Introduction au domaine de recherche
Approximation et minimisation de la fonctionnelle du périmètre

Martin Rakovsky

Table des matières

1 Introduction

Imaginons un mélange d'eau et d'huile, dont on cherche à déterminer la disposition. Á l'état d'équilibre, la non-miscibilité de l'huile et de l'eau impose une partition de la flaque Ω en deux ensembles A et B, où A correspond à l'ensemble des points du plan où se trouve l'huile et B l'ensemble des points du plan où se trouve l'eau. Parmi ces équilibres, les équilibres stables correspondent aux configurations dans lesquelles l'interface entre l'huile et l'eau est de périmètre minimal.

Afin de se fixer les idées, on se donne $d \geqslant 1$ un entier et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On pose également $W(t) = (1-t^2)^2$.

Si $v(x)$ représente l'état du liquide au point x, avec $v(x) = -1$ si le liquide est seulement composé d'eau et $v(x) = 1$ si le liquide est seulement composé d'huile, déterminer l'état d'équilibre du système revient à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$F : \left\{ \begin{array}{lcl} L^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \int_\Omega W(v(x))dx \end{array} \right.$$

sur l'ensemble des fonctions v de masse m, c'est-à-dire que l'on cherche à résoudre le problème :

$$\inf_{\int_\Omega v = m} F(v)$$

Puisque W admet exactement deux points d'annulation, les minimiseurs de F se trouvent être les fonctions v valant -1 ou 1 presque partout. Si on note $A = \{x \in \Omega, v(x) = 1\}$ et $B = \{x \in \Omega, v(x) = -1\}$, la contrainte de masse devient $|A| - |B| = m$.

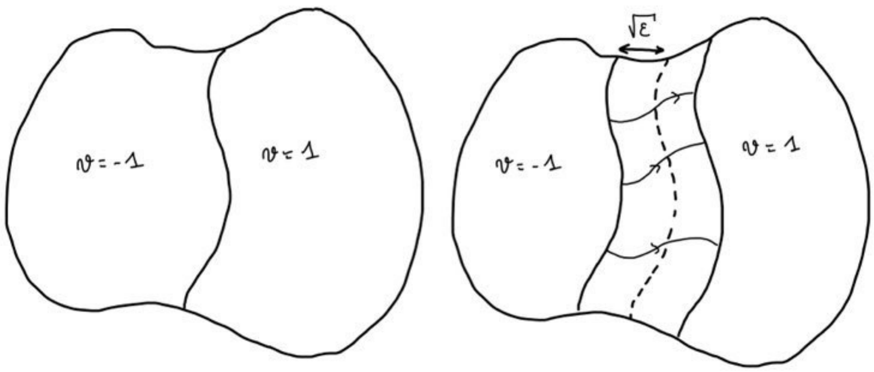
Comment déduire les états d'équilibre stables du système à partir de F, à savoir les fonctions v solutions telles le périmètre de l'ensemble A est minimal ?

Á travers cet exemple de minimisation d'une fonctionnelle, abordé par Modica et Mortolla en 1977 ([9]), on souhaite présenter une méthode permettant de minimiser des fonctionnelles modélisant des problèmes dits de *discontinuités* *libres*, c'est-à-dire des problèmes mettant en jeu des fonctions possédant un ensemble de points de discontinuité qui n'est pas imposé par le problème. La situation que nous présentons en constitue un des premiers succès historiques.

Dans le cas présent, on procède de la façon la suivante : on ajoute un terme de la forme $\varepsilon^2|\nabla u|^2$, appelé *perturbation singulière*, et on obtient la fonctionnelle suivante :

$$F_\varepsilon : \begin{cases} L^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \begin{cases} \int_\Omega W(v(x)) + \varepsilon^2|\nabla v(x)|^2 dx & \text{si } v \in H^1(\Omega), \int v = m \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

L'esprit de cette perturbation est d'autoriser les minimiseurs de F_ε à avoir un état intermédaire entre $\{v = 1\}$ et $\{v = -1\}$ sur une couche de petite épaisseur autour de l'interface entre ces deux états.



