

Introduction au domain de recherche  
**Ergodicité quantique, entropie des mesures  
semiclassiques et demi-délocalisation**

Vincent Ferrari-Dominguez  
sous la supervision de Nalini Anantharaman

9 octobre 2023

Ce mémoire est une tentative d'introduction à l'ergodicité quantique, c'est-à-dire l'étude de l'impact du chaos d'un système hamiltonien sur le système quantique associé. La première partie consistera naturellement en une description de la mécanique hamiltonienne, de la mécanique quantique et du problème de quantification consistant à passer de l'un vers l'autre. Nous discuterons ensuite des mesures semiclassiques, de leur entropie et finalement du phénomène de demi-délocalisation.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>De la mécanique hamiltonienne à la mécanique quantique</b>	<b>2</b>
1.1	Mécanique hamiltonienne . . . . .	2
1.2	Mécanique quantique . . . . .	4
1.3	Quantification de Weyl . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Ergodicité quantique</b>	<b>9</b>
2.1	Mesures semiclassiques et théorème d'ergodicité quantique . . . . .	10
2.2	Conjecture d'unique ergodicité quantique . . . . .	11
2.3	Entropie des mesures semiclassiques et demi-délocalisation . . . . .	12

## Quelques notations

Dans tout ce mémoire,  $h$  est un réel strictement positif et  $n$  est un entier qui désigne la dimension de l'espace ambiant.

*Notation.* Nous notons  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions de Schwartz sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des distributions tempérées, défini comme le dual topologique de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pour  $M$  une variété, nous notons  $\mathcal{C}^\infty(M)$  l'ensemble des fonction régulières sur celle-ci et  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$  l'ensemble de celles dont le support est de plus compact. Pour  $H$  un espace de Hilbert, nous notons  $\mathcal{B}(H)$  l'ensemble des opérateurs bornés de  $H$ .

Nous définissons la transformée de Fourier rescalée par la formule suivante pour une fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}_h(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h}\langle x, \xi \rangle} f(x) dx \tag{1}$$

Nous notons pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-indice

$$D_x^\alpha = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_x^\alpha = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \prod_{i=1}^n \partial_{x_i}^{\alpha_i}$$

*Notation.* Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , nous définissons le crochet japonais de  $x$  par

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$$

## 1 De la mécanique hamiltonienne à la mécanique quantique

Qu'il soit question de mécanique classique ou quantique, l'objectif est de décrire l'évolution dans le temps d'un système physique, soit un peu près tout et n'importe quoi : une balle de baseball, un électron, la Lune, un atome dans une molécule ou encore un double pendule sur le toit d'un TGV. Le premier choix de toute modélisation physique est donc l'ensemble, noté  $\mathcal{X}$ , des états possibles du système physique étudié. Ce dernier porte le nom d'*espace des phases* en mécanique classique et nous utiliserons également ce terme en mécanique quantique. Le choix de l'espace des phases est un choix de modélisation important, car il est sous-entendu que la connaissance d'un point dans l'espace des phases permet de décrire complètement le système étudié. Par exemple, pour décrire le mouvement de la Lune en mécanique classique, nous ne considérons pas simplement sa position dans l'espace (littéralement) mais également sa vitesse. D'un côté, nous considérons que deux Lunes ayant la même position mais pas la même vitesse, constituent deux états différents du système physique 'Lune'. De l'autre, nous prétendons que seul la vitesse et la position de la lune comptent pour déterminer son état physique.

Nous cherchons à étudier l'évolution d'un point dans cet espace au cours du temps. Il faut pour cela se munir d'une *loi d'évolution* régissant l'évolution temporelle de notre système. Elle prend presque toujours la forme d'une équation aux dérivées partielles sur l'espace des phases : principe fondamental de la dynamique de Newton, équations de Navier-Stokes, équations de Maxwell ou encore de Schrödinger. Elle contient généralement des paramètres, constantes physiques ou potentiels par exemple, qui permettent de l'adapter au système modélisé.

Finalement, nous devons pouvoir interpréter notre modèle pour le comparer à la réalité. L'objectif est de trouver un moyen d'extraire du modèle mathématique des quantités physiques mesurables (la position, la vitesse, le moment cinétique, le spin, la présence ou non de la particule dans une partie de l'espace, ...). Nous utilisons ici le vocabulaire de la mécanique quantique et désignerons par *observable* ces quantités physiques. Il s'agit donc de construire pour chaque quantité physique une fonction sur l'espace des phases, qui nous donne la quantité physique désirée lorsque nous l'évaluons sur l'état du système. De fait, nous identifions dans la suite la fonction et la quantité physique.

En résumer, pour modéliser un système physique, il faut

1. choisir l'espace des phases  $\mathcal{X}$  dans lequel il évolue,
2. choisir la loi d'évolution du système,
3. se donner un moyen d'associer à des observables physiques des fonctions sur l'espace des phases.

Nous réalisons maintenant ce programme dans le cadre de la mécanique hamiltonienne puis de la mécanique quantique. Dans les deux cas, la vision que nous que nous présenterons est celle d'un objet ponctuel, que nous désignerons souvent par le terme de particule, évoluant sur une variété riemannienne  $(M, g)$  qui sera supposée  $\mathcal{C}^\infty$ .

### 1.1 Mécanique hamiltonienne

La mécanique hamiltonienne est une reformulation de la mécanique newtonienne qui fut inventée par le mathématicien irlandais William Hamilton en 1833. Elle permet de décrire le mouvement d'un objet ponctuel dans un potentiel. Deux exemples d'applications parmi les plus classiques sont le pendule (simple, double, triple même) et le mouvement des planètes dans le système solaire. Notre programme de modélisation en trois points donne en mécanique hamiltonienne pour une particule évoluant sur une variété riemannienne  $(M, g)$  :

1. l'espace des phases est le cotangent de la variété  $T^*M$ ,
2. la loi d'évolution est donnée par les équations d'Hamilton, le paramètre étant l'hamiltonien,
3. les observables sont donc les fonctions sur le cotangent  $T^*M$ , l'interprétation physique étant que si la particule est au point  $(x, \xi) \in (M, (T_x M)^*)$  sa position dans l'espace est  $x$  et son impulsion est  $\xi$ .

