Quelques problèmes mathématiques entre la glaciologie et l'océanographie

Corentin Gentil

Octobre 2023

Résumé

Cette *Introduction au Domaine de Recherche* est tournée vers l'étude mathématique de différents problèmes de mécanique des fluides liés à la description des océans et des calottes glaciaires. L'hydrosphère et la cryosphère sont deux composantes clés des modèles de climat, en plus de l'atmosphère, de la biosphère, etc. Obtenir des résultats mathématiques rigoureux sur des modèles jouets peut être un moyen de valider, voire d'améliorer, les résultats fournis par les modèles de climat.

Dans un premier temps, nous introduirons les équations de Navier-Stokes dans leur cadre le plus simple, c'est à dire dans un domaine sans bord (l'espace tout entier), sans force extérieure, incompressibles, et avec un coefficient de diffusion constant. Nous rappellerons quelques méthodes fondamentales pour étudier ces équations, ainsi que les principaux résultats d'existence et d'unicité. Nous présenterons quelques éléments de preuve pour expliquer comment étudier des équations issues de la mécanique des fluides.

Dans un deuxième temps, nous ajouterons une force aux équations de Navier-Stokes, pour modéliser la rotation du référentiel. Nous expliquerons l'effet de la rotation, et présenterons quelques résultats sur la modélisation des fluides incompressibles en rotation rapide, et sur les différentes méthodes pour étudier des fluides en rotation.

Dans un troisième et dernier temps, nous étudierons des équations dérivées de Navier-Stokes qui permettent de décrire un écoulement glaciaire à la rhéologie complexe, qui s'écoule dans un domaine différent de l'espace entier et qui évolue dans le temps.

Notations. Dans ce qui suit, on note d la dimension d'espace, $x \in \mathbb{R}^d_x$ la variable d'espace et $t \in \mathbb{R}^+_t$ la variable de temps. On note $\mathcal{D} = \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x)$ l'espace des fonctions tests. On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction f est définie par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$, et on note $\mathcal{F}^{-1}$ son inverse. Pour $p, q \in [1, \infty]$, on note $L^p(\mathbb{R}^+_t; L^q(\mathbb{R}^d_x))$ l'espace des fonctions dans $L^p([0, +\infty))$ à valeurs dans $L^q(\mathbb{R}^d_x)$, c'est-à-dire telles que $t \mapsto \|f(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^d_x)} \in L^p([0, +\infty))$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, cet espace pourra être noté $L^p_t L^q_x$, et $L^p_T L^q_x$ si t est à valeurs dans $[0, T]$ au lieu de $\mathbb{R}^+$.

On note $H^s(\mathbb{R}^d_x)$ l'espace de Sobolev inhomogène d'exposant s, et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d_x)$ l'espace de Sobolev homogène. On rappelle que $L^p_{\mathrm{loc}}(E)$ désigne l'ensemble des fonctions qui sont dans $L^p(K)$ pour tout compact $K \subset E$. Lorsque l'on est en dimension $d = 3$, on notera d'un indice h les troncations aux variables de direction 1 et 2, par exemple $x_h = (x_1, x_2)$, ou encore $\nabla_h = (\partial_1, \partial_2)$.

1 Équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles

1.1 Notions de solutions

Les équations de Navier-Stokes en dimension $d = 2$ ou 3 sont données par le système suivant. Pour un cadre d'introduction simple, nous supposons que le fluide décrit est incompressible, présent dans l'espace tout entier, et soumis à aucune force extérieure :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u &=& -\nabla p & \text{sur } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d, \\ \nabla\cdot u &=& 0 & \text{sur } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d, \\ u|_{t=0} &=& u^0 & \text{sur } \mathbb{R}_x^d, \end{array}\right. \tag{1}$$

où u est le champ de vitesse à d composantes, $(u_1, ..., u_d)(t, x)$, $p(t, x)$ est la pression, définie à une constante près en l'absence de bord, $\nu > 0$ la viscosité et $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$ un champ de vitesse à divergence nulle. Il s'agit d'un système de $d+1$ équations, avec autant d'inconnues, qui modélise *l'évolution* de la pression et de la vitesse dans un fluide. Nous renvoyons à [1] et [4] pour une introduction détaillée aux équations de Navier-Stokes.

La première équation correspond à l'évolution dans le temps du champ de vitesse, où l'on peut comprendre le terme d'advection $(\partial_t + u\cdot\nabla)$ comme *une dérivée temporelle dans le référentiel d'une particule de fluide*, qui se déplace donc à vitesse u. Le terme en laplacien est un terme de diffusion : si le gradient du champ de vitesse est important dans un point de l'espace, *le terme diffusif va faire diminuer la norme du gradient de vitesse*. La condition de divergence nulle correspond à l'incompressibilité du fluide : dans un volume fixe d'espace, la quantité de fluide entrant par unité de temps est égale à la quantité de fluide sortant. Enfin, le terme en gradient de pression peut être vu comme le multiplicateur de Lagrange associé à la condition de divergence nulle.

Dans cette première partie, on va s'intéresser à construire des solutions de (1) sans forcément chercher l'unicité, mais en cherchant *a minima* à vérifier des propriétés "naturelles" que l'on attendrait de solutions physiques. C'est l'objet des définitions suivantes, issues de [1] et [4].

Définition 1. Soit $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$. Une *solution faible* de (1) est un champ de vecteurs $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)^d$ à divergence nulle (au sens des distributions) et qui vérifie, pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)^d$ à divergence nulle aussi, et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_x^d} u(t,x)\cdot\psi(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}_x^d} u^0(x)\cdot\psi(0,x)dx + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_x^d} u(t',x)\cdot(\nu\Delta\psi(t',x) + \partial_t\psi(t',x))dt'dx \\ + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_x^d}(u\otimes u)(t',x) : \nabla\psi(t',x)dt'dx. \end{aligned}$$

Notons que cette définition est compatible avec la notion de solutions régulières, (aussi appelées solutions fortes), en intégrant par partie en t et en x la première équation de (1) multipliée par ψ. Pour combler le manque de sens physique derrière cette définition, on va définir une gamme de solutions intermédiaire entre les solutions fortes et les solutions faibles, il s'agit des *solutions turbulentes*, que l'on pourrait qualifier de *solutions faibles d'énergie finie*.