On obtient alors un minimiseur v_ε de F_ε et l'on s'attend à ce que si la suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ converge, cela soit vers un minimiseur v de F pour lequel le périmètre de l'ensemble $\{v = 1\}$ est minimal.

Une telle méthode fournit également un moyen de déterminer numériquement les fonctions v minimisant le périmètre de $\{v = 1\}$ à masse $\int_\Omega v$ fixée.
Dans cette introduction au domaine de recherche, on aborde les thématiques suivantes :

- Quel sens donner à l'affirmation "la suite de fonctionnelles $(F_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers la fonctionnelle F" ? On présentera la notion de $\Gamma-$convergence.
- Quel espace de fonction permet de donner un sens aux différents termes introduits et notamment à la notion de périmètre ? On présentera l'espace des fonctions à variation bornée qui permet de définir les ensembles de périmètre fini.
- On présentera un résultat d'approximation de la fonctionnelle du périmètre par $\Gamma-$convergence.
- On proposera quelques ouvertures issues de ce résultat.

2 Fonctions à variation bornée, ensembles de périmètre fini

Cette section a pour but d'introduire l'espace des fonctions sur lequel on définit nos fonctionnelles. Ces fonctions permettent de définir la notion d'ensemble de périmètre fini.
L'ensemble des notions et des preuves peut-être retrouvé dans [1],[4] et [7].

Définition 2.1 (**Fonctions à variation bornée**)**.** *Une fonction u de $L^1(\Omega)$ est une* ***fonction à variation bornée*** *si sa dérivée au sens des distributions Du est une mesure de Radon finie sur Ω. Autrement dit, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_0(\Omega)$:*

$$\int_\Omega u \nabla \varphi = - \int_\Omega \varphi dDu$$

On note $BV(\Omega)$ l'espace des fonctions à variation bornée. On notera parfois $|Du|(A) := \int_A |Du|$.

Les fonctions de l'espace $W^{1,1}(\Omega)$ sont des exemples de fonctions à variation bornée, la mesure Du correspond alors à $\nabla u \mathcal{L}$.

Muni de la norme $||u||_{BV(\Omega)} := ||u||_1 + \int_\Omega |Du|$, qui coïncide avec la norme $W^{1,1}(\Omega)$ sur $W^{1,1}(\Omega)$, l'espace $BV(\Omega)$ devient un espace de Banach. Le second terme de cette norme correspond à la variation totale de la mesure Du.

Trois propriétés très importantes pour la suite sont un résultat de semi-continuité inférieure, une notion de densité de $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ dans $BV(\Omega)$ et enfin un résultat de compacité dans $BV(\Omega)$.

Propriété 2.1 (**Semi-continuité inférieure**). *Soit (u_n) une suite de fonctions dans $BV(\Omega)$ convergente vers une fonction u dans $L^1(\Omega)$. Alors*

$$\int_\Omega |Du| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |Du_n|$$

Propriété 2.2 (**Densité**). *Soit $u \in BV(\Omega)$. On dispose de $(u_n) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ telle que*

1. *$u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$.*
2. *$\int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du|$.*

Notons que cette notion de densité n'est pas la densité pour la norme $||.||_{BV(\Omega)}$. La deuxième convergence $||Du_n|(\Omega) - |Du|(\Omega)| \to 0$ est donc plus faible que la convergence impliquée par la norme BV qui serait $|D(u_n - u)(\Omega)| \to 0$.

On passe enfin à un résultat de compacité sur les fonctions $BV(\Omega)$, c'est-à-dire un résultat permettant d'exhiber une valeur d'adhérence à une suite bornée.