Pour pouvoir décrire les équations d'Hamilton, nous utilisons le formalisme de la géométrie symplectique. Nous renvoyons à [5] pour une 'introduction' à cette dernière. Nous utilisons principalement le fait qu'il est possible de munir  $T^*M$  d'une structure symplectique canonique. Nous notons  $\omega$  la forme symplectique naturelle associée et  $\nu$  la mesure de Liouville. Elles sont données en coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in T^*M$  par

$$\omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge d\xi_j \quad \nu = (dx_1 \wedge d\xi_1) \wedge \dots \wedge (dx_n \wedge d\xi_n)$$

Nous commençons par définir le *champ de vecteur hamiltonien*  $X_p$  associé à un *hamiltonien*  $p \in \mathcal{C}^\infty(T^*M, \mathbb{R})$ . Il est donné implicitement par

$$\omega(X_p, \cdot) = dp \tag{2}$$

$dp$  étant la différentielle de  $p$ . Les *équations d'Hamilton* sont alors simplement l'équation différentielle ordinaire du champ vecteurs  $X_p$ , soit pour  $z : I \rightarrow T^*M$

$$\frac{d}{dt} z(t) = X_p(z(t)) \tag{3}$$

Le flot associé est noté  $\varphi_t$  et les courbes intégrales du champ de vecteurs  $X_p$  sont parfois appelées des *trajectoires hamiltoniennes*.

**Remarque.** Les équations d'Hamilton deviennent en coordonnées locales

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt}(t) = \frac{\partial p}{\partial \xi_i}(x(t), \xi(t)) \\ \frac{d\xi_i}{dt}(t) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}(x(t), \xi(t)) \end{cases}$$

Le sort de la loi d'évolution étant réglé, nous nous tournons maintenant vers les observables et nous fixons pour la suite un hamiltonien  $h$ . Comme affirmé précédemment, une *observable classique* est simplement une fonction  $f : \mathcal{X} = T^*M \mapsto \mathbb{R}$ . L'interprétation est, en coordonnée locale, que les observables

$$(x, \xi) \mapsto x_j \quad (x, \xi) \mapsto \xi_j$$

fournissent respectivement la  $j$ -ème composante de la position ou de l'impulsion. La norme au carré de la vitesse est ainsi donnée par l'observable  $(x, \xi) \mapsto |\xi|_g^2$  où  $|\xi|_g^2$  est la norme de  $\xi \in T_x M$  fournie par la métrique  $g$ .

Une classe d'observable particulièrement importante est celles des *intégrales premières du mouvements*. Ce sont les observables qui sont préservées par la dynamique, qui sont constantes sur chaque courbe intégrale du champ de vecteurs hamiltonien  $V_p$ . Formellement, une observable  $f$  est une intégrale première du mouvement si

$$\forall t \in I, \varphi_t^* f = f$$

Nous introduisons maintenant un outil central de la mécanique hamiltonienne : le *crochet de Poisson*. Il est défini par

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \tag{4}$$

pour  $f$  et  $g$  deux observables. Il permet de déterminer l'évolution des observables le long de la dynamique hamiltonienne grâce à l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}f \circ \varphi_t = \{f, p\} \circ \varphi_t \quad (5)$$

Celle-ci implique une caractérisation des intégrales premières du mouvement en terme du crochet de Poisson avec l'hamiltonien. Ainsi, une observable  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est une intégrale première du mouvement si et seulement si  $\{f, p\} = 0$ .

La *première* intégrale première du mouvement est l'hamiltonien, car  $\{p, p\} = 0$  par anti-symétrie. La dynamique d'un système hamiltonien est donc toujours confinée sur une surface d'énergie

$$\Sigma_c = p^{-1}(\{c\}) \quad (6)$$

la valeur de  $c$  dépendant de la condition initiale. Si  $c$  est une valeur régulière de  $h$ , la surface d'énergie est alors une sous-variété de  $T^*M$ . Si de plus  $\Sigma_c$  est compact, le flot  $\varphi_t$  est alors complet, ie définie à tout temps, d'après le lemme de sortie des compacts.

Nous terminons cette partie en mentionnant que le flot géodésique sur  $T^*M$  est un flot hamiltonien associé à l'hamiltonien

$$p(x, \xi) = |\xi|_g^2$$

où  $|\xi|_g$  est la norme induite par la métrique  $g$  de la forme linéaire  $\xi \in (T_x M)^*$ .

## 1.2 Mécanique quantique

La mécanique quantique a été inventée au début du 20ème siècle pour résoudre certains problèmes de physique comme le spectre d'émission des atomes. Nous présentons dans un premier temps le formalisme mathématique de la mécanique quantique puis nous en donnons une interprétation physique en terme de fonction d'onde.

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne, l'espace des phases  $\mathcal{X}$  d'un système quantique composé d'une particule évoluant sur  $M$  est la sphère unité de  $L^2(M)$  aux phases près :

$$\mathcal{X} = S_{L^2}(0, 1) / \sim = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\psi\|_{L^2} = 1\} / e^{i\theta}\psi \sim \psi \quad (7)$$

Une fonction  $\psi \in \mathcal{X}$  est souvent appelée *fonction d'onde*. La relation d'équivalence  $e^{i\theta}\psi \sim \psi$  consiste à identifier deux fonctions qui diffèrent d'une phase  $e^{i\theta}$  avec  $\theta$  un réel. La nécessité de cette identification apparaîtra lors de la définition des observables.

L'espace des phases étant fixé, il convient de choisir une loi d'évolution. En mécanique quantique, l'équation centrale est celle de Schrödinger. Elle est donnée pour un opérateur auto-adjoint  $P$  et une condition initiale  $\psi_0 \in L^2(M)$  par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi = -\frac{i}{\hbar}P\psi \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases} \quad (8)$$

Le paramètre  $\hbar$  est la constante de Planck, l'autre paramètre de cette équation est l'opérateur auto-adjoint  $P$ . Les vecteurs propres de  $P$  sont appelés *états propres* du système quantique et il découle immédiatement de la forme de l'équation de Schrödinger qu'ils sont stables par la dynamique quantique.

Puisque l'opérateur  $P$  est auto-adjoint sur  $L^2(M)$ , nous pouvons utiliser le calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints pour résoudre l'équation de Schrödinger. Nous définissons pour ce faire le propagateur quantique  $(F(t))_{t \in \mathbb{R}}$  associé à  $P$

$$F(t) := e^{-\frac{i}{\hbar}tP} \quad (9)$$

Les solutions de l'équation de Schrödinger sont alors

$$\psi(t) = F(t)\psi_0 \quad (10)$$

Il est temps de définir les observables quantiques. Nous fixons pour la suite un système quantique sur  $M$ , c'est-à-dire un état initial  $\psi_0$  et un opérateur auto-adjoint  $P$ . Nous notons  $\psi(t) = F(t)\psi_0$  l'état quantique qui a évolué selon le propagateur quantique  $F$  associé à  $P$ .