Définition 2. Une *solution turbulente* de (1) est une solution faible $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)^d$ qui vérifie de plus

$$u \in L_t^\infty(\mathbb{R}^+; L_x^2(\mathbb{R}^d)) \cap L_t^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}_x^1(\mathbb{R}^d)) \ \text{ et } \ \forall t \geq 0,\ \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_x^d)} + \nu\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L_x^2}dt' \leq \frac{1}{2}\|u^0\|^2_{L_x^2}.$$

La deuxième condition est appelée *inégalité d'énergie* : elle assure que l'énergie cinétique du fluide (sa norme L_x^2) reste bornée au cours du temps.

Avant d'énoncer un premier résultat d'existence pour le système (1), il est possible de se débarrasser de l'une des 4 équations, et de l'une des 4 inconnues. En fait, la pression et la condition d'incompressibilité sont intrinsèquement reliées dans l'équation (1). Pour le comprendre, imaginons une cuve d'eau au repos, et supposons que l'on essaye de compresser l'eau sur la gauche de la cuve à l'aide d'un couvercle qui recouvre la moitié gauche de la cuve. Cela met sous pression l'eau qui est à gauche sous le couvercle, mais elle ne peut pas être compressée (contrairement à de l'air !) Ainsi, elle va s'échapper vers la droite de la cuve, et donc un gradient de pression de la droite vers la gauche va créer, par incompressibilité, un mouvement de la gauche vers la droite. C'est exactement ce que nous donne la première équation de (1) qui, en négligeant l'advection et la diffusion, devient $\partial_t u = -\nabla p$.

Définition 3. On appelle *projecteur de Leray* l'opérateur défini par

$$\mathbb{P} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^d_x)^d & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d_x)^d \\ u & \longmapsto & \mathcal{F}^{-1}\Big((I_d - (\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2})_{i,j})\hat{u}(\xi)\Big). \end{cases}$$

Proposition 1. Il s'agit d'un projecteur, c'est à dire que $\mathbb{P} \circ \mathbb{P} = \mathbb{P}$, dont le noyau est $\ker(\mathbb{P}) = \{h \in L^2(\mathbb{R}^d_x)^d,\ \exists \phi \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d_x),\ h = \nabla\phi\}$, et dont l'image est $\mathrm{Im}(\mathbb{P}) = \{h \in L^2(\mathbb{R}^d_x)^d,\ \nabla\cdot h = 0$ au sens des distributions$\}$.

Remarque 1. Lorsque le domaine d'espace sur lequel on résout (1) n'est pas $\mathbb{R}^d_x$ tout entier mais simplement $\Omega \subset \mathbb{R}^d_x$, on peut toujours définir le projecteur de Leray, en renonçant à en avoir une formule explicite (la transformée de Fourier ne fait plus sens). La définition de $\mathbb{P}$ se fait uniquement à partir du noyau et de l'image du projecteur.

Preuve. Vérifions que $\mathbb{P}$ est un projecteur dont le noyau et l'image sont bien ceux donnés ci-dessus. On se place en dimension $d = 2$ pour simplifier les calculs.

Pour vérifier que $\mathbb{P}$ est un projecteur, montrons que pour $u \in L^2(\mathbb{R}^d_x)^d$, on a bien $\widehat{\mathbb{P}u} = \widehat{\mathbb{P} \circ \mathbb{P}u}$. Pour cela, observons que $\widehat{\mathbb{P}u} = P(\xi)\hat{u}(\xi)$, où $P(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi_2^2}{|\xi|^2} & -\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2} \\ -\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2} & \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2} \end{pmatrix}$. Il s'agit juste de vérifier que $P(\xi)^2 = P(\xi)$, ce qui est immédiat en utilisant la définition de la norme euclidienne $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

Pour déterminer le noyau, il suffit d'étudier le noyau de $P(\xi)$, qui est une matrice de rang 1 (et en général de rang $d-1$, avec 0 qui est valeur propre simple associée au noyau, et 1 qui est valeur propre de multiplicité $d-1$ associée à l'image). En dimension 2, les vecteurs propres associés à 0 sont proportionnels à $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, donc en notant $\hat{\phi}(\xi)$ le coefficient de proportionnalité, on trouve bien que ce sont exactement les champs qui sont des gradients qui sont dans le noyau (en Fourier, le gradient devient une multiplication par ξ).

Pour déterminer l'image de $\mathbb{P}$, on cherche les champs de vecteurs u tels que $P(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi)$ presque partout en ξ, donc $\hat{u}(\xi)$ est dans le sous-espace propre de $P(\xi)$ associé à la valeur propre 1 presque partout en ξ. Or, les vecteurs propres sont proportionnels à $\begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$. Comme $\widehat{\nabla\cdot u}(\xi) = \xi \cdot \hat{u}(\xi)$, si $\hat{u}(\xi)$ est vecteur propre pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2_\xi$ (c'est-à-dire u est dans l'image de $\mathbb{P}$), on a bien u à divergence nulle, et réciproquement. ∎

En définissant le projecteur de Leray, le but était de se débarrasser d'une équation et d'une inconnue. Par la Proposition 1, on remarque que ∇p est un terme qui est dans le noyau du projecteur, tandis que u, par condition d'incompressibilité, est dans l'image de $\mathbb{P}$. De plus, en remarquant que $\mathbb{P}$ commute avec le laplacien et la dérivée temporelle, le terme diffusif et la dérivée temporelle sont aussi dans le noyau de $\mathbb{P}P$. Ainsi, en appliquant $\mathbb{P}$ au système (1), on obtient simplement un système équivalent au premier

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbb{P}\Big((u\cdot\nabla)u\Big) - \nu\Delta u & = & 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x, \\ u|_{t=0} & = & u^0 & \text{sur } \mathbb{R}^d_x, \end{cases} \tag{2}$$

mais dont la seule inconnue est le champ de vitesse. Notons que pour $u \in \mathrm{Im}(\mathbb{P})$, on a $\mathbb{P}((u\cdot\nabla)u) = \mathbb{P}(\nabla\cdot(u\otimes u))$.

