifiées par les termes u_n , il reste deux étapes de validation.

Étape 1 : construction des termes. D'après l'introduction et le lemme 1, u_0 , $\langle u_1 \rangle$ et les correcteurs ψ_i sont bien définis dans H^1 pourvu que les second membres de leurs équations aient la bonne régularité (L^2 ou dérivée de L^2). Or il n'est pas très difficile de vérifier que c'est le cas. ^{N.1} Nous aimerions de plus que $u_1 = \partial_x u_0 \cdot \psi_1 + \langle u_1 \rangle$ soit aussi dans H^1 . Mais c'est bien le cas, grâce à l'inégalité suivante ^{N.2} :

$$\exists C > 0, \forall v \in H^1(\mathbb{R}), \forall \psi \in L^2_{\text{loc,per}}(\mathbb{R}), \quad \|x \mapsto v(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2([0,1])} \quad (\star).$$

Étape 2 : estimation d'erreur. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $r_{N,\varepsilon} : x \mapsto u_\varepsilon(x) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n(x, \frac{x}{\varepsilon})$. Pour estimer la norme de ce reste, nous commençons par calculer (par une sorte de sommation télescopique) que :

$$(a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) r'_{N,\varepsilon})' - b(\frac{\cdot}{\varepsilon}) r_{N,\varepsilon} = \varepsilon^N (a\partial_x^2 - b)u_N - \varepsilon^{N-1} \partial_X (a\partial_X u_{N+1}) \Big|_{X=\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Ensuite nous utilisons sur $r_{N,\varepsilon}$ l'estimation $\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}$ donnée en introduction :

$$\begin{aligned} \|r_{N,\varepsilon}\|_{H^1} &\leq C \|(a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) r'_{N,\varepsilon})' - b(\frac{\cdot}{\varepsilon}) r_{N,\varepsilon}\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon^N \|(a\partial_x^2 - b)u_N\|_{L^2} + C \varepsilon^{N-1} \|\partial_X (a\partial_X u_{N+1})\|_{L^2} \end{aligned}$$

Puis nous pouvons majorer ces termes par ε^{N-1} fois une constante en utilisant la décomposition des u_n en $\langle u_n \rangle +$ somme de correcteurs \times des dérivées des u_k précédents, ainsi que l'inégalité (\star) ci-dessus. D'où $\|r_{N,\varepsilon}\|_{H^1} = O(\varepsilon^{N-1})$. Et pour obtenir des majorations optimales, il suffit d'utiliser ce que nous avons trouvé aux rangs suivants :

$$\begin{cases} \|r_{N,\varepsilon}\|_{L^2} \leq \|r_{N+2,\varepsilon}\|_{H^1} + \|\varepsilon^{N+1} u_{N+1}(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2} + \|\varepsilon^{N+2} u_{N+2}(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2} = O(\varepsilon^{N+1}) \\ \|r_{N,\varepsilon}\|_{H^1} \leq \|r_{N+1,\varepsilon}\|_{H^1} + \|\varepsilon^{N+1} u_{N+1}(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{H^1} = O(\varepsilon^N). \end{cases}$$

Ainsi, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1 : estimation d'erreur du développement multi-échelle

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad u_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \begin{cases} O(\varepsilon^{N+1}) & \text{dans } L^2(\mathbb{R}) \\ O(\varepsilon^N) & \text{dans } H^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Remarques :

- Comme dans la proposition 1, la convergence dans H^1 est plus faible que dans L^2 . Ceci est dû à l'égalité $\frac{d}{dx} = \partial_x + \frac{1}{\varepsilon} \partial_X$ qui fait grandir les dérivées des $u_n(x, \frac{x}{\varepsilon})$ comme $\frac{1}{\varepsilon}$.
- En présence de bords, l'approximation se détériore car les conditions au bord sont difficiles à faire respecter. Par exemple, $\|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\|_{H^1} = O(\sqrt{\varepsilon})$ au lieu de $O(\varepsilon)$. Pour améliorer la convergence, il faut alors introduire des correcteurs de bord (voir [5]). Mais nous ne détaillons pas, car la section suivante traite déjà un cas de gestion des bords.