Propriété 2.3 (**Compacité**). *Soit Ω un ouvert borné **et régulier**. Soit (u_n) une suite de fonctions $BV(\Omega)$ bornées pour $||.||_{BV}$. Alors il existe une fonction $u \in BV(\Omega)$ et une sous-suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k} \to u$ dans $L^1(\Omega)$.*

Les fonctions BV permettent de définir la notion d'ensemble de périmètre fini. On énonce quelques propriétés utiles des ensembles de périmètre fini ainsi qu'un théorème de régularisation pour ces ensembles.

Définition 2.2 (**Ensemble de périmètre fini**). *On dit qu'un ensemble mesurable $A \subset \Omega$ est **de périmètre fini** si $1_A \in BV(\Omega)$, et on note*

$$Per_\Omega(A) := \int_\Omega |D1_A|$$

Autrement dit, le périmètre est défini comme la variation totale de l'indicatrice d'un ensemble.
Cette définition coïncide avec l'intuition que l'on a du périmètre pour des ensembles à bord de classe $\mathcal{C}^1$.
Remarque : Le périmètre admet également la formulation variationnelle suivante relative à la fonction 1_A vue comme un élément de $BV(\Omega)$:

$$\mathrm{Per}_\Omega(A) := \sup\{\int_A \mathrm{div}\ \varphi, \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega), |\varphi| \leqslant 1\}$$

Avec cette formulation, on se rend compte que $\mathrm{Per}_\Omega(A)$ ne prend pas en compte la partie $A \cap \partial\Omega$.

On bénéficie également de la formule suivante, appelée « formule de la coaire », qui est une généralisation du théorème de Fubini :

Propriété 2.4 (**Formule de la coaire pour les fonctions BV**). *Si u est une fonction de $BV(\Omega)$:*

$$\int_\Omega |Du| = \int_\mathbb{R} Per_\Omega(\{u > t\})dt$$

3 $\Gamma-$convergence

On trouvera une description détaillée de la $\Gamma-$convergence dans [3].
La $\Gamma-$convergence est un mode de convergence de fonctionnelle dont l'objectif est d'obtenir des minimiseurs de la fonctionnelle limite à partir des minimiseurs de la suite.
Autrement dit, si $(F_n) \to F$ et si u_n est un minimiseur de F_n, on souhaite que (u_n) converge vers un minimiseur de F. Cela permet d'établir l'existence d'un minimiseur de F et la valeur du minimum. Son application pour résoudre des problèmes variationnels, méthode proposée par De Giorgi ([2]), a été abondamment réutilisée pour d'autres fonctionnelles.

Définition 3.1 ($\Gamma-$cobvergence)**.** *Soit $(E, ||.||)$ un espace normé et (F_n) une suite de fonctionnelles allant de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que (F_n) $\Gamma-$converge vers F si*

- ***borne inférieure** : Pour tout suite (u_n) à valeurs dans E telle que $u_n \to u$, on a*

$$F(u) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} F_n(u_n)$$

- ***borne supérieure** : Pour tout $u \in E$, il existe une suite (u_n) à valeurs dans E telle que*

$$F(u) = \lim_{n\to+\infty} F_n(u_n)$$

- ***compacité** : Il existe une suite (u_n) à valeurs dans E telle que pour tout n, u_n est un minimiseur de F_n et telle que la suite (u_n) possède une valeur d'adhérence u dans E.*

Des deux premiers axiomes de la définition on déduit le théorème fondamental de la $\Gamma-$convergence :

Théorème 3.1 (Théorème fondamental de la $\Gamma-$convergence)**.** *Soit (F_n) une suite de fonctionnelles telle que F_n $\Gamma-$ converge vers F. Soit (u_n) une suite telle que u_n est un minimiseur de F_n pour tout entier n. On suppose que la suite (u_n) admet une limite u et que la suite $(F_n(u_n))$ converge. Alors u est un minimiseur de F et*

$$F(u) = \lim_{n\to+\infty} F_n(u_n)$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après l'axiome de borne inférieure, on a

$$F(u) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} F_n(u_n)$$

D'autre part, d'après l'axiome de borne supérieure, on dispose d'une suite (v_n) telle que $v_n \to u$ et

$$F(u) = \lim_{n\to+\infty} F_n(v_n)$$

Mais puisque pour tout n, $F_n(v_n) \geqslant F_n(u_n)$, on déduit

$$F(u) \geqslant \limsup_{n\to+\infty} F_n(u_n)$$

En combinant les deux inégalités, on déduit que $F(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(u_n)$.