Une observable quantique est un opérateur auto-adjoint  $A \in \mathcal{B}(L^2(M))$ . La valeur de l'observable  $A$  pour un état  $\psi$  du système quantique est donnée par

$$\langle A\psi, \psi \rangle \in \mathbb{R} \quad (11)$$

**Remarque.** L'invariance par changement de phase vient de cette définition d'observable quantique. Si  $\psi_1 = e^{i\theta}\psi$ , alors

$$\langle A\psi_1, \psi_1 \rangle = e^{i\theta}e^{-i\theta}\langle A\psi, \psi \rangle = \langle A\psi, \psi \rangle$$

Deux fonctions d'ondes qui ne diffèrent que d'une phase ont donc les mêmes observables, et sont donc identiques d'un point de vue physique.

La valeur de l'observable  $A$  après un temps  $t$  est donné par

$$\begin{aligned} \langle A\psi(t), \psi(t) \rangle &= \langle AF(t)\psi_0, F(t)\psi_0 \rangle = \langle F(t)^*AF(t)\psi_0, \psi_0 \rangle \\ &= \langle F(-t)AF(t)\psi_0, \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

L'opérateur  $A(t) = F(-t)AF(t)$  correspond donc à l'observable  $A$  ayant évolué pendant un temps  $t$  selon la dynamique quantique. En dérivant cette expression, nous trouvons une équation différentielle ordinaire pour l'observable quantique  $A(t)$

$$\frac{d}{dt}A(t) = -\frac{i}{\hbar}[A(t), P] \quad (12)$$

La vision de la mécanique quantique consistant à étudier l'évolution des fonctions d'onde est celle de Schrödinger alors que celle consistant à étudier l'évolution des observables est celle d'Heisenberg. Le propagateur quantique permet de faire le pont entre ces deux visions.

Nous venons de définir l'espace des phase, nous avons choisi une loi d'évolution et même défini les observables quantiques, cependant nous n'avons pas encore expliqué comment interpréter physiquement ces dernières. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le cas où  $M = \mathbb{R}^n$ . Une des interprétations de la mécanique quantique est de voir le module au carré de la fonction d'onde  $|\psi|^2$  comme la densité de probabilité de position de la particule. Ainsi, si  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une observable classique ne dépendant que de la position de la particule, il est possible de lui associer une observable quantique  $A = M_a$  qui est simplement la multiplication par  $a$ . Nous avons alors

$$\mathbb{E}[a] = \langle M_a\psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\psi(x)|^2 dx \quad (13)$$

Cette interprétation a comme conséquence troublante la disparition du déterminisme, il devient impossible de connaître avec exactitude la position de la particule. Nous ne pouvons plus accéder qu'à la moyenne  $\mathbb{E}[a]$  de la quantité physique  $a$ .

La densité de probabilité pour l'impulsion est quand à elle donnée par  $(2\pi\hbar)^{-n}|\mathcal{F}_h(\psi)(\xi)|^2$ . Ainsi, si  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une observable classique dépendant uniquement de l'impulsion, nous lui associons l'observable quantique  $A = \hat{M}_a$  correspondant à la multiplication en Fourier par  $a$  :

$$\hat{M}_a f = \mathcal{F}_h^{-1}(a\mathcal{F}_h(f)) \quad (14)$$

Nous avons bien alors

$$\mathbb{E}(a) = \langle \hat{M}_a\psi, \psi \rangle = (2\pi\hbar)^{-n}\langle a\mathcal{F}_h(\psi), \mathcal{F}_h(\psi) \rangle = \int a(\xi) \frac{|\mathcal{F}_h(\psi)(\xi)|^2}{(2\pi\hbar)^n} d\xi \quad (15)$$

Nous notons  $X_j$  l'opérateur donnant la  $j$ -ème coordonnée de la particule et  $hD_j$  celui donnant la  $j$ -ème coordonnée de son impulsion. D'après la discussion ci-dessus, nous avons pour un état  $\psi$

$$X_j\psi(x) = x_j\psi(x) \quad hD_j\psi(x) = \mathcal{F}_h^{-1}(\xi_j\mathcal{F}_h(\psi))(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x) \quad (16)$$

Il est possible de montrer que les opérateurs positions et impulsions ainsi définis sur  $\mathbb{R}$  sont essentiellement auto-adjoints et que leurs commutateurs vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned} \forall j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad [X_j, X_k] &= [hD_j, hD_k] = 0 \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad [X_j, hD_j] &= i\hbar I \end{aligned} \quad (17)$$

La non-commutation de  $X_j$  et  $hD_j$  est à l'origine de l'inégalité d'Heisenberg.

**Théorème 1.2.1: Inégalité d'Heisenberg**

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\psi \in \mathbb{R}$ . Nous avons alors pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  que

$$\|(X_j - a)\psi\| \|(hD_j - b)\psi\| \geq \frac{\hbar}{2} \|\psi\| \quad (18)$$

En prenant  $a = \langle X_j\psi, \psi \rangle$  et  $b = \langle hD_j\psi, \psi \rangle$ , respectivement l'espérance de la position et de l'impulsion, nous avons alors

$$V(x_j) = \|(X_j - a)\psi\|^2 \quad V(\xi_j) = \|(hD_j - b)\psi\|^2$$

où  $V(x_j)$  et  $V(\xi_j)$  sont la variance de la position et de l'impulsion dans l'interprétation probabiliste présentée précédemment. L'inégalité d'Heisenberg nous dit donc que l'incertitude sur la position et l'impulsion, que nous mesurons avec la variance, ne peuvent être toutes les deux petites. Nous ne pouvons pas connaître la position d'une particule dans l'espace des phases classique  $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  qu'à une précision de l'ordre de  $\sqrt{\hbar}$  près. Autrement dit, une particule occupe au moins un volume d'ordre  $\hbar^n$  dans l'espace des phases classique.