1.2 Théorème de Leray

Le résultat suivant a été prouvé dans les années 1933-1934 par Jean Leray ([13]). C'est un résultat fondamental de l'étude des équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides.

Théorème 1. Soit $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$ un champ de vitesse à divergence nulle. Alors le système (1) possède une solution turbulente.

Esquisse de preuve (seules les grandes lignes de la preuve seront présentées, sans rentrer dans trop de technicité).
Étape 1. On commence par *construire une famille de solutions approchées*, en se plaçant dans un cadre qui permet d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Considérons la famille de projecteurs

$$P_n : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^d_x)^d & \longrightarrow \quad L^2_n := \mathrm{Im}(P_n) \subset L^2(\mathbb{R}^d_x)^d \\ u & \longmapsto \quad \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{|\xi|\leq n}\hat{u}(\xi)), \end{cases}$$

qui tronquent le support en fréquence. A partir de cette famille de projecteurs, construisons la famille de fonctions

$$F_n : \begin{cases} L^2_n & \longrightarrow \quad L^2_n \\ u_n & \longmapsto \quad \nu P_n(\Delta u_n) - P_n\mathbb{P}(\nabla\cdot(u_n\otimes u_n)). \end{cases}$$

Ces fonctions sont Lipschitziennes par construction, donc l'équation $\partial_t u_n = F_n(u_n)$ avec donnée initiale $u_n|_{t=0} = P_n(u^0)$ possède une unique solution $u_n \in \mathcal{C}^1([0,T_n];L^2_n)$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Pour montrer que les solutions u_n sont globales en temps, il suffit de faire une *estimée d'énergie*. Cette méthode est très classique lors d'études d'équations de la mécanique des fluides. Il s'agit d'évaluer la quantité

$$\int_{\mathbb{R}^d_x} u_n\cdot\partial_t u_n = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2_x},$$

en calculant la même intégrale mais en remplaçant la dérivée temporelle par son expression donnée par F_n. La contribution du terme d'advection est nulle, et en intégrant par partie le laplacien, on trouve $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2_x} = -\nu\|\nabla u_n\|^2_{L^2_x}$, donc le lemme de sortie des compacts assure que la solution u_n est globale.

Étape 2. Pour montrer que la suite de solutions approchées (u_n) permet de construire une solution turbulente, montrons que la suite est *relativement compacte* dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x)^d$.

Pour prouver la relative compacité dans L^2_{loc}, on peut se ramener à des compacts en temps et en espace, et dans ce cas, il suffit de montrer la relative compacité dans $L^\infty_T L^2_x$ au lieu de $L^2_T L^2_x$.

On étudie donc la famille $u_n : [0,T] \longrightarrow L^2_x$, où $u_n \in \mathcal{C}([0,T];L^2_x)$, dont on montre la compacité relative par le théorème d'Arzelà-Ascoli : la compacité relative ponctuelle provient d'une borne uniforme dans $L^\infty_T H^1_x$ combinée avec le théorème de Rellich (l'injection canonique $H^1 \hookrightarrow L^2$ est compacte), et l'équicontinuité provient de la forme de l'équation satisfaite par les (u_n), en remarquant que $u_n(t) - u_n(t') = \displaystyle\int_t^{t'} F_n(u_n)$.

Etape 3. Jusqu'à présent, on a construit une suite de solutions approchées et on a trouvé une valeur d'adhérence de cette suite $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x)^d$. On peut maintenant montrer que *u est solution faible de* (1).

Pour cela, il faut commencer par montrer que la convergence (à extraction près) $u_n \longrightarrow u$ se fait dans des espaces plus forts que $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x)^d$, par exemple que

$$\forall\psi \in L^2([0,T];H^1_x)^d \text{ telle que } \nabla\cdot\psi = 0, \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d_x}\nabla((u_n-u)(t,x)) : \nabla\psi(t,x)dxdt \longrightarrow 0 \text{ quand } n\to\infty.$$

L'objectif d'obtenir des convergences plus "fortes" que dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x)^d$ est de pouvoir passer à la limite en n dans l'équation différentielle définissant u_n et ainsi retrouver chacun des termes de (2). Le terme d'advection est le plus délicat pour passer à la limite car il est non linéaire et on n'a pas de résultat de convergence direct pour ce terme.

Étape 4. Pour conclure la preuve, il reste à justifier que *la solution faible obtenue est turbulente*, ce qui s'obtient par passage à la limite dans l'estimée d'énergie satisfaite par u_n combinée aux résultats de convergence faible et forte.

■

1.3 Résultats d'unicité

Le Théorème de Leray n'assure pas l'unicité de la solution turbulente en règle générale (qui n'est obtenue que comme valeur d'adhérence d'une suite relativement compacte). Pour obtenir des résultats d'unicité, il faut distinguer les cas selon la dimension d'espace d. La différence principale est qu'en dimension 2, H^1_x s'injecte dans L^4_x, ce qui permet de montrer que la suite (u_n) construite dans la preuve du Théorème de Leray est de Cauchy, alors qu'en dimension 3, l'injection a lieu dans L^6_x. Les deux résultats phares sont les suivants.

Théorème 2. *Dimension* 2. Soit $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$ un champ de vitesse à divergence nulle. Alors le système (1) possède une unique solution turbulente, qui vérifie de plus

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2_x} + \nu \int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2_x} dt' = \frac{1}{2}\|u^0\|^2_{L^2_x} \qquad \text{et} \qquad u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+_t; L^2(\mathbb{R}^2_x)^2).$$

Théorème 3 (Fujita-Kato), [10]. *Dimension* 3. Soit $u^0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3_x)^3$ à divergence nulle. On dispose de $T > 0$ tel que (1) possède une unique solution

$$u \in L^4([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3_x)^3) \cap \mathcal{C}([0,T], \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3_x)^3) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3_x)^3).$$

De plus, en notant T_{u^0} le temps maximal d'existence, alors si $T_{u^0} < +\infty$, on a $\|u\|_{L^4([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3_x)^3)} \longrightarrow +\infty$ quand $T \to T_{u^0}$. Enfin, on dispose de $c > 0$ telle que si $\|u^0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}_x} \leq c$, alors $T_{u^0} = +\infty$.