Par ailleurs, si $v \in X$, on dispose par l'axiome de borne supérieure de (v_n) telle que $v_n \to v$ et

$$F(v) = \lim_{n\to+\infty} F_n(v_n)$$

Mais alors

$$F(v) \geqslant \limsup_{n\to+\infty} F_n(u_n) = F(u)$$

de sorte que $F(u) \leqslant F(v)$ pour tout v de E. u est donc bien un minimiseur de F. □

L'énoncé du théorème met en valeur l'intérêt de l'axiome de compacité : si aucune suite de minimiseurs de (F_n) ne converge, le théorème présenté est vide.

4 Minimisation du périmètre

Dans cette section, on présente un résultat d'approximation par Γ convergence de la fonctionnelle $v \in BV(\Omega, \{-1, 1\}) \mapsto \mathrm{Per}_\Omega\{v = 1\}$. Le théorème présenté est également un résultat de sélection des minimiseurs de F.

4.1 Énoncé du résultat

On se place dans Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^d$. On considère, pour $\varepsilon > 0$ la fonctionnelle suivante :

$$F_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{lll} L^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_\Omega W(v(x)) + \varepsilon^2 |\nabla v(x)|^2 dx & \text{si } v \in H^1(\Omega), \int v = m \\ +\infty & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Comme on cherche un résultat de convergence de minimiseurs, il faut encore s'assurer de leur existence. Autrement dit, on doit s'assurer du résultat suivant :

Théorème 4.1. *Le problème*

$$\inf_{\int_\Omega v=m, v\in H^1(\Omega)} F_\varepsilon(v)$$

admet un minimiseur.

La preuve est l'occasion de présenter la *méthode directe du calcul des variations* : on se donne une suite minimisante de notre fonctionnelle, on en extrait une valeur d'adhérence et on montre que cette valeur d'adhérence est bien solution du problème.

Démonstration. Tout d'abord, puisque Ω est borné, on vérifie que la fonction v constante égale à m est dans $H^1(\Omega)$ et que $F_\varepsilon(v) = |\Omega| W(m) < +\infty$, de sorte que $\inf_{\int_\Omega v=m, v\in H^1(\Omega)} F_\varepsilon(v) < +\infty$.
Soit désormais (v_n) une suite minimisante, c'est-à-dire une suite (v_n) telle que $F_\varepsilon(v_n) \to \inf F_\varepsilon$. On a en particulier que la suite (∇v_n) est bornée dans $L^2(\Omega)$. Mais alors, d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, (v_n) est bornée dans $L^2(\Omega)$ (cela utilise le fait que $\int v_n = m$) et donc dans $H^1(\Omega)$. Puisque $H^1(\Omega)$ est réflexif, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, quitte à extraire, on peut supposer que v_n converge faiblement vers un élément u de $H^1(\Omega)$ et de moyenne m. Puisque la fonctionnelle $v \mapsto \int_\Omega |\nabla v|^2$ est faiblement semi-continue inférieurement, on déduit que $\int_\Omega |\nabla u|^2 \leqslant \liminf \int_\Omega |\nabla v_n|^2$.
D'autre part, d'après le théorème de Rellich, quitte à extraire encore une fois, on peut supposer que v_n converge vers u fortement dans $L^2(\Omega)$. Quitte à réextraire, on peut même supposer que cette suite converge simplement vers u presque partout, de sorte que, d'après le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned}
\inf_{\int_\Omega v=m, v\in H^1(\Omega)} F_\varepsilon(v) &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(v_n(x))dx + \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \varepsilon^2 |\nabla v_n(x)|^2 dx \\
&\geqslant \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} W(v_n(x)) + \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \varepsilon^2 |\nabla u(x)|^2 dx \\
&\geqslant \int_\Omega W(u(x)) + \varepsilon^2 |\nabla u(x)|^2 dx = F_\varepsilon(u)
\end{aligned}$$

si bien que v est un minimiseur de F_ε.