Il reste maintenant à construire une procédure de quantification, qui associe à une observable classique  $a : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  une observable quantique  $a^W \in \mathcal{B}(L^2(M))$ . Nous venons de voir que dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ , les fonctions dépendant uniquement de la position doivent être envoyées sur le multiplicateur associé, alors que les fonctions dépendant uniquement de l'impulsion doivent être envoyées sur le multiplicateur de Fourier correspondant. Toute procédure de quantification se doit de respecter cette propriété.

D'un point de vue algébrique, nous demandons que la procédure de quantification soit un morphisme d'algèbre entre les observables classiques et les opérateurs sur  $L^2(M)$ . Le produit de deux observables classiques  $a$  et  $b$  étant encore une observable classique, il est naturel d'attendre que le produit des observables quantiques  $a^W b^W$  origine encore d'une observable classique, et même du produit  $ab$ . Formellement, nous souhaitons avoir la relation suivante  $(ab)^W = a^W b^W$ .

Finalement, en comparant les équations d'évolution des observables dans le cas classique

$$\frac{d}{dt}a_t = \{a_t, p\} \quad a_t = \varphi_t^*(a) = a \circ \varphi_t$$

et quantique

$$\frac{d}{dt}A(t) = -\frac{i}{\hbar}[A(t), P]$$

un parallèle semble se dégager entre le crochet de Poisson d'un côté et  $-\frac{i}{\hbar}$  fois le commutateur de l'autre. Il est généralement attendu d'une procédure de quantification qu'elle envoie le crochet de Poisson sur le commutateur.

### 1.3 Quantification de Weyl

Nous construisons maintenant "le" procédé de quantification décrits dans la partie précédente et qui nous permettra de quantifier des systèmes hamiltoniens. Il s'avère qu'il existe plusieurs manières de quantifier un système, chacune avec des propriétés légèrement différentes, mais nous n'aborderons pas ce point ici. Nous présentons ici la quantification de Weyl, nommée après son inventeur Hermann Weyl. La présentation qui suit est tirée du livre de Zworski [20] qui est une excellente exposition de l'analyse semiclassique. Pour une vision plus 'algébrique' de la quantification de Weyl, nous conseillons l'excellent livre de Folland [10].

#### Définition 1.3.1: Quantification de Weyl

Soit  $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ . L'opérateur associé, noté  $a^W(x, hD)$ , agit sur une fonction  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par

$$a^W(x, hD)u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi \quad (19)$$

La fonction  $a$  est appelé un *symbole*. Nous désignerons les opérateurs de la forme  $a^W(x, hD)$  par le terme d'*opérateurs pseudo-différentiels*.

L'opérateur  $a^W(x, hD)$  est un opérateur à noyau, de noyau

$$K_a(x, y) = \mathcal{F}_h^{-1}\left(a\left(\frac{x+y}{2}, \cdot\right)\right)(x-y) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi \rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) d\xi \quad (20)$$

la transformée de Fourier inverse s'appliquant ici sur la deuxième coordonnée uniquement. la vision d'opérateur à noyau permet de définir la quantification de Weyl pour des symboles  $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Il est clair, de par la forme du noyau  $K_a$ , que si le symbole  $a$  est à valeurs réelles alors l'opérateur  $a^W(x, hD)$  est auto-adjoint sur  $L^2$  (s'il est bien défini).

**Remarque.** Il est possible de retrouver le symbole à partir de l'opérateur pseudo-différentiel. Si  $A = a^W(x, hD)$  est un opérateur pseudo-différentiel, alors

$$a(x, \xi) = e^{-\frac{i}{h}\langle x, \xi \rangle} a(x, hD) (e^{\frac{i}{h}\langle x, \xi \rangle}) \quad (21)$$

Un calcul permet de voir que si  $a = a(x)$  ou  $b = b(\xi)$  sont des symboles ne dépendant que de la position ou de l'impulsion alors les opérateurs associés sont les multiplicateurs correspondant (multiplicateur de Fourier pour  $b$ )

$$a^W(x, hD) = M_a \quad b^W(x, hD) = \hat{M}_b$$

La quantification de Weyl vérifie ainsi la condition souhaitée pour les symboles ne dépendant que de la position ou que de l'impulsion. Avant de voir si les autres conditions (morphisme d'algèbre et Poisson contre commutateur) sont vérifiées, nous introduisons un ensemble de symboles pour lesquels la quantification se comporte bien.

#### Définition 1.3.2: Symboles de Kohn-Nirenberg

Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Les symboles de Kohn-Nirenberg sont

$$\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n) := \left\{ a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta}, |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \right\} \quad (22)$$

Nous notons l'ensemble des opérateurs associés  $\Psi^m$

$$\Psi^m(\mathbb{R}^n) := \{ a^W(x, hD) \mid a \in \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n) \} \quad (23)$$

En utilisant le contrôle sur les dérivées des symboles de Kohn-Nirenberg, il est possible de montrer que les opérateurs associés envoient les fonctions de Schwartz dans les fonctions de Schwartz et les distributions tempérées dans les distributions tempérées.

Le théorème qui suit nous dit que le produit de deux opérateurs pseudo-différentiels est encore un opérateur pseudo-différentiel, c'est-à-dire que le produit de deux observables quantiques est encore une observable quantique.

**Théorème 1.3.1: Composition des symboles de Kohn-Nirenberg**

Soient  $a \in \mathcal{S}^{m_1}(\mathbb{R}^n)$  et  $b \in \mathcal{S}^{m_2}(\mathbb{R}^n)$ . Nous avons

$$a^W(x, hD)b^W(x, hD) = c^W(x, hD) \quad (24)$$

où  $c \in \mathcal{S}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n)$  est donné par

$$a\#b(x, \xi) = \frac{1}{(\pi h)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i}{h}\omega_0(w_1, w_2)} a((x, \xi) + w_1) b((x, \xi) + w_2) dw_1 dw_2 \quad (25)$$

et admet le développement asymptotique suivant

$$c(x, \xi) = \sum_{k=0}^N \frac{i^k h^k}{k!} A(D)^k a(x, \xi) b(y, \eta)|_{x=y, \xi=\eta} + \mathcal{O}_{\mathcal{S}^{m_1+m_2-N-1}}(h^{N+1}) \quad (26)$$

où l'opérateur  $A(D)$  est l'opérateur différentiel défini pour  $(x, \xi, y, \eta) \in \mathbb{R}^{4n}$  par

$$A(D) := \langle D_\xi, D_y \rangle - \langle D_x, D_\eta \rangle \quad (27)$$

Une application directe du théorème nous donne pour  $a \in \mathcal{S}^{m_1}(\mathbb{R}^n)$  et  $b \in \mathcal{S}^{m_2}(\mathbb{R}^n)$  que

$$a\#b = ab - \frac{h}{2i} \{a, b\} + \mathcal{O}_{\mathcal{S}^{m_1+m_2-2}}(h^2) \quad (28)$$

et

$$[a^W(x, hD), b^W(x, hD)] = -\frac{h}{i} \{a, b\}^W(x, hD) + \mathcal{O}_{\mathcal{S}^{m_1+m_2-3}}(h^3) \quad (29)$$

**Remarque.** L'ordre 3 dans (29) est une propriété particulière de la quantification de Weyl. Pour les autres quantification, le développement n'est valable que jusqu'à l'ordre 2.

