

Mesures SRB en dynamique hyperbolique

Alexandre Delplanque

I. Les systèmes dynamiques	1
II. La théorie ergodique	2
III. Dynamique hyperbolique	4
IV. Mesures SRB	7
V. L'entropie	8
VI. La méthode entropique	10
VII. Contrôler la distorsion	12
VIII. Un outil : la théorie de Yomdin	13
Références	15

I. Les systèmes dynamiques

Historiquement, la théorie des systèmes dynamiques cherchait à modéliser des systèmes physiques, généralement dans le but de comprendre et prévoir leur évolution.

Actuellement, cette description peut se faire à l'aide d'équations différentielles, dont le formalisme a été établi pendant le XVII^e siècle. De telles équations décrivent des systèmes évoluant en temps continu. Naturellement, la description en temps discret est également possible, par exemple en regardant le ciel toutes les nuits et en notant ce que l'on observe, à la manière des astronomes babyloniens durant le I^{er} millénaire avant notre ère [16].

Ici, c'est le temps discret qui va nous intéresser.

Formellement, on considère un ensemble X , l'espace des phases, et une application $f : X \rightarrow X$. On peut alors partir d'un point $x \in X$ et regarder son orbite : $x, f(x), f^2(x), \dots$

Émerge alors une question très générale :

Question. *Que peut-on dire des orbites ? (leur forme, leur répartition dans l'espace, ...)*

Des réponses partielles sont trouvées dès le XVIII^e siècle, et la théorie s'est grandement développée durant le XIX^e siècle. Mais la question semble, encore aujourd'hui, difficilement résoluble. Ainsi, les théories modernes s'intéressent plutôt à des variantes de cette question.

II. La théorie ergodique

L'une de ces variantes est la suivante :

Question. *Que peut-on dire des orbites du point de vue de la théorie de la mesure, lorsque le temps tend vers l'infini ?*

C'est la question traitée par la théorie ergodique. A l'origine néanmoins, la théorie s'intéressait à l'hypothèse ergodique, énoncée en 1871 par Boltzmann. Il était donc plutôt question de physique statistique et de thermodynamique.

D'autre part, les aspects mathématiques apparaissent dans les travaux fondateurs de Poincaré [17], à la fin du XIX^e siècle. Cependant, le formalisme actuel de la théorie ergodique ne naît qu'aux débuts du XX^e siècle, avec le développement de la théorie de la mesure.

On cite un premier théorème fondamental :

Théorème 2.1 (Théorème ergodique de Birkhoff, 1931, [5]). *Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace probabilisé (vérifiant $\mu(X) = 1$). Soit $f : X \rightarrow X$ une application mesurable. Si μ est une mesure invariante et ergodique pour f , alors pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi d\mu$$

pour μ -presque tout $x \in X$.

Avant d'expliquer ce qu'est une mesure invariante et ergodique, nous allons voir ce que signifie la conclusion du théorème. Aussi, dans tout le mémoire, on ne considérera que des mesures de probabilité.

L'idée est de regarder φ comme une grandeur physique qu'on observerait dans le système, par exemple sa température, la position d'une particule, sa vitesse...

Le membre de gauche correspond à la moyenne d'un grand nombre de mesures de l'observable φ . Ainsi, le théorème dit que cette moyenne temporelle, lorsque le nombre de mesures effectuées tend vers l'infini, est égale à la moyenne de la grandeur sur tout l'espace des phases. C'est donc analogue à la loi des grands nombres, qui peut d'ailleurs se montrer en utilisant le théorème ergodique.

Pour expliquer ce qu'est une mesure invariante, on rappelle ce qu'est une mesure image. On part d'une mesure μ sur un espace X , et on se donne $f : X \rightarrow Y$. On peut alors définir $f_*\mu$, la mesure image de μ par f . C'est une mesure sur Y , définie formellement par $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

Définition 2.2 (Mesure invariante). *Une mesure μ est dite invariante pour $f : X \rightarrow X$ si $f_*\mu = \mu$.*

On note qu'on a $f : X \rightarrow X$, et non $f : X \rightarrow Y$, mais on peut encore visualiser $f_*\mu$ en remarquant $x \xrightarrow{f} f(x)$, pour $x \in X$.

Une mesure ergodique pour f est une mesure sur X vérifiant une hypothèse d'irréductibilité pour la dynamique f : si l'espace peut se séparer en deux parties disjointes, chacune préservant la dynamique, alors l'une de ces parties est de μ -mesure nulle, et l'autre de μ -mesure totale.

Définition 2.3 (Mesure ergodique). *Une mesure μ sur X est dite ergodique pour $f : X \rightarrow X$ si tout ensemble $A \subset X$ vérifiant $f^{-1}(A) = A$ (on dira que A est f -invariant) vérifie $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$.*

On mentionne également que le théorème ergodique peut se comprendre d'une autre manière : sous ces conditions d'invariance et d'irréductibilité, les orbites se répartissent dans l'espace en copiant la répartition de la mesure μ . Ainsi, si une partie $B \subset X$ vérifie $\mu(B) = 0.2$, alors les points passeront 20% du temps dans cette partie. En effet, en notant δ_x la mesure de dirac en un point $x \in X$, on peut reformuler la convergence dans le théorème ergodique par :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$$

où la convergence est au sens de la topologie faible-*, c'est-à-dire la convergence étroite.

C'est un début de réponse à la question posée : si une mesure μ est invariante et ergodique, alors on connaît la répartition asymptotique de l'orbite de μ -presque tout point.