4 Homogénéisation de couches par développement raccordé

La situation qui m'intéresse pour ma thèse est celle de revêtements recouvrant des avions militaires pour absorber une partie des ondes radars et rendre ces avions furtifs. Pour prédire le niveau de furtivité d'un prototype, des simulations numériques sont réalisées. Les grandeurs pertinentes pour l'onde (champ électrique, etc.) sont calculées sur un maillage (en général par la méthode des éléments finis). Or ces revêtements sont faits de matériaux composites périodiques et sont très fins devant la taille de l'appareil.

N.1. Par exemple, ψ_2 est bien défini car $\partial_X (a\partial_X \psi_2) = -\partial_X (a\psi_1)$, et $a\psi_1 \in L^2_{\text{loc}}$ car $a, \psi_1 \in L^\infty$, puisque $\partial_X \psi_1 = 1 - \frac{(a^{-1})^{-1}}{a} \in L^\infty$.

N.2. Obtenue en écrivant $\|v(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} v(x)^2 \psi(\frac{x}{\varepsilon})^2 dx = \langle \psi^2 \rangle \int_{\mathbb{R}} v^2 + \int_{\mathbb{R}} v(x)^2 (\psi(\frac{x}{\varepsilon})^2 - \langle \psi^2 \rangle) dx$ et en faisant une IPP sur la dernière intégrale.

Donc une simulation complète impliquerait de mailler finement la couche, ce qui aurait un coût de calcul exorbitant. C'est pourquoi, nous cherchons un développement asymptotique dont les termes sont calculables sans mailler la couche. Dans un second temps, il est même possible d'obtenir mieux : des conditions au bord approchées équivalentes à la couche.

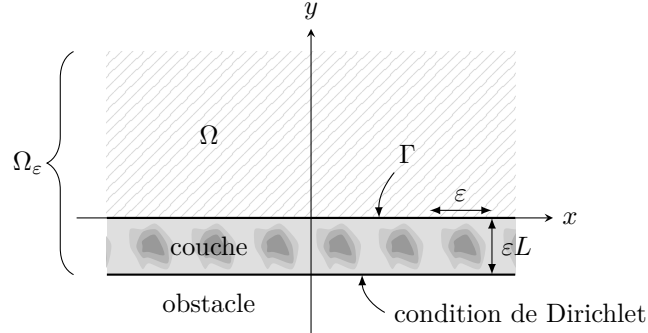


FIGURE 1 – Présentation de la couche périodique

Ainsi, le problème est le suivant. Nous considérons le domaine $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times]-\varepsilon L, \infty[$ illustré en Figure 1, avec $L > 0$, et toujours les mêmes équations :

$$(\mathcal{P}_3) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon) - b(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

Cette équation a la même structure que l'équation de Helmholtz « $\operatorname{div}(a(\frac{\cdot}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon) + b(\frac{\cdot}{\varepsilon}) u_\varepsilon = f$ » (i.e. l'équation des ondes en régime harmonique), mais elle est coercive, donc son analyse est plus simple. a , b et f vérifient les mêmes hypothèses que dans le problème (\mathcal{P}_0) , avec les modifications suivantes :

- a et b sont 1-périodiques par rapport à x mais pas par rapport à y . Au contraire, elles sont constantes dans $\Omega := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, de valeurs respectives a_0 et b_0 . Ceci modélise que le milieu hors couche est homogène (en pratique c'est de l'air).
- Le support de f ne touche pas la couche (l'énergie provient du milieu extérieur, par une onde incidente par exemple).