L'équation (28) nous dit que le symbole associé à l'opérateur produit est  $a\#b$  et non  $ab$ . Le développement asymptotique permet cependant de voir qu'à l'ordre 0 en  $h$  les deux coïncident. L'équation (29) fournit la correspondance entre les crochets de Poisson dans le monde classique et les commutateurs dans le monde quantique, mais malheureusement encore à une erreur de l'ordre de  $h$  près. Il aurait été souhaitable d'obtenir des égalités de la forme

$$a^W(x, hD)b^W(x, hD) = (ab)^W(x, hD) \quad [a^W(x, hD), b^W(x, hD)] = -\frac{h}{i} \{a, b\}^W(x, hD) \quad (30)$$

Il est en réalité impossible, d'après un théorème de Groenewold [11], de construire une procédure de quantification qui respecte ces deux contraintes, la linéarité et également le fait d'envoyer  $x_j$  sur l'opérateur de multiplication  $M_{x_j}$  et  $\xi_j$  sur l'opérateur de dérivation  $hD_j$ . Nous invitons le lecteur à lire la partie correspondante du chapitre 4 de [10] pour plus de détail.

Pour pallier partiellement à ce problème, nous utilisons la notion de *symbole principal*. Il est défini pour un opérateur pseudo-différentiel  $a^W(x, hD) \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$  par

$$\sigma(a^W(x, hD)) = [a] \in \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n)/h\mathcal{S}^{m-1}(\mathbb{R}^n) \quad (31)$$

La classe d'équivalence  $[a]$  est définie par la relation suivante

$$[a] = [b] \in \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n)/h\mathcal{S}^{m-1}(\mathbb{R}^n) \iff \exists c \in \mathcal{S}^{m-1}(\mathbb{R}^n), a - b = hc$$

Le symbole principal permet d'éliminer les termes d'"erreurs" consistant en un multiple de  $h$  et d'un symbole d'ordre inférieur. Nous obtenons avec cette définition que le symbole principal est multiplicatif et nous trouvons la relations attendues entre crochet de Poisson et commutateur. Soit  $A \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$  et  $B \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$  nous avons que

$$\begin{aligned} \sigma(AB) &= \sigma(A)\sigma(B) \\ \sigma\left(-\frac{h}{i}[A, B]\right) &= \{\sigma(A), \sigma(B)\} \end{aligned} \tag{32}$$

grâce aux relations (28) et (29).

Une des dernières choses à vérifier est que nous obtenons bien grâce à la quantification de Weyl des opérateurs sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , les observables quantiques étant initialement définies comme des opérateurs sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Nous avons les résultats suivants

1. Si  $A \in \Psi^0(\mathbb{R}^n)$ , alors  $A$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et nous avons même

$$\|A\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} |\sigma(a)(x, \xi)| + \mathcal{O}(h) \tag{33}$$

2. Si  $A \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$  et  $m < 0$ , alors  $A$  est compact sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Remarque.** Il n'est en réalité pas absolument nécessaire qu'une observable soit bornée sur  $L^2$ , tant qu'elle s'avère être essentiellement auto-adjointe. Puisque les opérateurs de  $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$  sont définis sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $m \in \mathbb{R}$ , le seul problème qui reste est celui de l'auto-adjonction (qui peut s'avérer être hautement non trivial)

La construction de la quantification de Weyl que nous venons de décrire se base cruciallement sur la transformée de Fourier sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . Il est possible de l'étendre au cas des variétés compacts. L'idée consiste à localiser les opérateurs pseudo-différentiels définis sur  $\mathbb{R}^n$ , puis à les définir localement sur la variété avec des cartes et à sommer le tout avec une partition de l'unité. Il est également possible de définir une notion de symbole de Kohn-Nirenberg sur les variétés, en demandant à être localement comme un symbole de Kohn-Nirenberg sur  $\mathbb{R}^n$ . Le symbole principal est toujours bien défini dans ce cadre et les opérateurs présentent les mêmes propriétés  $L^2$  que dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ . Nous noterons par  $a^W(x, hD)$  l'opérateur de  $\Psi^m(M)$  associé à un symbole  $a \in \mathcal{S}^m(M)$ .

## 2 Ergodicité quantique

L'ergodicité quantique est l'étude de la quantification de système ergodique classique et de leurs comportements asymptotiques quand  $h$  tend vers 0. L'intuition centrale est que l'ergodicité du système dynamique classique conduit les états propres du système quantique à s'uniformiser quand  $h \rightarrow 0$ .

A l'origine du phénomène d'ergodicité quantique se trouve l'intuition que la dynamique quantique "tend" vers la dynamique hamiltonienne lorsque  $h$  tend vers 0. Le théorème d'Egoroff illustre parfaitement ce phénomène. Nous fixons  $p \in \mathcal{S}^m(M)$  un hamiltonien et notons  $P(h)$  l'opérateur pseudo-différentiel associé. La dynamique classique est fournie par le flot hamiltonien  $\varphi_t$  tandis que la dynamique quantique est engendrée par le propagateur  $F(t)$ .

### **Théorème 2.0.1: Théorème d'Egoroff**

Soient  $T > 0$  et  $a \in \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \mathcal{S}^m(M)$ . Nous notons  $a_t$  le symbole transporté par la dynamique classique

$$a_t(x, \xi) := a(\varphi_t(x, \xi)) \tag{34}$$

et nous introduisons les notations suivantes

$$A := a^W(x, hD) \quad \tilde{A}(t) := (a_t)^W(x, hD) \quad (35)$$

Nous avons alors uniformément pour  $t \in [0, T]$

$$\|A(t) - \tilde{A}(t)\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \mathcal{O}(h) \quad (36)$$

L'observable quantique  $\tilde{A}(t)$ , associée au symbole qui a évolué classiquement  $a_t$ , correspond ainsi à l'observable quantique  $A(t)$  qui a évolué selon le propagateur  $F$ , comme d'habitude à une erreur d'ordre  $h$  près.