La preuve du théorème de Fujita-Kato peut se voir comme la résolution d'un problème de point fixe de la façon suivante. En appliquant le projecteur de Leray, on se ramène à l'équation $\partial_t u - \nu\Delta u = -\mathbb{P}u \cdot \nabla u$, et en notant $S(t)$ le semi-groupe associé à l'équation de la chaleur $\partial_t v = \nu\Delta v$, la formule de Duhamel permet de reformuler (1) en *formulation douce* :

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-t')\mathbb{P}\, u(t') \cdot \nabla u(t') dt', \tag{3}$$

ce qui correspond bien à un problème de point fixe.

Le théorème de Fujita-Kato s'interprète de la façon suivante pour caractériser les solutions de l'équation (1) avec une donnée initiale suffisamment régulière : soit la donnée initiale est quelconque, et alors le temps d'existence peut être arbitrairement petit, soit la donnée initiale est petite, et alors l'existence est globale. Cette dualité entre la petitesse de la donnée initiale d'une part, et la petitesse du temps d'existence d'autre part, se retrouve dans de nombreux théorèmes d'existence et d'unicité en mécanique des fluides.

Notons enfin que parler de donnée initiale "petite" fait sens car l'espace dans lequel on considère la donnée initiale $u^0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3_x)^3$ est *invariant par changement d'échelle*. Les changements d'échelle correspondent au fait que si l'on dispose d'une solution pour l'équation de Navier-Stokes pour une certaine donnée initiale u^0, on peut procéder à un changement de variable linéaire pour ajuster la solution obtenue u, en prenant $u_\lambda = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ pour la donnée initiale $u^0_\lambda = \lambda u^0(\lambda x)$. De fait, pour pouvoir parler de *petitesse de la donnée initiale*, il faut que l'espace dans lequel on mesure u^0 préserve la norme pour le changement d'échelle en λ que l'on vient de mentionner ce qui est bien le cas de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3_x)$.

2 Fluides géophysiques soumis à la rotation terrestre

2.1 Présentation du système et considérations physiques

Le système considéré dans la section précédente était la version la plus "élémentaire" des équations de la mécanique des fluides. En effet, *la plupart des sources de complications éventuelles ont été écartées* : le domaine était l'espace tout entier sur lequel il n'y a pas de bords, la densité n'apparaît pas dans l'équation car le fluide est incompressible, il n'y a pas de force extérieure, ni de terme additionnel en u pour modéliser d'autres forces, ni de couplage avec une autre grandeur comme la température, etc.

Lorsque l'on souhaite modéliser un fluide dans un contexte donné, il faut souvent rajouter des conditions physiques, par exemple sur le bord du domaine, ou sur d'autres forces qui apparaissent, ou sur la température du fluide qui viendrait jouer un rôle dans l'équation, etc. Dans le contexte des fluides géophysiques, c'est-à-dire l'atmosphère et l'océan, l'un des principaux phénomènes à prendre en compte est la rotation terrestre. En effet, en raisonnant par ordre de grandeur, la vitesse moyenne des courants océaniques est de $10^{-2}m/s$, la distance caractéristique de déplacement est de 10^2km, et donc la Terre effectue 10^2 rotations pendant le temps caractéristique de déplacement d'une particule de fluide dans l'océan (voir [16] pour plus de considérations physiques).

Ainsi, la force de Coriolis liée à la rotation de la Terre va se révéler être un terme clé dans la description du mouvement des océans et de l'atmosphère. Le système considéré pour étudier mathématiquement un fluide incompressible en rotation rapide dans tout l'espace en 3 dimensions est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \frac{e_3\wedge u}{\varepsilon} - \nu\Delta u & = & -\nabla p & \text{sur } \mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x, \\ \nabla\cdot u & = & 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x, \\ u|_{t=0} & = & u^0 & \text{sur } \mathbb{R}^d_x, \end{array} \right. \tag{4}$$

en conservant les mêmes notations, et avec de plus ε la fréquence de rotation (supposée petite) et $\frac{1}{\varepsilon}e_3 \wedge u = \frac{1}{\varepsilon}(-u_2, u_1, 0)$ la force de Coriolis.

Le terme de rotation rapide est *pénalisé par rapport aux autres termes en u*. Comme le seul terme qui peut absorber une pénalisation en $\frac{1}{\varepsilon}$ est le gradient de pression, on s'attend à ce que la solution satisfasse, au moins à l'ordre principal, $\frac{1}{\varepsilon}e_3 \wedge u = -\nabla p$, ce qui conduit à $p = p(x_1, x_2)$, et donc $u = u(x_1, x_2)$ par incompressibilité. En d'autres termes, *dans un fluide en rotation rapide, la vitesse du fluide est, à l'ordre principal, uniquement dépendante des variables horizontales.* Il s'agit du *théorème de Taylor-Proudman*, que l'on peut énoncer rigoureusement dans un cadre mathématique. C'est l'objet de la Section 2.3.

2.2 Considérations mathématiques : autour de la dispersion

Le système (4) ne peut pas être étudié comme le système (1) si l'on veut des résultats plus précis en termes de comportement de la solution. En effet, comme expliqué dans la section précédente, l'étude de (1) repose fortement sur des estimées d'énergie pour justifier la régularité des solutions, par exemple L^2 en temps et $\dot{H}^1$ en espace.

Toutefois, en appliquant la même méthode que pour prouver le théorème de Leray, on aboutirait à un théorème rigoureusement identique car le terme de rotation est antisymétrique et serait donc transparent dans les estimées d'énergie : si A est un opérateur antisymétrique, $\displaystyle\int uAu = (u|Au)_{L^2} = 0$ (voir l'article [5] pour cette discussion).

Il faut donc, dans ce cas, trouver un autre moyen d'exploiter le comportement du terme de rotation et le potentiel gain de régularité associé. Il existe pour cela diverses méthodes. Le problème (4) peut aussi s'écrire en formulation douce à la manière de (3), et on peut appliquer le projecteur de Leray à la première équation. Cela nous mène à étudier le semi-groupe associé au projeté de Leray de la rotation et à la viscosité, que l'on note $T(t)$ et qui est associé à l'équation linéaire $\partial_t u + \mathbb{P}\frac{e_3\wedge u}{\varepsilon} - \nu\Delta u = 0$.