Pour traiter ce cas, nous utiliserons la technique du développement raccordé. Comme dans le développement multi-échelle de la section 3, elle part d'un ansatz en puissances de ε , mais il est séparé en deux zones :

$$u_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, y) & \text{si } y \gg \varepsilon \text{ (champ lointain)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}) & \text{si } y \ll 1 \text{ (champ proche)} \end{cases}$$

Notez que, contrairement à l'homogénéisation de volume où les champs approchés auraient dépendu de $(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$ partout (comme en section 3 mais en 2D), ici :

- u_n ne dépend que de (x, y) car le caractère constant de a et b dans la zone lointaine homogénéise les champs lointains à tous les ordres,
- et U_n dépend de $\frac{y}{\varepsilon}$ mais pas de y car il décrit un comportement de couche limite dont l'épaisseur d'influence tend vers 0.

De plus, nous supposons que U_n est périodique par rapport à son deuxième argument $\frac{x}{\varepsilon}$. Et nous noterons $X := \frac{x}{\varepsilon}$ et $Y := \frac{y}{\varepsilon}$.

Comme en section 3, nous déduisons aisément les équations vérifiées par ces champs :

$$\begin{cases} a_0 \Delta u_n - b_0 u_n = f \cdot \delta_{n,0} \\ \operatorname{div}_{(X,Y)}(a \nabla_{(X,Y)} U_n) = -(a \partial_X + \partial_X a) \partial_x U_{n-1} - (a \partial_x^2 - b) U_{n-2} \\ U_n|_{Y=-L} = 0 \end{cases}$$

Mais il manque une relation liant les champs lointains et les champs proches. Celle-ci est donnée par l'hypothèse que les champs lointains et proches se raccordent asymptotiquement dans la zone $\varepsilon \ll y \ll 1$, dite "zone de raccord". Ceci se traduit par la relation formelle suivante :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \text{DA}_{y \rightarrow 0}(u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \text{DA}_{Y \rightarrow \infty}(U_n) \Big|_{Y=\frac{y}{\varepsilon}}} \quad (\mathcal{R})$$

où DA désigne le développement asymptotique. Et pour vérifier cette condition, il faut commencer par calculer $\text{DA}_{y \rightarrow 0}(u_n)$ et $\text{DA}_{Y \rightarrow \infty}(U_n)$ pour tout n .

DA de u_n en 0 : Le développement de Taylor de u_n quand $y \rightarrow 0$ s'écrit formellement

$$u_n(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial_y^k u_n(x, 0)}{k!} y^k.$$

Or $a_0 \Delta u_n - b_0 u_n = f \cdot \delta_{n,0}$ avec f supposée nulle au voisinage de Γ . Donc en injectant le développement dans l'équation et en identifiant les ordres en y nous trouvons : $a_0 \partial_y^k u_n(x, 0) + a_0 \partial_x^2 \partial_y^{k-2} u_n(x, 0) - b_0 \partial_y^{k-2} u_n(x, 0) = 0$, puis :

$$\forall k \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial_y^k u_n(x, 0) = \left(-\partial_x^2 + \frac{b_0}{a_0} \right) \partial_y^{k-2} u_n(x, 0).$$

Donc en définissant les opérateurs différentiels S_k^0 et S_k^1 par

k pair	$S_k^0 = (-\partial_x^2 + \frac{b_0}{a_0})^{k/2}$	$S_k^1 = 0$
k impair	$S_k^0 = 0$	$S_k^1 = (-\partial_x^2 + \frac{b_0}{a_0})^{\frac{k-1}{2}}$

les coefficients de Taylor valent : $\partial_y^k u_n(x, 0) = S_k^0 u_{n|\Gamma}(x) + S_k^1 \partial_y u_{n|\Gamma}(x)$. Ainsi, le développement de Taylor de u_n est entièrement déterminé par $u_{n|\Gamma}$ et $\partial_y u_{n|\Gamma}$.