□

Naturellement, si une suite (u_ε) de minimiseurs de F_ε converge dans L^1 vers un u, alors u est un minimiseur de F sur $H^1(\Omega) \cap \{v, \int v = m\}$. En effet, quitte à extraire on peut supposer que (u_ε) converge presque partout vers u. Dans ce cas, si v est dans $H^1(\Omega)$, d'après le lemme de Fatou :

$$\int_\Omega W(u) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega W(u_\varepsilon) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega W(u_\varepsilon) + \varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon|^2 \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega W(v) + \varepsilon^2 |\nabla v|^2 = \int_\Omega W(v)$$

L'objectif est désormais de préciser cette convergence et d'identifier les valeurs possibles de la limite u. La stratégie est d'observer un développement limité de la suite $(F_\varepsilon(u_\varepsilon))$, dont on sait seulement qu'elle tend vers 0.
Qualitativement, on s'attend à ce que chacun des termes de $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ apporte la même contribution, de sorte que $\int_\Omega W(u_\varepsilon) \simeq \int_\Omega \varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon|^2$, et donc que le tout soit de l'ordre de ε. On s'attend donc à un développement de la forme :

$$\inf F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon\mathcal{C} + o(\varepsilon)$$

On va donc pour cela étudier la suite $AC_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} F_\varepsilon$. La fonctionnelle AC_ε est appelée fonctionelle *d'Allen-Cahn*. Elle met en compétition deux termes, à savoir $\frac{W(v)}{\varepsilon}$ qui favorise des fonctions v prenant leurs valeurs proches de -1 et de 1, et $\varepsilon|\nabla v|^2$ qui pénalise les changements d'états trop brusques de la fonction v.
On peut alors présenter le théorème principal, énoncé dans [10] et qui est une adaptation de [8] :

Théorème 4.2. *Soit Ω un ouvert borné régulier, $-|\Omega| < m < |\Omega|$ et $W : x \in \mathbb{R} \mapsto (1-x^2)^2$.*
On pose pour $\varepsilon > 0$:

$$AC_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} L^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_\Omega \frac{W(v(x))}{\varepsilon} + \varepsilon|\nabla v(x)|^2 dx & \textit{si } v \in H^1(\Omega), \int v = m \\ +\infty & \textit{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$P_0 : \left\{ \begin{array}{lll} L^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} c_0 \cdot Per_\Omega\{v=1\} & si\ v \in BV(\Omega, \{-1,1\})\ et\ \int v = m \\ +\infty & sinon \end{array} \right. \end{array} \right.$$

avec $c_0 = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{W(t)}dt = \dfrac{8}{3}$.

Alors AC_ε $\Gamma-$ *converge vers* P_0 *dans* $L^1(\Omega)$.

En particulier, si u_ε *est une solution du problème*

$$\inf_{v \in H^1(\Omega), \int_\Omega v = m} F_\varepsilon(v) := \int_\Omega W(v) + \varepsilon^2 |\nabla v|^2$$

alors il existe une sous-suite (ε_k) *telle que* u_{ε_k} *converge dans* $L^1(\Omega)$ *vers une fonction* u_0 *solution du problème*

$$\inf_{v \in BV(\Omega, \{-1,1\}), \int v = m} Per_\Omega\{v=1\}$$

Les valeurs d'adhérence possibles d'une suite (u_ε) sont donc des fonctions minimisante de la fonctionnelle du périmètre. Si l'on reprend la situation physique présentée en introduction, le théorème traduit que les équilibres stables du système huile-eau se produisent lorsque l'interface huile-eau est minimale.