Il est possible d'obtenir des versions plus fortes de ce théorème permettant au temps  $T$  de dépendre de  $h$ . Le principal problème consiste à déterminer à quelle classe de symbole appartient le symbole  $a_t$ . L'ordre de  $a_t$  dépend des propriétés du flot hamiltonien  $\varphi_t$  et plus précisément de son plus grand exposant de Lyapunov.

Nous traiterons le cas du Laplacien sur une variété riemannienne compacte, c'est-à-dire

$$P(h) := -h^2 \Delta_g \in \Psi^2(M) \quad (37)$$

Le symbole principal associé est

$$p(x, \xi) := |\xi|_g^2 \in \mathcal{S}^2(M) \quad (38)$$

Le laplacien est un opérateur plutôt 'sympathique' : il est essentiellement auto-adjoint sur  $L^2$  avec  $H^2(M)$  comme domaine pour la fermeture. Il est de plus diagonalisable en base orthonormée. Il existe ainsi une base orthonormée  $(u_j(h))_{j \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(M)$  telle que

$$P(h)u_j(h) = E_j(h)u_j(h), \quad u_j \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad (39)$$

et les valeurs propres vérifient

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_j(h) = +\infty$$

Puisque le laplacien est homogène, nous pouvons rescaler et nous considérons plutôt la suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 telle que

$$-\Delta u_k = \frac{1}{h_k^2} u_k$$

La limite pour  $h \rightarrow 0$  correspond donc à étudier les grandes valeurs propres du laplacien.

## 2.1 Mesures semiclassiques et théorème d'ergodicité quantique

Avant de définir la notion de mesures semiclassiques, il nous faut parler de celle de mesure de Wigner. Dans l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique, la densité de probabilité en position de la particule dans l'état  $\psi$  est  $|\psi(x)|^2 dx$  et la densité en impulsion est donnée par  $|\mathcal{F}_h(\psi)(\xi)|^2 d\xi$ . Le procédé de quantification que nous avons construit nous permet de définir une mesure signée  $\mu_\psi$ , appelé *mesure de Wigner*, sur  $T^*M$  décrivant l'état complet de la particule. Elle est donnée par

$$\forall a \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \mu_\psi(a) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(x, \xi) d\mu_\psi = \langle a^W(x, hD)\psi, \psi \rangle \quad (40)$$

Dans la majorité des cas, il n'est pas possible de l'interpréter comme une mesure de probabilité donnant la densité de présence de la particule dans l'espace des phases classique  $T^*M$  car elle n'est pas toujours positive.

Soit  $(\psi(h))_{h>0} \in L^2(M)$  une suite d'états quantiques, une *mesure semiclassique* associée est une valeur d'adhérence de la suite de mesure signée  $(\mu_{\psi(h)})_{h>0}$ . Une variation sur les

idées de la preuve du théorème de Prokhorov nous garantit l'existence d'une telle valeur d'adhérence. Il s'avère de plus que la limite est toujours une mesure de probabilité.

La suite d'état quantique qui nous intéresse dans ce qui suit est celle composée des états propres  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  du laplacien. Toute mesure semiclassique  $\mu$  associée est alors invariante par la dynamique hamiltonienne, ie  $(\varphi_t)_\# \mu = \mu$ , et est supportée sur la surface d'énergie  $\Sigma_1$ . Pour l'hamiltonien  $p(x, \xi) = |\xi|^2$  associé au laplacien, les surfaces d'énergies  $(\Sigma_c)_{c>0}$  sont des sous-variétés de  $T^*M$  et la surface d'énergie  $\Sigma_1$  est même le fibré unitaire cotangent  $S^*M$ . Cela nous permet de définir les mesures de Liouville restreintes aux surfaces d'énergie  $\Sigma_c$ , notée  $\nu_c$ , par

$$\forall f \in \mathcal{C}(M), \forall 0 < a < b, \quad \frac{1}{\text{Vol}(p^{-1}([a, b]))} \int_{p^{-1}([a, b])} f(x, \xi) d\nu = \int_a^b \int_{\Sigma_c} f(x, \xi) d\nu_c$$

Ce sont des mesures de probabilités qui sont invariantes par la dynamique hamiltonienne

Nous présentons maintenant le théorème d'ergodicité quantique, ou théorème de Schnirelmann, énoncé en 1974 [18] par ce dernier et démontré par Zelditch [19] et Colin de Verdière [4].

### **Théorème 2.1.1: Théorème d'ergodicité quantique**

Si  $\nu_1$  est ergodique pour le flot hamiltonien  $\varphi_t$ , alors il existe un ensemble d'entier  $J \subset \mathbb{N}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(J \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n} = 1 \quad (41)$$

et

$$\forall A \in \Psi^0(M), \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in J}} \langle Au_n, u_n \rangle = \int_{S^*M} \sigma(A) d\nu_1$$

ce qui implique

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in J}} \mu_{u_n} \rightarrow \nu_1 \quad (42)$$

La condition (41) revient à dire que nous ne regardons la limite que le long d'une sous-suite d'indice dense dans  $\mathbb{N}$ . Une conséquence immédiate du théorème d'ergodicité quantique est que la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent est bien une mesure semi-classique, sous l'hypothèse d'ergodicité. La condition (41) nous dit en un sens que c'est la 'principale' mesure semiclassique. Pour  $a \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , nous obtenons alors

$$\langle a^W(x, hD)u_n, u_n \rangle = \int_M a(x) |u_n(x)|^2 dx \xrightarrow[\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in J}]{} \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M a(x) dx \quad (43)$$

où  $dx$  est le volume induit sur  $M$  par la métrique riemannienne. Presque tous les états propres  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  s'uniformisent lorsque  $h \rightarrow 0$  ou de manière équivalente pour des grandes valeurs propres, la mesure de probabilité associée sur  $M$  converge en effet vers la mesure uniforme. C'est ce phénomène que nous appelons *délocalisation*.

## **2.2 Conjecture d'unique ergodicité quantique**

Le théorème de Schnirelmann nous dit que la 'principale' mesure semiclassique est la mesure de Liouville sur les surfaces d'énergies, il n'empêche cependant pas l'existence d'autres mesures semiclassiques, un phénomène appelé *scarring*. La conjecture d'unique ergodicité quantique, formulée par Rudnick et Sarnak en 1994 [17] stipule que dans un certain cadre, la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent est la seule mesure semiclassique.