DA de U_n en l'infini : U_n vérifie $-\text{div}(a \nabla U_n) = (a \partial_X + \partial_X a) \partial_X U_{n-1} + (a \partial_x^2 - b) U_{n-2}$ et il doit croître au plus polynomialement pour que son DA puisse se raccorder avec celui de u_n . Donc nous pouvons montrer par récurrence que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de fonctions $(p_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}}$, polynômes Y , tel que

$$\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y > 0, \quad U_n(x, X, Y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{n,k}(x, Y) e^{2i\pi k X - 2\pi |k| Y}$$

avec convergence dans $L^2_{\text{loc,per}}(\mathbb{R})$ pour presque tout $Y > 0$. Ceci se démontre à l'aide d'une décomposition en série de Fourier par rapport à X . Le plus intéressant est $p_{n,0}$ car il donne le comportement à l'infini de U_n (on a $U_n(x, X, Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{=} p_{n,0}(x, Y) + o(1)$) et nous noterons ses coefficients ainsi (le nombre de termes étant fini) :

$$p_{n,0}(x, Y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{n,j}(x)}{j!} Y^j.$$

Puis en injectant leur développement dans l'équation de récurrence de U_n et en identifiant les termes de rang $k = 0$, nous trouvons $-a_0 \partial_Y^2 p_{n,0} = (a_0 \partial_x^2 - b_0) p_{n-1,0}$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \geq 2, \quad c_{n,j} = \left(-\partial_x^2 + \frac{b_0}{a_0} \right) c_{n-2,j-2}.$$

Ainsi, $c_{n,j} = S_j^0 c_{n-j,0} + S_j^1 c_{n-j+1,1}$ si $j \leq n$ et $c_{n,j} = 0$ sinon.

Lemme 2 : La condition de raccord (\mathcal{R}) est satisfaite si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad c_{n,0}(x) = u_n(x, 0)$ et $c_{n,1}(x) = \partial_y u_{n-1}(x, 0)$.

Preuve: Le DA du champ lointain dans la zone de raccord vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \text{DA}_{y \rightarrow 0}(u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^{\infty} [S_k^0 u_n|_{\Gamma}(x) + S_k^1 \partial_y u_n|_{\Gamma}(x)] \frac{y^k}{k!}$$

et celui du champ proche vaut

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \text{DA}_{Y \rightarrow \infty}(U_n)|_{Y=\frac{y}{\varepsilon}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n [S_j^0 c_{n-j,0}(x) + S_j^1 c_{n-j+1,1}(x)] \frac{\varepsilon^{n-j} y^j}{j!} \\ &\stackrel{=}{=} \sum_{m=n-j}^{\infty} \varepsilon^m \sum_{j=0}^{\infty} [S_j^0 c_{m,0}(x) + S_j^1 c_{m+1,1}(x)] \frac{y^j}{j!} \end{aligned}$$

On conclut par identification des termes et en utilisant l'injectivité de $S_0^0 = S_1^1 = \text{id}$. \square

Ainsi, les équations des différents termes sont finalement les suivantes.

Proposition 2 : résumé des équations

Les suites (u_n) et (U_n) doivent être solutions du système d'équations en cascade :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n \in H_{\text{loc}, X\text{-per}}^1(\Omega_1), \text{ à croissance au plus polynomiale} \\ -\text{div}(a \nabla U_n) = (a \partial_X + \partial_X a) \partial_x U_{n-1} + (a \partial_x^2 - b) U_{n-2} \\ U_n|_{Y=-L} = 0 \\ c_{n,1} = \partial_y u_{n-1}|_{\Gamma} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in H^1(\Omega) \\ a_0 \Delta u_n - b_0 u_n = f \cdot \delta_{n,0} \\ u_n|_{\Gamma} = c_{n,0} \end{array} \right.$$

Comme dans la section précédente, il reste deux étapes de validation.

Étape 1 : construction des termes. Construire les champs lointains u_n est facile car ils vérifient des problèmes standard, similaires à (\mathcal{P}_0) . Mais c'est plus délicat pour les champs proches U_n car ces fonctions dépendent d'un paramètre x et elles divergent quand $Y \rightarrow \infty$. Pour régler la première difficulté, nous pouvons montrer que les U_n doivent être de la forme $\sum_{i=1}^k \partial^{\alpha_i} u_{n_i}(x, 0) \cdot \psi_i(X, Y)$ (où k , α_i , n_i et ψ_i dépendent de n). Ainsi, il suffit de construire les fonctions ψ_i , appelées correcteurs. Et ces fonctions vérifient des problèmes similaires aux U_n , mais sans dépendre de x . Cependant ce sont toujours des fonctions qui divergent quand $Y \rightarrow \infty$. Alors, nous commençons par établir le cadre de résolution variationnel suivant (voir [4, p. 42], [6, p. 24]) :