Il existe diverses méthodes pour étudier ce genre de semi-groupe. En règle générale, ce genre d'opérateur antisymétrique (c'est le cas pour Coriolis, mais c'est aussi le cas pour l'opérateur de Schrödinger, voir [1]) aboutit à une inégalité de dispersion pour le semi-groupe, du type

$$\|T(t)u^0\|_{L^\infty_x} \leq C(1+|t|)^{-\sigma}\|u^0\|_{L^1_x}, \tag{5}$$

pour un certain $\sigma > 0$. Pour obtenir ce genre d'inégalité, il est fréquent de recourir à la méthode de la phase stationnaire, comme c'est le cas dans [4] pour le semi-groupe d'intérêt. Par un argument TT* (il s'agit d'un argument abstrait d'analyse fonctionnelle qui relie la bornitude d'un opérateur à celle de son adjoint, voir [1] pour des détails) on peut passer de (5) à des estimées de type $\|u\|_{L^p_t L^q_x} \leq C\|u^0\|_{L^r_x}$ que l'on appelle estimées de Strichartz. Ces estimées, contrairement aux estimées d'énergie, permettent de capturer pleinement le caractère dispersif (et donc régularisant) de l'opérateur de Coriolis.

Remarque 2. Il existe d'autres méthodes pour étudier ce genre de semi-groupe. A titre d'exemple, si l'on considère uniquement le semi-groupe associé à l'équation $\partial_t u + \mathbb{P}\frac{e_3 \wedge u}{\varepsilon} = 0$, d'autres théories permettent d'obtenir des bornes sur cet opérateur. Par exemple, le théorème de Littman ([14]) est utilisé par les auteurs de [11] pour obtenir des estimées de Strichartz optimales dans le cas de l'équation d'Euler en rotation (c'est-à-dire (4) sans terme visqueux). L'effet dispersif d'un tel opérateur est aussi capturé par les théorèmes de restriction de Fourier initiés par Tomas et Stein ([20],[17]), et présentés exhaustivement dans [19] (pour une introduction à la théorie de la restriction). Le lien avec les estimées de Strichartz a été fait par Strichartz dans [18], et le lien avec les semi-groupes associés aux équations des fluides géophysiques est présenté dans [7]. Les méthodes mentionnées ici restent valides même en rajoutant la stratification liée à la température (et donc une inconnue en plus, le champ de température) aux phénomènes physiques modélisés. Pour les autres modèles étudiés par le théorème de Littman, voir [12] et [9]. Ces systèmes peuvent à nouveau être étudiés par la théorie de la restriction, qui donne des résultats comparables.

2.3 Résultat de convergence pour la rotation rapide

La section précédente présentait diverses méthodes pour obtenir des estimées sur l'opérateur de Coriolis, qui n'apparaît pas dans les estimées d'énergie dans L^2 mais qui permet toutefois un gain de régularité. Grâce à ces estimées, et en particulier celles obtenues dans [4], il est possible de montrer rigoureusement le théorème de Taylor-Proudman.

Considérons une donnée initiale dépendant de la variable horizontale mais avec trois composantes d'espace $\overline{u^0} \in L^2(\mathbb{R}^2_{x_h})^3$, et à divergence horizontale nulle : $\nabla_h \cdot \overline{u^0_h} = 0$. Le Théorème 2 énoncé plus haut reste valide pour le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t \overline{u} + (\overline{u_h} \cdot \nabla_h)\overline{u} - \nu \Delta_h \overline{u} & = & -(\nabla_h p, 0) & \text{sur } \mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^2_{x_h}, \\ \nabla_h \cdot \overline{u_h} & = & 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^2_{x_h}, \\ \overline{u}|_{t=0} & = & \overline{u^0} & \text{sur } \mathbb{R}^2_{x_h}, \end{array}\right. \tag{6}$$

auquel il suffit d'ôter l'équation sur $\overline{u_3}$ pour retrouver le système (1) en dimension $d = 2$.

On peut, en utilisant les estimées sur le semi-groupe associé à l'opérateur de Coriolis mentionnées dans la section précédente, démontrer le résultat suivant (voir [4] pour la preuve).

Théorème 4. Soit u^0 un champ de vitesse à divergence nulle que l'on peut décomposer de la façon suivante :

$$u^0(x) = \overline{u^0}(x_h) + w^0(x), \quad \text{avec } \nabla_h \cdot \overline{u^0_h}(x_h) = 0, \quad \nabla \cdot w^0 = 0, \quad \overline{u^0} \in L^2(\mathbb{R}^2_{x_h})^3 \quad \text{et} \quad w^0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3_x).$$

Alors si la rotation est suffisamment forte, c'est-à-dire si ε est suffisamment petit, le système (4) possède une unique solution globale u^ε qui converge (dans un sens à expliciter) vers la solution $\overline{u}$ de (6) associée à la donnée initiale $\overline{u^0}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Cela correspond exactement au théorème de Taylor-Proudman.

Remarque 3. L'hypothèse essentielle de ce théorème est d'imposer que la donnée initiale u^0 est *bien préparée*. A nouveau, il s'agit d'un raisonnement classique en mécanique des fluides, et même plus généralement dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Pour démontrer un résultat sur le comportement asymptotique d'une solution, ou même juste un résultat d'existence ou d'unicité, on suppose que la donnée initiale vérifie des hypothèses qui ne sont pas toujours classiques mais permettent de préparer le terrain pour démontrer les résultats.

3 Sur la modélisation d'un écoulement glaciaire

3.1 Spécificités du problème : surface libre et rhéologie complexe

Nous avons vu dans la section précédente comment étudier des fluides en rotation. Dans cette section, nous nous intéressons à l'évolution d'un glacier sur un socle continental, ce qui fait apparaître deux nouveaux aspects absents de l'équation initiale (1) qui interviennent pour décrire le mouvement de la glace. D'une part, le domaine considéré possède une frontière, et en particulier une frontière qui dépend du comportement du fluide, car la surface du glacier évolue au court du temps (à la manière du miel qui coulerait lentement sur une pente douce). D'autre part, la glace n'a pas un comportement visqueux "classique", mais doit être décrite par un terme visqueux adapté.