Mais cela soulève une nouvelle question : cette mesure μ nous intéresse-t-elle ?

En effet, on pourrait supposer que μ est un dirac en un point $x \in X$ vérifiant $f(x) = x$. Auquel cas, μ est ergodique, et on connaît parfaitement l'orbite de μ -presque tout point, mais on n'en fait pas grand chose.

De nouveau, on modifie légèrement la question de la théorie ergodique, et on énonce la motivation (toujours très générale) de la théorie ergodique différentiable :

Question. *Quelle est la dynamique de presque tout point, pour la mesure de Lebesgue ?*

Pour pouvoir bien définir la mesure de Lebesgue, on se place dans le cadre de la dynamique différentiable :

X est une variété différentiable compacte, et $f : X \rightarrow X$ est au moins C^1 .

Une première question se pose alors : pour quels systèmes dynamiques la mesure de Lebesgue est-elle ergodique ? Donnons quelques exemples.

Théorème 2.4 (Proposition 4.4.1 de [7]). *Si $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est une rotation d'angle irrationnel, alors Leb est ergodique pour f .*

Ce résultat peut s'énoncer sous une autre forme, possiblement plus courante :

Théorème 2.5 (Weyl, Sierpiński, Bohl, 1909-1910, [24]). *Soit α un irrationnel. Alors la suite $(n\alpha \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie sur $[0; 1]$.*

C'est là une entrevue du lien entre la théorie ergodique et la théorie des nombres. Ce domaine, grandement influencé par les travaux de Furstenberg de la seconde moitié du XX^e siècle, permet d'obtenir des résultats bien plus sophistiqués : Théorème de Hales-Jewett, Théorème de Sárközy, Théorème de Szemerédi, Théorème de Green-Tao, ...

On mentionne un second cas où la mesure de Lebesgue est ergodique, et qui permettra d'introduire la partie suivante.

Théorème 2.6 (Anosov, 1967, [3]). *Soit $f : M \rightarrow M$ un C^2 -difféomorphisme Anosov sur M une variété riemannienne lisse et compacte. Si la mesure de Lebesgue est f -invariante, alors elle est ergodique.*

Un difféomorphisme Anosov étant un exemple de système dynamique hyperbolique, la partie suivante permettra d'expliquer cet énoncé.

III. Dynamique hyperbolique

Le cadre de la dynamique hyperbolique est le suivant : on fixe M une variété riemannienne lisse et compacte, et $f : M \rightarrow M$ une application C^1 .

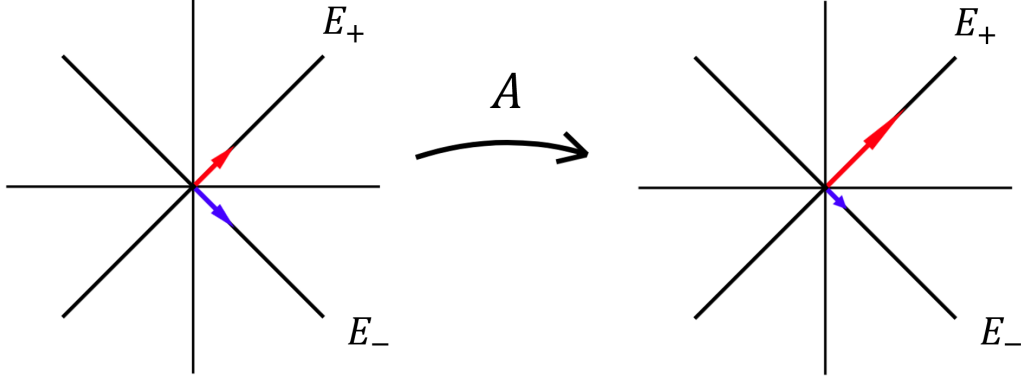
Un premier exemple de système hyperbolique est le "chat d'Arnold", remontant à 1967 [4].

Il concerne le cas où $M = \mathbb{T}^2$ et où f est l'automorphisme linéaire du tore f_A induit par la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres, λ et μ , vérifiant $0 < \lambda < 1 < \mu$. Notons E_- et E_+ les sous-espaces propres respectivement associés.

Ainsi, les vecteurs de E_+ sont dilatés par l'action de A , et ceux de E_- sont contractés :



Essayons de comprendre la dynamique de f_A . La première remarque est que E_+ et E_- sont orthogonaux et forment un angle irrationnel avec les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 . Ainsi, en notant $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la projection canonique, l'ensemble $\pi(E_+)$ est dense dans \mathbb{T}^2 (et $\pi(E_-)$ aussi). A partir de cette remarque, et en manipulant attentivement E_+ et E_- , on peut montrer

- Proposition 3.1.** *i) Pour tout $x \in \pi(E_+)$, l'orbite de x par f_A est dense dans \mathbb{T}^2 .
ii) L'ensemble des points périodiques pour f_A est dense dans \mathbb{T}^2 .*

La dynamique de f_A présente donc des phénomènes assez complexes tout en étant très simple à définir. À l'origine de cette complexité, on trouve la notion d'hyperbolicité :

Définition 3.2 (Système dynamique hyperbolique, [7]). *C'est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $f : M \rightarrow M$ tel qu'en chaque point x d'un compact f -invariant $K \subset M$, la différentielle $d_x f$ dilate les vecteurs dans un sous-espace E_x^u et contracte ceux dans un sous-espace E_x^s . On demande également*

$$T_x M = E_x^s \oplus E_x^u \quad \text{et} \quad d_x f (E_x^{s/u}) = E_{f(x)}^{s/u}$$

Plus précisément, on demande des constantes $C > 0$ et $\lambda \in]0; 1[$ telles que, pour tout $x \in K$, on ait

- i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in E_x^s, \|d_x (f^n)(v)\| \leq C \times \lambda^n \times \|v\|$
- ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in E_x^u, \|d_x (f^{-n})(v)\| \leq C \times \lambda^n \times \|v\|$

On demande également la mesurabilité des applications $x \mapsto E_x^s$ et $x \mapsto E_x^u$.