Lemme 3 : Notons $\mathcal{O} :=]0, 1[\times] -L, \infty[$ la cellule de périodicité de Ω_1 . Pour tous $F_1, F_2 \in L^2(\mathcal{O}, \frac{dXdY}{1+Y^2})$, le problème suivant possède une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \in L^2(\mathcal{O}, \frac{dXdY}{1+Y^2}) \text{ et } \nabla \psi \in L^2(\mathcal{O}) \\ \text{div}(a \nabla \psi) = F_1 + \partial_X F_2 \\ \psi(X, -L) = 0 \quad \forall X \in]0, 1[\\ \psi(0, Y) = \psi(1, Y) \quad \forall Y \in] -L, \infty[\text{ (condition de périodicité).} \end{array} \right.$$

Puis nous pouvons construire le correcteur ψ_i en deux étapes (voir [6, p. 27]) : calculer explicitement leur partie polynomiale en fonction de celle de la donnée $\text{div}(\mu \nabla \psi_i)$, soustraire cette partie au problème pour se ramener au cadre variationnel du lemme, et enfin résoudre le problème variationnel. Ceci conclut (dans les grandes lignes) l'étape 1 de construction des termes.

Étape 2 : estimation d'erreur. L'estimation a lieu en deux temps. En procédant comme dans le théorème 1, on trouve d'abord une estimation globale. Mais celle-ci est un peu décevante car elle donne seulement un $O(\varepsilon^{N-1})$. Néanmoins, on en déduit ensuite une erreur en $O(\varepsilon^{N+1})$ sur le champ lointain uniquement, sachant que la zone lointaine est celle qui nous intéresse le plus car elle contient l'onde renvoyée par la couche. Par ailleurs, la première estimation est réalisée sur un assemblage du champ global à l'aide d'une fonction de troncature autour de $y = \eta$, où η est situé dans la zone de raccord ($\varepsilon \ll \eta \ll 1$).

Lemme 4 : erreur du champ global

Soient $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1[$ et $\eta := \varepsilon^\alpha$. Soient de plus $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature valant 0 sur $] - \infty, 1]$ et 1 sur $[2, \infty[$, et :

$$v_{\varepsilon, N}(x, y) := \chi\left(\frac{y}{\eta}\right) \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n(x, y) + (1 - \chi\left(\frac{y}{\eta}\right)) \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right).$$

Il existe une valeur de α pour laquelle $\|u_\varepsilon - v_{\varepsilon, N}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{N-1})$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve: Notons $r_{\varepsilon, N} := u_\varepsilon - v_{\varepsilon, N}$, $s_{\varepsilon, N} : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n(x, y) - U_n(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}))$ et $\chi_\eta : (x, y) \mapsto \chi(\frac{y}{\eta})$.

On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(a\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \nabla r_{\varepsilon, N}\right) - b\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) r_{\varepsilon, N} &= \varepsilon^N \chi_\eta (a\Delta - b)U_N - \varepsilon^{N-1} \chi_\eta \operatorname{div}_{(X, Y)}(a\nabla_{(X, Y)}U_{N+1})\Big|_{X=\frac{x}{\varepsilon}} \\ &\quad + 2a_0 \chi'_\eta \partial_y s_{\varepsilon, N} + 2a_0 \chi''_\eta s_{\varepsilon, N} \end{aligned}$$