Rhéologie. Dans le cadre présenté dans les sections précédentes, le terme visqueux utilisé pour décrire le fluide était $-\nu\Delta u$. On peut réécrire ce terme d'un point de vue davantage "mécanique des milieux continus" en utilisant l'égalité $\nu\Delta u = \nabla\cdot(2\nu D(u))$ où $D(u) = \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2}$ est la partie symétrique du gradient de la vitesse.

Il existe *plusieurs lois de comportement pour modéliser la rhéologie de la glace*, selon la situation physique que l'on veut décrire.

Définition 4. La loi de Glenn (présentée dans [6]) est une loi phénoménologique utilisée pour décrire un glacier tempéré s'écoulant relativement rapidement. Le terme visqueux est donné par $\nabla\cdot\mathbb{S}$, où

$D(u) = B(T')\mathrm{tr}(\mathbb{S}^2)\mathbb{S}$, avec T' reliée à la pression et la température $T' = T - T_0 - a\times p$ et $B(T') = b\times e^{c(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T'})}$,

avec a, b, c, T_0 des constantes. On peut, pour simplifier l'étude, que $B(T')$ est constant, auquel cas, le terme visqueux est proportionnel à $\nabla\cdot(\frac{D(u)}{|D(u)|^{2/3}})$. Dans cette partie, nous nous concentrerons uniquement sur la loi de Glenn.

Remarque 4. D'autres lois de comportement existent ([6]) pour modéliser la glace dans diverses situations. Par exemple, la loi de Golf décrit de la glace très froide et cristallisée, supposée anisotrope. Cette loi repose sur une hypothèse de modélisation forte, à savoir que l'anisotropie de la glace donne lieu à des cisaillements dans certaines directions d'espaces.

Une autre loi phénoménologique est celle qui décrit la neige et les névés, qui est valide pour les parties hautes des glaciers de montagne faites de neige ou de névé. Elle s'écrit

$$D(u) = B(T')(\tilde{a}\ \mathrm{tr}(\mathbb{S}^2) + \tilde{b}p^2)(\tilde{a}\mathbb{S} + \tilde{b}p\mathbb{I}),$$

où $\tilde{a} = \tilde{a}(\rho)$ et $\tilde{b} = \tilde{b}(\rho)$ suivent des lois de puissance en la densité.

Domaine à surface libre. Pour modéliser le domaine spatial dans lequel on veut résoudre l'équation du fluide décrit, on peut considérer un domaine évoluant avec le temps de la forme :

$$\Omega(t) = \{(x_h, z) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R},\quad 0 < z < \eta(x_h, t)\},$$

avec η la surface du fluide qui vérifie une équation de transport : $\partial_t\eta + u_h\cdot\nabla_h\eta = u_3$. Il s'agit d'un *problème à surface libre*, c'est à dire que le fluide n'est pas contraint dans un domaine fixe mais évolue librement.

Remarque 5. Il y a, dans la définition du domaine $\Omega(t)$, quelques hypothèses implicites de modélisation. Par exemple, prendre $z > 0$ revient à considérer à domaine à fond plat, mais on pourrait imaginer une certaine bathymétrie et un domaine de la forme $z > z_b(x_h)$ où z_b serait une fonction donnée. De plus, en supposant $\eta > 0$, on suppose qu'il n'y a jamais d'interface triple entre le sol, la glace, et l'air. Enfin, l'équation de transport vérifiée par la surface du fluide pourrait être complétée par un terme source d'accumulation ou de destruction pour modéliser la chute et la fonte de neige saisonnière.

Cela mène au système suivant

$$
\begin{cases}
\partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p - \nabla\cdot\left(\frac{1}{|D(u)|^{2/3}}D(u)\right) &= 0 & t>0,\ x\in\Omega(t),\\
\nabla\cdot u &= 0 & t>0,\ x\in\Omega(t),\\
\partial_t\eta + u_h(x_h,\eta(x_h))\cdot\nabla_h\eta &= u_3(x_h,\eta(x_h)) & t>0,\ x_h\in\mathbb{R}^2,\\
u(x_h,0,t) &= 0 & t>0,\ x_h\in\mathbb{R}^2, z=0,\\
u(\cdot,0) &= u^0 & t=0,\ x\in\Omega(0),
\end{cases}
\tag{7}
$$

auquel on rajoute une équation sur la pression à la surface du domaine.

3.2 Une étude de cas pour le système régularisé dans tout le domaine

Le terme visqueux considéré dans (7) est dégénéré quand $\nabla u \longrightarrow 0$. Ce genre de dégénérescence se retrouve dans d'autres modèles, par exemple le modèle de formation de glace de mer de Hibler ([8]). Le caractère bien posé de ce modèle a été récemment montré dans deux cadres différents (indépendamment) ([15],[3]), mais à chaque fois faisant intervenir un petit paramètre régularisant pour éviter les dégénérescences. En s'inspirant de [15], introduisons $\varepsilon > 0$ et notons

$$
\mathbb{S}_\varepsilon = \frac{1}{(|D(u)|^2+\varepsilon^2)^{1/3}}D(u).
$$

L'équation principale devient

$$
\partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla p - \nabla\cdot\frac{1}{(|D(u)|^2+\varepsilon^2)^{1/3}}D(u) = 0.
$$

Pour se débarrasser du problème de frontière libre, considérons dans un premier temps le problème

$$
\begin{cases}
\partial_t v + (v\cdot\nabla)v - \nabla\cdot\left(\frac{D(v)}{(\varepsilon^2+|D(v)|^2)^{1/3}}\right) + \nabla p &= 0 & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\
\nabla\cdot v &= 0 & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\
v(\cdot,0) &= v^0 & t=0,
\end{cases}
\tag{8}
$$

pour lequel on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 5. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et $v_0 \in H^3(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla\cdot v^0 = 0$. Alors on dispose de $\delta > 0$ qui dépend de ε et $c \in (0,1)$ qui dépend aussi de ε, tel que si $\|v_0\|_{H^3(\mathbb{R}^3)} \le c\delta$, alors le système ci-dessus possède une unique solution forte globale en temps telle que

$$
v \in L^2_t H^4 \cap L^\infty_t H^3 \ := \ X_\infty \quad \text{et} \quad \|v\|_{X_\infty} \le \delta.
$$