### Conjecture 2.2.1: Unique ergodicité quantique

Soit  $(\mathcal{M}, g)$  une variété riemannienne de courbure sectionnelle strictement négative. La mesure de Liouville sur  $S^*M$  est l'unique mesure semiclassique associée au flot géodésique.

Pour comprendre cette conjecture, il est pertinent de rappeler que le flot géodésique sur des variétés hyperboliques est un système dynamique extrêmement chaotique : c'est un flot d'Anosov, il est ergodique pour la mesure de Liouville sur  $S^*M$  et ses orbites périodiques sont denses. Nous pourrions d'ailleurs tout à fait nous attendre à ce que les états propres du système quantifié se concentrent autour de ces géodésiques quand  $h \rightarrow 0$ , ou au moins une sous-suite de ces vecteurs propres. Pourquoi la conjecture a-t-elle alors une chance d'être vraie ? L'intuition est que les géodésiques fermées en question sont trop instables pour que les états propres quantiques puissent se concentrer autour de ces dernières. Dans le monde quantique, rien ne peut être concentrer dans un volume plus petit que  $h^n$  dans l'espace des phases classique  $T^*M$  de part l'inégalité d'Heisenberg (18). Cela implique qu'il y a toujours de la 'masse' qui ne se situe pas exactement autour de la géodésique et qui s'en écartera donc rapidement par instabilité de cette dernière. L'idée derrière l'unique ergodicité quantique est donc que l'instabilité trop importante du flot géodésique sur certaines variétés impose que les états propres du Laplacien pour des grandes valeurs propres ne peuvent se concentrer, et convergent donc vers la mesure uniforme, ici la mesure Liouville sur les surfaces d'énergie.

Les premières avancées sur cette conjecture ne furent pas toutes de bon augure. Faure, Nonnenmacher et De Bièvre [9] démontrent ainsi en 2003 qu'un système également très chaotique, les automorphismes hyperboliques du tore, ne présentent pas du tout d'unique ergodicité quantique. Ils ont démontré en l'essence que pour toute orbite périodique, il est possible de trouver une suite d'états propres du système quantique dont les mesures de Wigner convergent vers une combinaison convexe de la mesure uniforme supportée sur cette orbite périodique et de la mesure de Lebesgue (qui correspond à la mesure de Liouville dans ce cas). Cela brise évidemment tout espoir d'unique ergodicité quantique. Le billard stade est un autre système ergodique quantifiable. Il consiste simplement à faire évoluer sans frottement une balle ponctuelle dans un billard ayant la forme d'un stade avec des rebonds élastiques quand la balle touche le bord de ce dernier. Le théorème d'ergodicité quantique est également valable dans ce contexte. Hassel et Luc Hillairet [12] ont montré en 2008 que 'presque-tout' les billards ne sont pas uniquement ergodiques.

A l'inverse, Lindenstrauss [14] a démontré en 2006 l'unique ergodicité quantique arithmétique pour les surfaces hyperboliques. L'adjectif arithmétique signifie qu'il n'a considéré que les états propres à la fois du laplacien et des opérateurs de Hecke. Anantharaman [1] a prouvé en 2008 qu'une mesure semiclassique ne pouvait pas se concentrer sur un nombre fini de géodésiques fermées pour les variétés à courbure sectionnelle négative. Plus récemment, Dyatlov et Jin [6] ont montré en 2018 que les mesures semiclassiques devaient être de support total, ie mettre de la masse sur tout ouvert, dans le cadre des surfaces hyperboliques. Ils ont étendu leurs résultats aux surfaces à courbures sectionnelles strictement négatives avec Nonnenmacher [7].

### 2.3 Entropie des mesures semiclassiques et demi-délocalisation

Un des moyens d'attaquer le problème de l'unique ergodicité quantique est de récolter un maximum d'informations sur les mesures semi-classiques. Une des grandeurs les plus étudiées est l'entropie de Kolmogorov-Sinai des mesures semiclassiques. Le résultat d'Anantharaman est ainsi en réalité une conséquence d'une minoration de l'entropie des mesures semiclassiques. De plus, l'inégalité de Ruelle nous dit que la conjecture d'unique ergodicité quantique est équivalente à un énoncé sur l'entropie des mesures semiclassiques. Dans notre cas, elle stipule

que si  $\mu$  est une mesure semiclassique alors

$$h_\varphi(\mu) \leq \left| \int_{S^*M} \sum_{i=1}^n \lambda_i^+(x, \xi) d\mu \right| \quad (44)$$

où  $h_\varphi(\mu)$  désigne l'entropie de Kolmogorov-Sinai de  $\mu$  selon  $\varphi$  et les  $(\lambda_i^+)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  sont les exposants de Lyapunov du flot  $\varphi$ . Un résultat de Ledrappier et Young [13] implique qu'il n'y a égalité que si  $\mu = \nu_1$ . L'unique ergodicité quantique revient donc à montrer qu'il y a égalité dans (44) pour toutes les mesures semiclassiques.

Anantharaman et Nonnenmacher ont démontré dans [3] l'inégalité suivante dans le cas d'une variété hyperbolique de dimension  $d$

$$h_\varphi(\mu) \geq \frac{1}{2} \left| \int_{S^*M} \sum_{i=1}^n \lambda_i^+(x, \xi) d\mu \right| = \frac{d-1}{2} = \frac{h_\varphi(\nu_1)}{2} \quad (45)$$

L'entropie d'une mesure semiclassique est donc au moins la moitié de celle de la mesure de Liouville sur  $S^*M$ . C'est ce phénomène que nous appelons demi-délocalisation. Intuitivement, la mesure semiclassique doit contenir au moins pour moitié la mesure de Liouville et les états propres doivent donc au moins être à moitié délocalisés. Cette intuition semble être vraie même pour les systèmes pour lesquels l'unique ergodicité quantique est fautive. Faure et Nonnenmacher [8] avait ainsi prouvé en 2003 que dans le cas des automorphismes hyperboliques du tore de dimension 2, les mesures semiclassiques combinaison convexe de la mesure de Lebesgue et de la mesure uniforme sur une orbite périodique doivent être composées à moitié de la mesure de Lebesgue. L'inégalité (45) apparaît pour la première fois dans un article de Anantharaman et Nonnenmacher [2] qui la démontre dans le cas de la transformation du boulanger. C'est également dans cet article qu'il formule la conjecture de demi-délocalisation suivante