La notation E_x^u plutôt que E_+ s'explique car E^u est appelé l'espace instable ("unstable" en anglais), de même pour E_x^s : l'espace stable.

Définition 3.3 (Difféomorphisme Anosov, [7]). *Un système dynamique hyperbolique $f : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme Anosov lorsque f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et lorsque $K = M$.*

Le chat d'Arnold est donc un difféomorphisme Anosov. En utilisant le Théorème 2.4, on a en particulier :

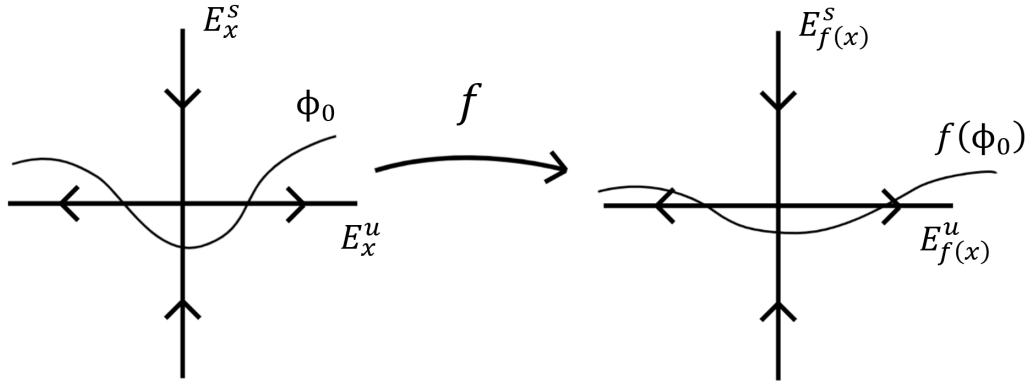
Corollaire 3.4. *La mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^2 est ergodique pour f_A .*

Pour terminer cette partie, nous allons voir la notion de variété stable (et instable).

Le but est de prendre un point $x \in K$ et de construire une sous-variété $W^u(x)$, passant par x , dilatée par f et envoyée sur $W^u(f(x))$. C'est-à-dire qu'elle n'affiche pas l'aspect contractant de la dynamique, mais uniquement l'aspect dilatant.

L'idée est de regarder le graphe d'une application $\Phi_0 : E_x^u \rightarrow E_x^s$ et de lui appliquer f (ou plutôt, de lui appliquer $\exp_x^{-1} \circ f \circ \exp_x$).

La direction E_x^u est dilatée, et la direction E_x^s contractée, on va donc obtenir quelque chose comme ça :



On peut en fait montrer que, lorsque Φ_0 est 1-lipschitzienne, alors $f(\Phi_0)$ est encore le graphe d'une fonction 1-lipschitzienne, qu'on notera $\Phi_1 : E_{f(x)}^u \rightarrow E_{f(x)}^s$. L'idée est alors d'itérer f , pour obtenir Φ_2 , puis Φ_3, Φ_4, \dots et de montrer la convergence vers un Φ_∞ .

Formellement, on pose plutôt

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \{\Phi : E_x^u \rightarrow E_x^s \mid \Phi \text{ 1-lipschitzienne}\} \rightarrow \{\Phi : E_{f(x)}^u \rightarrow E_{f(x)}^s \mid \Phi \text{ 1-lipschitzienne}\} \\ \Phi_0 \mapsto \Phi_1 = f(\Phi_0) \end{cases}$$

En utilisant l'hyperbolicité, on peut montrer que \mathcal{F} est contractante (pour la norme de la convergence uniforme). Pour conclure à l'existence d'un point fixe, il faudrait que l'espace de départ et d'arrivée soient les mêmes. Pour résoudre ce problème technique, on identifie le tangent à \mathbb{R}^n , ce qui permet de confondre $T_x M$ et $T_{f(x)} M$. Ainsi, l'application \mathcal{F} admet un point fixe $\Phi_\infty : E_x^u \rightarrow E_x^s$.

Finalement, en prenant l'exponentielle du graphe de Φ_∞ , on obtient un $W^u(x)$ qui convient.

Cette construction très classique en dynamique hyperbolique est connue sous le nom de "transformée de graphes". Elle permet, entre autres, de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.5 (Théorème de la variété stable [7]). *Soit $f : M \rightarrow M$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme hyperbolique avec K associé. Pour tout $x \in K$, il existe $W^u(x)$ une sous-variété de M telle que :*

i) $T_x W^u(x) = E_x^u$ et $W^u(f(x)) \subset f(W^u(x))$

ii) Il existe $C > 0$ tel que pour $y \in W^u(x)$ et $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C \times \lambda^n \times d(x, y)$$

On appelle $W^u(x)$ la variété instable locale de x . Et en appliquant ce théorème à f^{-1} , on obtient $W^s(x)$, la variété stable locale de x .