Esquisse de preuve. **Étape 1.** On se débarrasse de la pression, et on écrit le problème en formulation douce comme un problème de point fixe. En appliquant le projecteur de Leray à la première équation de (8), on obtient

$$
\partial_t v + \mathbb{P}(\nabla\cdot(v\otimes v)) - \mathbb{P}\nabla\cdot\left(\frac{Dv}{(\varepsilon^2+|Dv|^2)^{1/3}}\right) = 0.
$$

En notant $B_\delta = B(0,\delta) \subset X_\infty$, il s'agit donc de trouver un point fixe de l'application :

$$
\Phi : \begin{cases}
B_\delta & \longrightarrow & B_\delta\\
v_1 & \longmapsto & v_2 \text{ solution de}\\
 & & \begin{cases} \partial_t v_2 - \mathbb{P}\nabla\cdot\left(\frac{Dv_2}{(\varepsilon^2+|Dv_1|^2)^{1/3}}\right) &= -\mathbb{P}\nabla\cdot(v_1\otimes v_1)\\ v_2(\cdot,0) &= v^0, \end{cases}
\end{cases}
$$

d'une part en prouvant que Φ est bien définie, et d'autre part en justifiant que c'est une contraction.

Étape 2. Il faut justifier que Φ est bien définie. Tout d'abord, l'équation vérifiée par v_2 est parabolique et on peut trouver une solution faible. De plus, cette solution faible est en fait une solution forte grâce à des estimées d'énergie d'ordre 0 à 3 dans les espaces $(L^2_t H^k \cap L^\infty_t H^{k-1})$ pour $k = 1, ..., 4$.

Pour effectuer ces estimées d'énergie, soit $\partial \in \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$. Pour obtenir, à titre illustratif, une estimée d'énergie d'ordre 1, on cherche à calculer $\Big(\partial(*)|\partial v_2\Big)_{L^2}$, où $(*)$ désigne l'équation satisfaite par v_2.

En utilisant le fait que

$$\partial \frac{1}{(\varepsilon^2 + |Dv_1|^2)^{1/3}} = -\frac{2}{3} \frac{\sum\limits_{i,j} \partial\partial_i v_{1j}}{(\varepsilon^2 + |Dv_1|^2)^{4/3}},$$

on trouve dans un premier temps que

$$\partial_t \partial v_2 - \mathbb{P}(\nabla \cdot (\frac{D\partial v_2}{(\varepsilon^2 + |Dv_1|^2)^{1/3}}) = -\mathbb{P}\nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{Dv_2 \sum\limits_{i,j} \partial\partial_i v_{1j}}{(\varepsilon^2 + |Dv_1|^2)^{4/3}}\right) - \mathbb{P}\nabla \cdot (v_1 \otimes \partial v_1 + \partial v_1 \otimes v_1).$$

On multiplie ensuite l'expression par ∂v_2 et on intègre en espace, pour trouver :

$$\frac{d}{dt} \|\partial v_2\|^2_{L^2} + \frac{1}{(2\varepsilon)^{2/3}} \|\nabla \partial v_2\|^2_{L^2} \leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |D\partial v_2| \; |Dv_2| \; |D\partial v_1| + 2 \int_{\mathbb{R}^3} |D\partial v_2| \; |\partial v_1| \; |v_1|.$$

Les injections de Sobolev et l'inégalité de Hölder nous assurent que

$$\|\partial v_2(t)\|^2_{L^2} + \frac{1}{(2\varepsilon)^{1/3}} \|\nabla \partial v_2\|^2_{L^2_t L^2} \leq \|\partial v^0\|^2_{L^2} + C\|\partial \nabla v_2\|^2_{L^2_t L^2} \|\partial \nabla v_1\|_{L^\infty_t L^3} + C\|\partial \nabla v_2\|_{L^2_t L^2} \|v_1\|^2_{L^4_t \dot{H}^{5/4}},$$

et on conclut l'estimée d'énergie par inégalité de convexité scalaire et interpolation. Les estimées aux ordres 0, 2 et 3 se montrent de manière similaire, et l'application Φ est bien à valeurs dans B_δ par les estimées d'énergie qui assurent la petitesse de v_2.

Étape 3. Il reste à justifier que Φ est une contraction. Pour cela, il suffit de refaire des estimées d'énergie, mais cette fois-ci sur $u_2 - v_2$, où u_2 et v_2 sont des solutions associées respectivement à $u_1, v_1 \in B_\delta$, ce qui est moins contraignant que les estimées d'énergie précédentes car on a déjà prouvé la petitesse de certains termes. ∎

Remarque 6. Ce résultat laisse de nombreuses questions ouvertes et à creuser. D'une part, comme mentionné en interprétant le théorème de Fujita-Kato, on aime avoir des résultats d'existence globale pour donnée petite, mais aussi des résultats d'existence en temps court pour donnée initiale quelconque, ce que l'on n'a pas ici. De plus, on a ici considéré une régularisation en ε du problème, sans montrer qu'elle était nécessaire (dans un sens qui serait à préciser). Enfin, on pourrait se demander s'il est possible de réduire les conditions de régularités demandées sur la donnée initiale pour avoir un espace moins restrictif.

3.3 Étude d'un problème à surface libre

La section précédente n'est pas entièrement satisfaisante, car même si l'on accepte la régularisation, on aimerait toutefois prendre en compte la surface libre du fluide, et ne pas se placer dans tout l'espace. Pour remédier à cela, considérons le système (7), auquel on enlève le terme de viscosité problématique issu de la loi de Glenn pour le remplacer simplement par un terme diffusif $-\nu\Delta u$. Alors on peut montrer le théorème suivant prouvé par Beale dans [2] et énoncé ici sans rentrer dans les détails techniques.

Theorème 6 (Beale). Soit $u_0 \in H^{r-1}(\Omega_{t=0})$ avec $r \in (3, 7/2)$, et soit Ω suffisamment régulier. Alors, si u_0 vérifie de bonnes conditions de comptabilité, il existe $T > 0$ qui dépend des conditions initiales tel que la solution u au problème (7) (avec le terme visqueux simplifié en laplacien) définie dans $G = \{(t, x) \in [0, T] \times \Omega(t)\}$ vérifie $u \in L^2_T H^r \cap H^{r/2}_T L^2$.