### Conjecture 2.3.1: Conjecture de demi-délocalisation

Soit  $\mu$  une mesure semiclassique d'un système dynamique Anosov. L'inégalité suivante est alors vérifiée

$$h_\varphi(\mu) \geq \frac{1}{2} \left| \int \sum_{i=1}^n \lambda_i^+(x, \xi) d\mu \right| \quad (46)$$

Il faut bien sur que le système dynamique puisse être associé à un système dynamique quantique. Comme dit ci-dessus cette conjecture a été démontrée dans le cas des variétés hyperboliques par Anantharaman et Nonnenmacher. Le cas des surfaces à courbure sectionnelle négatives a été traité par Rivière dans [15] et [16]. Le cas des variétés de dimension quelconque à courbure sectionnelle négatives variable ou des billards ergodiques est encore ouvert.

## Références

- [1] Nalini ANANTHARAMAN. « Entropy and the Localization of Eigenfunctions ». In : *Annals of Mathematics* 168.2 (2008), p. 435-475. ISSN : 0003-486X. JSTOR : [40345418](#).
- [2] Nalini ANANTHARAMAN et Stéphane NONNENMACHER. « Entropy of Semiclassical Measures of the Walsh-Quantized Baker's Map ». In : *Annales Henri Poincaré* 8.1 (fév. 2007), p. 37-74. ISSN : 1424-0661. DOI : [10.1007/s00023-006-0299-z](#).
- [3] Nalini ANANTHARAMAN et Stéphane NONNENMACHER. « Half-Delocalization of Eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov Manifold ». In : *Annales de l'Institut Fourier* 57.7 (2007), p. 2465-2523. ISSN : 1777-5310. DOI : [10.5802/aif.2340](#).
- [4] Y. COLIN DE VERDIERE. « Ergodicité et fonctions propres du laplacien ». In : *Communications in Mathematical Physics* 102.3 (sept. 1985), p. 497-502. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/BF01209296](#).

- [5] Ana Cannas DA SILVA. *Lectures on Symplectic Geometry*. T. 1764. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer, 2008. ISBN : 978-3-540-42195-5 978-3-540-45330-7. DOI : [10.1007/978-3-540-45330-7](https://doi.org/10.1007/978-3-540-45330-7).
- [6] Semyon DYATLOV et Long JIN. « Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support ». In : *Acta Mathematica* 220.2 (2018), p. 297 -339. DOI : [10.4310/ACTA.2018.v220.n2.a3](https://doi.org/10.4310/ACTA.2018.v220.n2.a3). URL : <https://doi.org/10.4310/ACTA.2018.v220.n2.a3>.
- [7] Semyon DYATLOV, Long JIN et Stéphane NONNENMACHER. « Control of eigenfunctions on surfaces of variable curvature ». In : *Journal of the American Mathematical Society* 35.2 (2022), p. 361-465.
- [8] Frédéric FAURE et Stéphane NONNENMACHER. « On the Maximal Scarring for Quantum Cat Map Eigenstates ». In : *Communications in Mathematical Physics* 245.1 (fév. 2004), p. 201-214. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/s00220-003-1019-x](https://doi.org/10.1007/s00220-003-1019-x).
- [9] Frédéric FAURE, Stéphane NONNENMACHER et Stephan De BIÈVRE. « Scarred Eigenstates for Quantum Cat Maps of Minimal Periods ». In : *Communications in Mathematical Physics* 239.3 (août 2003), p. 449-492. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/s00220-003-0888-3](https://doi.org/10.1007/s00220-003-0888-3).
- [10] Gerald B. FOLLAND. *Harmonic Analysis in Phase Space. (AM-122)*. Princeton University Press, 1989. ISBN : 9780691085289. (Visité le 24/09/2023).
- [11] H.J. GROENEWOLD. « On the principles of elementary quantum mechanics ». In : *Physica* 12.7 (1946), p. 405-460. ISSN : 0031-8914. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(46\)80059-4](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(46)80059-4).
- [12] Andrew HASSELL et Luc HILLAIRET. « Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic ». In : *Annals of Mathematics* 171.1 (2010), p. 605-618. ISSN : 0003486X.
- [13] F. LEDRAPPIER et Lai Sang YOUNG. « The Metric Entropy of Diffeomorphisms ». In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 11.2 (oct. 1984), p. 343-346. DOI : [10.1090/s0273-0979-1984-15299-6](https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1984-15299-6).
- [14] Elon LINDENSTRAUSS. « Invariant Measures and Arithmetic Quantum Unique Ergodicity ». In : *Annals of Mathematics* 163.1 (2006), p. 165-219. ISSN : 0003-486X. JSTOR : [20159952](https://www.jstor.org/stable/20159952).
- [15] Gabriel RIVIÈRE. « Entropy of Semiclassical Measures for Nonpositively Curved Surfaces ». In : *Annales Henri Poincaré* (nov. 2009). DOI : [10.1007/s00023-010-0055-2](https://doi.org/10.1007/s00023-010-0055-2).
- [16] Gabriel RIVIÈRE. « Entropy of Semiclassical Measures in Dimension 2 ». In : *Duke Mathematical Journal* 155.2 (nov. 2010), p. 271-335. ISSN : 0012-7094, 1547-7398. DOI : [10.1215/00127094-2010-056](https://doi.org/10.1215/00127094-2010-056).
- [17] Zeév RUDNICK et Peter SARNAK. « The Behaviour of Eigenstates of Arithmetic Hyperbolic Manifolds ». In : *Communications in Mathematical Physics* 161.1 (mars 1994), p. 195-213. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/BF02099418](https://doi.org/10.1007/BF02099418).
- [18] Alexander I SHNIRELMAN. « Ergodic properties of eigenfunctions ». In : *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 29.6 (1974), p. 181-182.
- [19] Steven ZELDITCH. « Uniform Distribution of Eigenfunctions on Compact Hyperbolic Surfaces ». In : *Duke Mathematical Journal* 55.4 (déc. 1987), p. 919-941. ISSN : 0012-7094, 1547-7398. DOI : [10.1215/S0012-7094-87-05546-3](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-87-05546-3).
- [20] Maciej ZWORSKI. *Semiclassical Analysis*. American Mathematical Society, mai 2022. ISBN : 978-1-4704-7062-3.