IV. Mesures SRB

Rappelons l'objectif de la théorie ergodique différentiable : comprendre la dynamique de presque tout point pour la mesure de Lebesgue. On avait également soulevé un problème : étant donnée une mesure ergodique, on n'a pas de garantie qu'elle soit intéressante du point de vue de la mesure de Lebesgue.

C'est l'intérêt des mesures SRB : elles possèdent de bonnes propriétés vis-à-vis de la théorie ergodique et de la mesure de Lebesgue [26].

Fixons de nouveau M une variété riemannienne lisse et compacte, et $f : M \rightarrow M$ de classe au moins \mathcal{C}^1 . Une première étape est de savoir à quoi ressemble la mesure

$$\mu_n^x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k x}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. On avait vu, dans la partie II, que l'existence d'une mesure invariante et ergodique μ conduit à

$$\mu_n^x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$$

pour μ -presque tout x .

Définition 4.1 (Bassin d'une mesure). *Si μ est une mesure f -invariante sur M , le bassin de μ désigne l'ensemble*

$$\mathcal{B}(\mu) = \{x \in M \mid \mu_n^x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu\}$$

Ainsi, si μ est ergodique, alors $\mu(\mathcal{B}(\mu)) = 1$. Mais cela ne dit rien de $Leb(\mathcal{B}(\mu))$, alors que c'est ce qui nous intéresse. Cette remarque motive la définition suivante :

Définition 4.2 (Mesure physique [26]). *Une mesure f -invariante μ est dite physique lorsqu'elle vérifie*

$$Leb(\mathcal{B}(\mu)) > 0$$

Une mesure SRB est, d'une certaine manière, une mesure physique mettant en avant l'hyperbolicité d'un système (même lorsque le système n'est pas hyperbolique au sens de la Définition 3.2). Pour mettre en avant une forme d'hyperbolicité, on suppose l'existence de variétés instables presque partout.

Définition 4.3 (Mesure SRB : Sinaï, Ruelle, Bowen [26]). *Une mesure f -invariante μ est dite SRB lorsque les mesures conditionnelles qu'elle induit sur les variétés instables sont absolument continues par rapport aux mesures de Lebesgue de ces variétés.*

Comme annoncé, on a ce résultat :

Théorème 4.4 (Théorème 3 de [26]). *Soit $f : M \rightarrow M$ un \mathcal{C}^2 -difféomorphisme hyperbolique avec K associé. Si μ est une mesure SRB et ergodique avec $\mu(K) = 1$, alors μ est physique.*

De nouvelles questions arrivent alors :

Question. *A-t-on existence, unicité des mesures SRB ? Peut-on facilement en construire ? Quelle partie de l'espace est dans le bassin d'une mesure SRB ?*

Le premier exemple de réponse, qui a d'ailleurs conduit à la notion de mesure SRB, est celui des difféomorphismes Axiome A, introduits par Smale en 1967 [23]. C'est une classe de systèmes hyperboliques, considérablement étudiée depuis 1967, notamment par Sinai, Ruelle et Bowen ([21], [20], [18], [6]) :

Théorème 4.5 (SRB, 1970's). *Soit $f : M \rightarrow M$ un C^2 -difféomorphisme Axiome A avec Λ un attracteur irréductible. Alors il existe une unique mesure SRB à support dans Λ . De plus, cette mesure est ergodique et son bassin est de mesure de Lebesgue totale.*

Pour construire une mesure SRB, l'idée standard est "l'approche géométrique" : on "pousse" la mesure de Lebesgue le long des variétés instables :

Théorème 4.6 (Partie 3.1 de [26]). *Si $f : M \rightarrow M$ est un système hyperbolique, et si f est C^2 , alors toute valeur d'adhérence de la suite suivante est SRB :*

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^k)_* \text{Leb}_{W^u(x)} \right)_n$$

La première méthode pour montrer ce théorème consiste à utiliser des arguments de transformée de graphes. Pour présenter la seconde méthode, qu'on appellera la "méthode entropique", on commence par introduire la notion d'entropie.

V. L'entropie

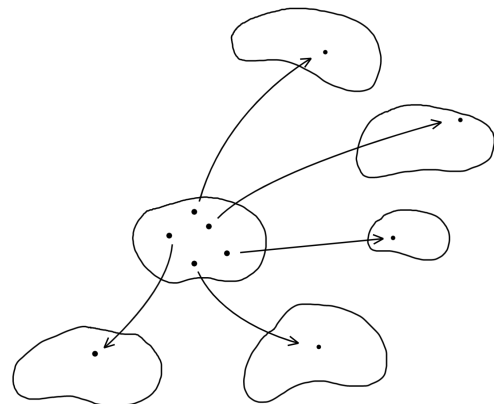
L'entropie est une quantité intervenant dans de nombreux domaines. En systèmes dynamiques, on la rencontre sous deux formes possibles (pour les définitions, voir [7]) :

- l'entropie topologique (Adler, Konheim, McAndrew, 1965, [1])
- l'entropie métrique (Kolmogorov, 1958, [11] ; Sinai, 1959, [22])

La première quantifie l'imprévisibilité du système dynamique : à quel point les points partant d'un même voisinage peuvent aller dans des endroits différents.

Exemple 5.1. *Supposons un système à l'allure suivante :*

Dans un petit voisinage, les points partent dans 5 directions différentes. Si c'est ça sur tout l'espace, l'entropie vaudra $\log 5$.



Exemple 5.1

L'aspect "topologique" de l'entropie topologique vient du fait que l'on considère deux points comme étant proches s'ils sont dans un même ouvert d'une partition d'ouverts fixée au préalable.