La preuve repose sur un changement de variable pour adopter un point de vue lagrangien plutôt qu'eulérien, en introduisant le difféomorphisme γ vérifiant $\partial_t \gamma = u \cdot \gamma$, c'est à dire la transformation de l'espace qui suit le flot. La preuve est assez différentes de celles des autres théorèmes énoncés, car en opérant ce changement de variables, on perd le terme d'advection mais on ajoute de nombreux termes dépendant de l'inverse de la jacobienne de γ.

4 Conclusion et perspectives

L'objectif de cette introduction au domaine de recherche était de montrer quelques facettes différentes de l'étude des équations issues de la mécanique des fluides utilisées pour décrire des fluides terrestres.

Bien entendu, cette brève introduction n'a aucune volonté d'exhaustivité et ne prétend pas faire découvrir tous les problèmes qui peuvent exister dans l'étude mathématique des équations de la mécanique des fluides, ni de présenter une hiérarchie des résultats par degré d'importance.

Pour donner un exemple de ce qui a ici été passé sous silence, tout un champ de l'étude mathématique des océans vise à étudier *les couches limites* qui apparaissent au niveau des bords du domaine occupé par l'océan. Ces couches limites, qu'il s'agisse des couches limites de surface et de fond (Ekman) ou de bords latéraux (Munk, Stommel) doivent se comprendre d'une part sous l'effet de la rotation, mentionnée dans la Section 2, mais d'autre part sous l'effet de la friction, qui n'a pas été traitée ici.

Les sections 2 et 3 correspondent respectivement à mes travaux de stage de M1 (en particulier la Remarque 2) et de M2 (en particulier le Théorème 5). Dans les années à venir, j'étudierai davantage les couches limites en océanographie, en particulier dans des domaines avec une bathymétrie marquée.

Remerciements

Pour m'avoir permis d'apprendre et de comprendre ce qui est présenté dans cette Introduction au domaine de recherche, je remercie chaleureusement Isabelle Gallagher qui a encadré mon stage de M1, et Anne-Laure Dalibard qui a (notamment) encadré mon stage de M2.

Bibliographie

[1] Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin, and Raphaël Danchin. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Vol. 343. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Jan. 2011, 523 pages. URL: https://hal.science/hal-00732127.

[2] J. Thomas Beale. "The initial value problem for the navier-stokes equations with a free surface". In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 34 (1981), pp. 359–392.

[3] Felix Brandt et al. "Rigorous Analysis and Dynamics of Hibler's Sea Ice Model". In: *J. Nonlinear Sci.* 32 (2022), p. 50.

[4] J.-Y. Chemin et al. "Mathematical Geophysics: An Introduction to Rotating Fluids and the Navier-Stokes Equations". In: *Oxford University Press* (2006).

[5] Jean-Yves Chemin. "À propos d'un problème de pénalisation de type antisymétrique". In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 76.9 (1997), pp. 739–755. ISSN: 0021-7824. DOI: https://doi.org/10.1016/S0021-7824(97)89967-9. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021782497899679.

[6] Olivier Gagliardini. "Habilitation à Diriger des Recherches : Modélisation d'écoulements complexes en Glaciologie". In: *Unpublished* (2007).

[7] C. Gentil and C. Tabary. "Strichartz estimates for geophysical fluid equations using Fourier restriction theory". In: *Soumis pour publication* (2023).

[8] William D. Hibler. "A Dynamic Thermodynamic Sea Ice Model". In: *Journal of Physical Oceanography* 9 (1979), pp. 815–846.

[9] Tsukasa Iwabuchi, Alex Mahalov, and Ryo Takada. "Global solutions for the incompressible rotating stably stratified fluids". In: *Mathematische Nachrichten* 290.4 (2017), pp. 613–631. DOI: https://doi.org/10.1002/mana.201500385. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mana.201500385.

[10] Tosio Kato and Hiroshi Fujita. "On the nonstationary Navier-Stokes system". eng. In: *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 32 (1962), pp. 243–260. URL: http://eudml.org/doc/107082.

[11] Youngwoo Koh, Sanghyuk Lee, and Ryo Takada. "Strichartz estimates for the Euler equations in the rotational framework". English. In: *Journal of Differential Equations* 256.2 (2014), pp. 707–744. DOI: 10.1016/j.jde.2013.09.017.

[12] Sanghyuk Lee and Ryo Takada. "Dispersive estimates for the stably stratified boussinesq equations". English. In: *Indiana University Mathematics Journal* 66.6 (2017), pp. 2037–2070. ISSN: 0022-2518. DOI: 10.1512/iumj.2017.66.6179.

[13] Jean Leray. "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace". In: *Acta Mathematica* 63.none (1934), pp. 193–248. DOI: 10.1007/BF02547354. URL: https://doi.org/10.1007/BF02547354.

[14] Walter Littman. "Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 69.6 (1963), pp. 766–770.

[15] Xin Liu, Marita Thomas, and Edriss S. Titi. "Well-Posedness of Hibler's Dynamical Sea-Ice Model". In: *Journal of Nonlinear Science* 32.4 (May 2022). DOI: 10.1007/s00332-022-09803-y. URL: https://doi.org/10.1007%2Fs00332-022-09803-y.

[16] Joseph Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics (2nd edition)*. Springer-Verlag, 1987, 710 pages.

[17] E. M. Stein. "Some problems in harmonic analysis, Harmonic analysis in Euclidean spaces". In: *Am. Math. Soc.* (1978), pp. 3–20.

[18] Robert S. Strichartz. "Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations". In: *Duke Mathematical Journal* 44.3 (1977), pp. 705–714. DOI: 10.1215/S0012-7094-77-04430-1.

[19] Terence Tao. "Some Recent Progress on the Restriction Conjecture". In: (2004), pp. 217–243. DOI: 10.1007/978-0-8176-8172-2_10. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8172-2_10.

[20] Peter A. Tomas. "A restriction theorem for the Fourier transform". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 81.2 (1975), pp. 477–478. DOI: bams/1183536437. URL: https://doi.org/.