La première ligne ci-dessus est obtenue puis traitée de la même manière que dans la preuve du théorème 1. Elle est un $O(\varepsilon^{N-1})$ dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Et la seconde ligne est une erreur de raccord, localisée dans la zone de raccord $\eta \leq y \leq 2\eta$. Grâce à la condition de raccord (\mathcal{R}), on peut montrer qu'elle est un $O(\eta^{N-\frac{1}{2}}) + O(\eta^{-2}e^{-C\eta/\varepsilon})$ (voir [6, p. 42]). Le premier grand O provient de l'erreur dans le DL en $y = 0$ des u_n tandis que le second vient de l'erreur du DA en $Y \rightarrow \infty$ des U_n . Enfin, en posant $\alpha := \frac{N-1}{N-\frac{1}{2}}$, nous avons le $O(\varepsilon^{N-1})$ voulu. \square

Théorème 2 : erreur du champ lointain

Soient $\delta > 0$ et $\Omega'_\delta := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \Gamma) > \delta\} = \mathbb{R} \times]\delta, \infty[$. On a pour tous $N \in \mathbb{N}$:

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n \right\|_{H^1(\Omega'_\delta)} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Preuve: Lorsque $2\eta < \delta$, $v_{\varepsilon, N+2}$ est égal à $\sum_{n=0}^{N+2} \varepsilon^n u_n$ dans Ω'_δ , donc :

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n \right\|_{H^1(\Omega'_\delta)} \leq \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon, N+2}\|_{H^1(\Omega'_\delta)} + \varepsilon^{N+1} \|u_{N+1}\|_{H^1} + \varepsilon^{N+2} \|u_{N+2}\|_{H^1} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

\square

Remarque : Cette dernière estimation est optimale. Et contrairement à la section 3, l'erreur L^2 n'est ici pas meilleure que l'erreur H^1 . En effet les champs lointains ne dépendent que de (x, y) et pas de $(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$, donc leur dérivées n'explosent pas quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Bibliographie

- [1] Grégoire ALLAIRE. “Homogenization and two-scale convergence”. In : *SIAM J. Math. Anal.* 23.6 (1992), p. 1482-1518. ISSN : 0036-1410. DOI : [10.1137/0523084](https://doi.org/10.1137/0523084). URL : <https://doi.org/10.1137/0523084>.
- [2] François ALOUGES. “Introduction to periodic homogenization”. In : *Interdiscip. Inform. Sci.* 22.2 (2016), p. 147-186. ISSN : 1340-9050. DOI : [10.4036/iis.2016.A.01](https://doi.org/10.4036/iis.2016.A.01). URL : <https://doi.org/10.4036/iis.2016.A.01>.
- [3] Alexis AUVRAY et Grégoire VIAL. “Asymptotic expansions and effective boundary conditions : a short review for smooth and nonsmooth geometries with thin layers”. In : *ESAIM : ProcS* 61 (2018), p. 38-54. DOI : [10.1051/proc/201861038](https://doi.org/10.1051/proc/201861038). URL : <https://doi.org/10.1051/proc/201861038>.
- [4] Amandine BOUCART. “Diffraction électromagnétique par une couche mince de nanoparticules réparties aléatoirement : développement asymptotique, conditions effectives et simulations”. à paraître. Theses. 2023.
- [5] Monique DAUGE. “Homogénéisation 2 : Introduction à l’analyse multi-échelle”. 3rd cycle. Lecture. Rennes, mai 2002. URL : <https://cel.hal.science/cel-00702647>.
- [6] Bérangère DELOURME. “Modèles et asymptotiques des interfaces fines et périodiques en électromagnétisme”. Theses. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, déc. 2010. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00650354>.
- [7] Bérangère DELOURME, Kersten SCHMIDT et Adrien SEMIN. “On the homogenization of thin perforated walls of finite length”. In : *Asymptotic Analysis* 97 (2016), p. 211-264.
- [8] Adrien SEMIN, Bérangère DELOURME et Kersten SCHMIDT. “On the homogenization of the Helmholtz problem with thin perforated walls of finite length”. In : *ESAIM : M2AN* 52.1 (2018), p. 29-67. DOI : [10.1051/m2an/2017030](https://doi.org/10.1051/m2an/2017030). URL : <https://doi.org/10.1051/m2an/2017030>.