Exemple 5.2 (Le décalage). *On définit un système dynamique sur $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$:*

$$\sigma : \begin{cases} \{0; 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0; 1\}^{\mathbb{N}} \\ (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots) \end{cases}$$

En voyant $\{0; 1\}$ comme un alphabet à deux lettres, et $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$ comme l'ensemble des mots infinis, on peut montrer que l'entropie du décalage est le log du nombre de lettres de l'alphabet, donc ici :

$$h_{top}(\sigma) = \log 2$$

Cela correspond à l'intuition "d'imprévisibilité", illustrée par l'Exemple 5.1.

L'entropie métrique, quant à elle, est liée à la théorie de la mesure. Ainsi, si μ est une mesure f -invariante, alors l'entropie de f pour la mesure μ , notée $h_{\mu}(f)$, quantifie aussi l'imprévisibilité du système, mais seulement celle visible par la mesure μ .

Exemple 5.3. *On reprend le décalage, et on attribue un poids à chaque lettre. Dit autrement, chaque élément de l'espace des phases est la réalisation d'une infinité de pile ou face. Disons que p désigne la probabilité de pile, et q celle de face. Alors $\mu = (p\delta_0 + q\delta_1)^{\otimes \mathbb{N}}$, et on peut montrer*

$$h_{\mu}(f) = (-p \log p) + (-q \log q)$$

Précisons que ces deux notions sont en lien très étroit :

Théorème 5.4 (Principe variationnel, 1970, [7]). *Soit $f : X \rightarrow X$ continue, avec X un espace métrique compact. Alors*

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \text{ } f\text{-invariante}} h_{\mu}(f)$$

Cet énoncé donne lieu à une nouvelle question :

Question. *Cette borne supérieure est-elle atteinte ?*

Par des constructions topologiques assez directes, on sait que ce n'est pas toujours le cas. Par des arguments plus sophistiqués, on peut aussi montrer :

Théorème 5.5 (Misiurewicz, 1973, [13]). *Pour tout $r \in [1; +\infty[$, il existe un C^r -difféomorphisme n'admettant aucune mesure d'entropie maximale.*

Pour répondre plus en détail à la question, on peut changer de point de vue sur l'entropie en étudiant plutôt l'application

$$h : \begin{cases} \{\mu \text{ mesure } f\text{-invariante}\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mu \mapsto h_{\mu}(f) \end{cases}$$

Ainsi, si cette application est semi-continue supérieurement, alors elle atteint sa borne supérieure.

En adoptant ce point de vue, la théorie de Yomdin, développée en 1987 [25], traite le cas C^∞ :

Théorème 5.6 (Newhouse, 1989, [14]). *Si $f : M \rightarrow M$ est de classe C^∞ avec M une variété riemannienne lisse et compacte, alors f admet une mesure d'entropie maximale.*

Cette théorie permet également de quantifier le défaut de semi-continuité supérieure de l'application $\mu \mapsto h_\mu(f)$. En notant $h^*(f)$ ce défaut, on peut montrer :

Théorème 5.7 (Newhouse, 1989, [14]). *Si $f : M \rightarrow M$ est de classe C^r , avec M une variété riemannienne lisse et compacte, et $r \in [1; +\infty]$, alors*

$$h^*(f) \leq \frac{\dim M}{r} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|d(f^n)\|_\infty$$

Le but de mon mémoire de master a été de comprendre la preuve de ce résultat pour améliorer cette majoration lorsque le système est hyperbolique. En dimension 2, on peut alors montrer :

Théorème 5.8. *Soit $f : M \rightarrow M$ un C^r -difféomorphisme sur une surface lisse compacte, avec $r > 1$. Alors pour toute mesure f -invariante μ , on a*

$$u_1(\mu) \leq \frac{1}{r} \times \chi_+(\mu)$$

où $\chi_+(\mu)$ est la partie positive de $\chi(\mu) = \int_M \chi(x) d\mu(x)$ avec $\chi(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|d_x(f^n)\|$, et $u_1(\mu)$ est une version "théorie de la mesure" de $h^*(f)$.

Cependant, une question subsiste :

Question. *A quel point peut-on améliorer la majoration de $h^*(f)$?*

VI. La méthode entropique

Rappelons que dans cette partie, on présente la seconde approche pour obtenir des mesures SRB. L'idée clé est que l'entropie est fortement liée à la géométrie du système dynamique. Pour exprimer cela, nous introduisons d'abord la notion d'exposant de Lyapunov, un outil central en dynamique hyperbolique.

Dans le cas hyperbolique, on a une direction contractante E_x^s et une direction dilatante E_x^u . En gros, chaque vecteur de E_x^s est multiplié par un facteur strictement inférieur à 1, et ceux de E_x^u par un facteur strictement supérieur à 1. Cependant, ces facteurs ne sont pas les mêmes sur l'espace E_x^s entier, ni sur E_x^u , et ces facteurs peuvent également dépendre de x .

On définit alors, pour $v \in T_x M$, la quantité

$$\chi(x, v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|d_x (f^n)(v)\|$$

Cette limite existe pour μ -presque tout x , pour n'importe quelle mesure f -invariante μ (c'est le théorème d'Oseledets, 1968, [15]). Auquel cas, elle désigne le taux de croissance exponentiel créé par f dans la direction v . Par des arguments d'algèbre linéaire, l'application $\chi(x, \cdot)$ prend un nombre fini de valeurs :

$$\chi_1(x) < \chi_2(x) < \dots < \chi_{k(x)}(x)$$

On a également un drapeau

$$V_1(x) \subsetneq V_2(x) \subsetneq \dots \subsetneq V_{k(x)}(x)$$

tel que

$$\forall i, \forall v \in V_i(x) \setminus V_{i-1}(x), \chi(x, v) = \chi_i(x)$$

Définition 6.1 (Exposants de Lyapunov, [19]). *Les exposants de Lyapunov au point x sont les $\chi_i(x)$. La multiplicité de l'exposant $\chi_i(x)$ est le nombre entier*

$$k_i(x) := \dim V_i(x) - \dim V_{i-1}(x)$$

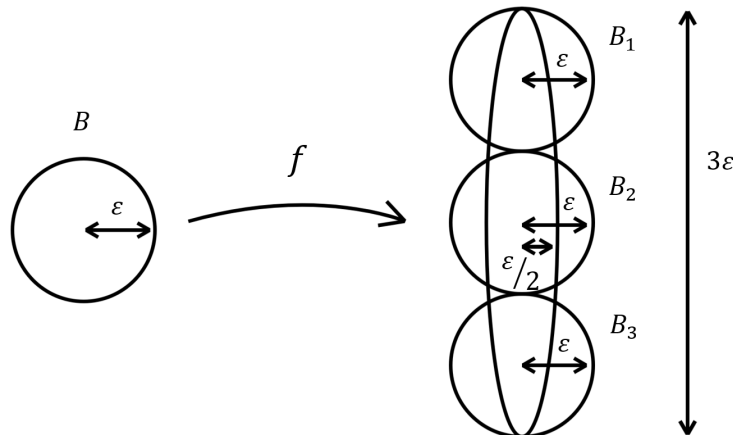
On note également que le cas hyperbolique se traduit par l'existence d'exposants positifs et négatifs, et d'aucun exposant nul.

Un avantage de cette notion est qu'elle reflète assez fidèlement des aspects géométriques du système dynamique, qu'on peut entrevoir dans le théorème suivant :

Théorème 6.2 (Inégalité de Ruelle, 1978, [19]). *Soient M une variété riemannienne lisse et compacte, et $f : M \rightarrow M$ de classe \mathcal{C}^1 . Si μ est une mesure f -invariante, alors*

$$h_\mu(f) \leq \int_M \sum_{i \text{ t.q. } \chi_i(x) > 0} \chi_i(x) k_i(x) d\mu(x)$$

En effet, on peut retrouver une idée similaire à celle des exemples sur l'entropie topologique : le nombre de directions où on peut aller est donné par les exposants de Lyapunov.



La situation précédente, par exemple, pourrait donner des exposants

$$\chi_1(x) = \log \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \chi_2(x) = \log 3$$

Et en comptant, on aurait bien "trois directions possibles" si on part de B .

Néanmoins l'égalité n'est pas toujours atteinte, et ce pour beaucoup de raisons possibles. Cependant, on connaît les cas d'égalité. C'est le résultat de la théorie de Ledrappier-Young :

Théorème 6.3 (Ledrappier-Young, 1985, [12]). *Soient M une variété riemannienne lisse et compacte, et $f : M \rightarrow M$ un C^2 -difféomorphisme. Si μ est une mesure f -invariante telle que μ -presque tout point admette un exposant strictement positif, alors*

$$\mu \text{ SRB} \Leftrightarrow \mu \text{ vérifie l'égalité dans l'inégalité de Ruelle}$$

Ce résultat est à la base de la méthode entropique : on montre le Théorème 4.6 sans utiliser d'arguments de transformée de graphes, mais uniquement en montrant qu'on a l'égalité dans l'inégalité de Ruelle.

VII. Contrôler la distorsion

Pour construire des mesures SRB, un ingrédient est essentiel : un contrôle de la distorsion. Cela n'a pas encore été évoqué, donc expliquons ce que cela signifie.

La distorsion de $f : M \rightarrow M$ est le quotient suivant :

$$\frac{|\det((d_x f)|_{E_x})|}{|\det((d_y f)|_{E_y})|}$$

avec $x, y \in M$ et $E_x \subset T_x M$, $E_y \subset T_y M$ invariants par f (i.e. d_x (resp. y) $f(E_x$ (resp. y)) = $E_{f(x)}$ (resp. $f(y)$)).

Pour expliquer l'importance du contrôle de cette distorsion, notons

$$\nu_n^x := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^k)_* \text{Leb}_{D(x)}$$

où $D(x) \subset M$ est un disque passant par x et tangent à E_x en x .

Quand on parle de contrôler la distorsion, cela signifie majorer la distorsion de f^n uniformément en n . Auquel cas, en effectuant un changement de variable, on pourra comparer ν_n^x et $\text{Leb}_{D(x)}$, et ainsi borner la densité de ν_n^x par rapport à $\text{Leb}_{D(x)}$. Reste à montrer qu'on peut passer à la limite, et ainsi obtenir une mesure ν_x absolument continue par rapport à $\text{Leb}_{D(x)}$.

Pour obtenir une mesure SRB, il reste à choisir une direction E_x dilatée par $d_x f$, pour avoir des exposants de Lyapunov positifs.

Une question importante est donc :

Question. *Comment obtenir une inégalité de distorsion ?*

L'approche standard est de demander une forme d'hyperbolicité, la plus faible possible, de prendre $D(x)$ égale à la variété instable de x , et d'utiliser une sorte d'argument de transformée de graphes.

En effet, il existe de nombreuses déclinaisons de la Définition 3.2, correspondant au cas "uniformément hyperbolique" : cas non uniformément hyperbolique, partiellement hyperbolique, décomposition dominée, décomposition dominée et uniformément dilatant, ...

On peut alors chercher à adapter les méthodes du cadre uniformément hyperbolique à ces autres cadres. Le résultat suivant est dans cette idée :

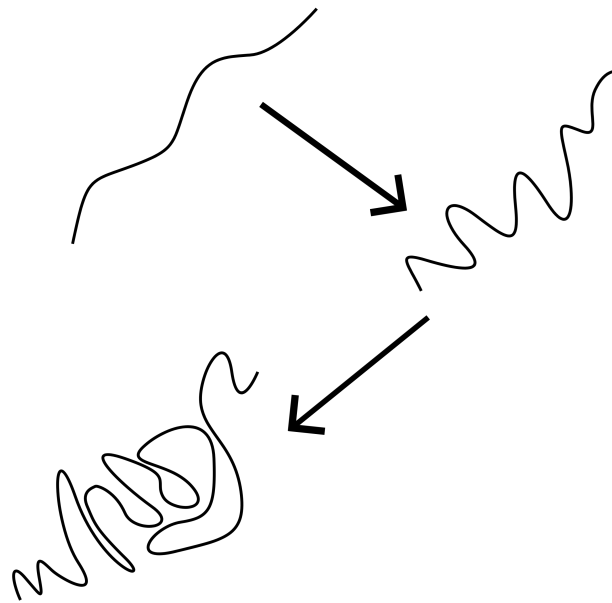
Théorème 7.1 (Alves, Bonatti, Viana, 2000, [2]). *Soit $f : M \rightarrow M$ un C^2 -difféomorphisme admettant une décomposition dominée $TM = E^s \oplus E^u$ sur un compact K tel que $f(K) \subset K$. Supposons :*

- i) f est uniformément contractant dans la direction E^s sur K*
- ii) f est non-uniformément dilatant dans la direction E^u sur un ensemble $H \subset K$.*

Alors Lebesgue-presque tout point de H est dans le bassin d'une mesure SRB ergodique.

VIII. Un outil : la théorie de Yomdin

Présentons l'idée de la théorie de Yomdin. L'observation de départ est la suivante : étant donnée une sous-variété, il est possible qu'elle devienne de plus en plus tordue lorsque l'on itère le système dynamique :



La théorie de Yomdin cherche à pallier cette déformation en recouvrant la sous-variété par des ensembles où la dynamique est simple. Cela signifie que de tels ensembles ne sont pas beaucoup déformés par la dynamique. Ainsi, la quantité de déformation créée par un système dynamique peut se contrôler en estimant le nombre de ces ensembles à la dynamique simple. L'instrument pour obtenir cette estimation est un lemme de géométrie semi-algébrique dû à Yomdin et Gromov [10], dont on déduit l'énoncé suivant :

Lemme 8.1 (Yomdin, 1987, [25]). *Soit $g : [0; 1]^\ell \xrightarrow{C^r} \mathbb{R}^d$ avec $r \geq 1$ réel et $d, \ell \in \mathbb{N}^*$ tels que $\ell \leq d$. Alors il existe $\phi_1, \dots, \phi_N : [0; 1]^\ell \rightarrow [0; 1]^\ell$ analytiques sur $]0; 1[^\ell$ tels que*

- i) $\{x \in [0; 1]^\ell \mid g(x) \in [0; 1]^d\} \subset \bigcup_{i=1}^N \phi_i([0; 1]^\ell)$
- ii) $\|\phi_i\|_r, \|g \circ \phi_i\|_r \leq 1$
- iii) $N \leq C(r, d, \ell) \times \max(\|d^r g\|_\infty^{\ell/r}, 1)$

En itérant cet énoncé, on obtient un contrôle sur les itérées du système dynamique, dont on peut déduire des estimations en faisant tendre le nombre d'itérées vers l'infini.

Comme mentionné dans la partie V, la théorie de Yomdin a permis d'obtenir des majorations du défaut de semi-continuité supérieure de l'entropie métrique.

Mais la théorie de Yomdin est également utile pour contrôler la distorsion, expliquons comment.

A première vue, on pourrait penser que pour contrôler la distorsion, il suffirait d'avoir une dilatation dans la direction de $D(x)$ strictement plus forte que dans toutes les autres directions. Sur le dessin, cela signifierait qu'on contrôlerait la distorsion aux endroits peu courbés par la dynamique.

Cependant, en utilisant la théorie de Yomdin, on peut montrer ceci : lorsque la dynamique est moins régulière, il se peut qu'une partie de la dilatation ne soit pas traduite en distorsion. Ainsi, sur $D(x)$, on ne pourra contrôler la distorsion qu'aux endroits où la dynamique dilate suffisamment.

La théorie de Yomdin permet également de montrer que le taux de dilatation suffisant pour contrôler la distorsion est majoré par la quantité $R(f)/r$, avec $R(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|d(f^n)\|_\infty$ et f de classe C^r .

Lorsque $r > 1$, on peut alors trouver un $D(x)$ avec suffisamment de tels endroits. Une adaptation de la méthode géométrique permet alors d'obtenir une mesure SRB.

Avec ce raisonnement, Burguet a démontré dans [8] :

Théorème 8.2 (Burguet, 2022, [8]). *Soit $f : M \rightarrow M$ un C^r -difféomorphisme avec $r > 1$ et M une variété riemannienne lisse et compacte. Supposons que M soit une surface.*

Pour $x \in M$, notons $\chi(x)$ le plus grand exposant en x . Pour μ une mesure, notons $\chi(\mu) := \int_M \chi(x) d\mu(x)$.

Alors il existe un nombre au plus dénombrable de mesures SRB ergodiques $(\mu_i)_{i \in I}$ telles qu'en posant $\Lambda := \{\chi(\mu_i) \mid i \in I\}$, on ait :

- i) $\{x \in M \mid \chi(x) > R(f)/r\} = \{x \in M \mid \chi(x) \in \Lambda\}$, *Leb-presque sûrement*
- ii) *Pour $\lambda \in \Lambda$, on a Leb-presque sûrement $\{x \in M \mid \chi(x) = \lambda\} \subset \bigcup_{i \in I \text{ t.q. } \chi(\mu_i) = \lambda} \mathcal{B}(\mu_i)$*

Ce résultat ayant comme corollaire le résultat suivant :

Corollaire 8.3 (Buzzi, Crovisier, Saring, 2022, [9]). *Soit $f : M \rightarrow M$ un C^∞ -difféomorphisme de surface. Si $\text{Leb}(\chi > 0) > 0$, alors il existe une mesure SRB ergodique.*

Une question encore à traiter est alors la suivante :

Question. *Peut-on trouver des méthodes conduisant à un contrôle de la distorsion pour des dynamiques en dimension quelconque ? (pas seulement pour des difféomorphismes en dimension 2)*

Références

- [1] ADLER, R. L., KONHEIM, A. G. et MCANDREW, M. H. « Topological Entropy ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 114.2 (1965), p. 309-319.
- [2] ALVES, José F., BONATTI, Christian et VIANA, Marcelo. « SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding ». In : *Inventiones mathematicae* 140 (2000), p. 351-398.
- [3] ANOSOV, D. V. « Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature ». In : *Proc. Steklov Inst. Math.* 90 (1967), p. 1-235.
- [4] ARNOLD, V.I. et AVEZ, A. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Gauthier-Villars, 1967.
- [5] BIRKHOFF, George D. « Proof of the Ergodic Theorem ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 17.12 (1931), p. 656-660.
- [6] BOWEN, R. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Springer Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1975.
- [7] BRIN, Michael et STUCK, Garrett. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] BURGUET, David. « SRB measure for smooth surface diffeomorphisms ». In : *arxiv :2111.06651* (2022).
- [9] BUZZI, Jérôme, CROVISIER, Sylvain et SARIG, Omri. *Another proof of Burguets existence theorem for SRB measures of smooth surface diffeomorphisms*. 2022.
- [10] GROMOV, M. « Entropy, homology and semialgebraic geometry ». en. In : *Séminaire Bourbaki : volume 1985/86, exposés 651-668*. Astérisque 145-146. exposé :663. Société mathématique de France, 1987.
- [11] KOLMOGOROV, A. N. « A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces ». In : *Doklady of Russian Academy of Sciences* 119.5 (1958), p. 861-864.
- [12] LEDRAPPIER, F. et YOUNG, L.-S. « The Metric Entropy of Diffeomorphisms ». In : *Annals of Mathematics* 122 (1985), p. 509-574.

- [13] MISIUREWICZ, M. « Diffeomorphism without any measure with maximal entropy ». English. In : *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.* 21 (1973), p. 903-910.
- [14] NEWHOUSE, Sheldon E. « Continuity properties of entropy ». In : *Annals of Mathematics* 129 (1989), p. 215-235.
- [15] OSELEDETS, V. I. « A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems ». In : *Trans. Moscow Math. Soc. Trudy Moskov. Math. Obsc.* 19 (1968), p. 197-231.
- [16] OSSENDRIJVER, Mathieu. « Translating Babylonian Astronomical Diaries and Procedure Texts ». In : *Translating Writings of Early Scholars in the Ancient Near East, Egypt, Greece and Rome* (jan. 2016), p. 125-172.
- [17] POINCARÉ, H. *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Mémoire couronné du prix de S.M. le Roi Oscar II, 1889.
- [18] RUELLE, David. « A Measure Associated with Axiom-A Attractors ». In : *American Journal of Mathematics* 98.3 (1976), p. 619-654.
- [19] RUELLE, David. « An inequality for the entropy of differentiable maps ». In : *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 9 (1978), p. 83-87.
- [20] RUELLE, David. *Thermodynamic Formalism*. Addison-Wesley, 1978.
- [21] SINAI, Yakov G. « Gibbs measures in ergodic theory ». In : *Russian Mathematical Surveys* 27 (1972), p. 21-69.
- [22] SINAI, Yakov G. « On the concept of entropy for a dynamic system ». In : *Doklady Akademii Nauk SSSR* 124 (1959), p. 768-771.
- [23] SMALE, Stephen. « Differentiable dynamical systems ». In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 73 (1967), p. 747-817.
- [24] WEYL, Hermann Von. « Über die gibbs'sche erscheinung und verwandte konvergenzphänomene ». In : *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)* 30 (1910), p. 377-407.
- [25] YOMDIN, Yosef. « Volume growth and entropy ». In : *Israel Journal of Mathematics* 57 (1987), p. 285-300.
- [26] YOUNG, Lai-Sang. « What Are SRB Measures, and Which Dynamical Systems Have Them ? » In : *Journal of Statistical Physics* 108.5 (sept. 2002), p. 733-754.