Le théorème s'adapte à toute fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en exactement deux points a et b et telle que $W''(a), W''(b) > 0$. Pour cette raison, on s'attachera dans la suite à utiliser le moins possible l'expression de W.

Pour démontrer ce théorème, il faut réaliser les trois axiomes de la définition de la Γ-convergence, ce que l'on fait ci-après. Pour l'axiome de borne supérieure, on se contente de donner les idées de la construction de la suite (v_ε).

4.2 Preuve de la borne inférieure

Soit (v_ε) une suite d'éléments de $L^1(\Omega)$ qui converge vers une fonction v_0. On désire montrer que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} AC_\varepsilon(v_\varepsilon) \geqslant c_0 \mathrm{Per}_\Omega\{v_0 = 1\}$$

Cas où v_0 ne vaut pas -1 ou 1 presque partout : Il existe un ensemble Lebesgue-mesurable $C \subset \Omega$ de mesure non nulle sur lequel $v_0 \neq -1, 1$, de sorte que $\int_C W(v_0) > 0$. Puisque toute sous-suite de (v_ε) admet une sous-suite convergente simplement vers v_0 presque partout, on dispose d'une sous-suite v_{ε_k} pour laquelle $\int_\Omega W(v_{\varepsilon_k}) \geqslant \int_C W(v_{\varepsilon_k})$ qui converge vers une valeur strictement positive, de sorte que $AC_{\varepsilon_k}(v_{\varepsilon_k}) \to +\infty$. L'inégalité est démontrée dans ce cas.

Dans la suite, on suppose que $v_0 \in \{-1, 1\}$ presque partout :

On commence par montrer que l'on ne perd pas de généralité en se restreignant à des v_ε à valeurs dans $[-1, 1]$.
On va tronquer les fonctions v_ε en dehors de -1 et 1. Pour cela, on pose $\tau = -1_{x \leqslant -1} + x1_{-1 \leqslant x \leqslant 1} + 1_{x \geqslant 1}$ et $v_\varepsilon^\star = \tau \circ v_\varepsilon$. Alors $v_\varepsilon^\star$ est à valeurs dans $[-1, 1]$. De plus, $\nabla v_\varepsilon^\star = \nabla v 1_{-1 \leqslant v_\varepsilon \leqslant 1}$, de sorte que $|\nabla v^\star| \leqslant |\nabla v|$. Notons également que τ est $1-$lipschitzienne. On déduit que, puisque $v_\varepsilon \to v_0$ dans $L^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |v_\varepsilon^\star - v_0| = \int_\Omega |\tau \circ v_\varepsilon - \tau \circ v_0| \leqslant \int_\Omega |v_\varepsilon - v_0| \to 0$$

donc $v_\varepsilon^\star$ converge vers v_0 dans $L^1(\Omega)$.
On vérifie alors que

$$AC_\varepsilon(v_\varepsilon^\star) = \int_{-1 \leqslant v_\varepsilon \leqslant 1} \frac{1}{\varepsilon} W(v_\varepsilon) + \varepsilon |\nabla v_\varepsilon|^2 \leqslant AC_\varepsilon(v_\varepsilon)$$

si bien que $\liminf\limits_{n \to +\infty} AC_\varepsilon(v_\varepsilon^\star) \leqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} AC_\varepsilon(v_\varepsilon)$ et donc il suffit de montrer que $P_0(v_0) \leqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} AC_\varepsilon(v_\varepsilon^\star)$. On peut donc supposer, quitte à remplacer v_ε par $v_\varepsilon^\star$, que $-1 \leqslant v_\varepsilon \leqslant 1$.

On s'attaque à la preuve de l'inégalité. Tout d'abord, d'après l'inégalité des moyennes $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$:

$$AC_\varepsilon(v_\varepsilon) \geqslant 2\int_\Omega \sqrt{W(v_\varepsilon)}|\nabla v_\varepsilon|.$$

On pose $\Phi(t) = \int_{-1}^t \sqrt{W(s)}ds$. Notons que $\Phi(v_\varepsilon) \in H^1(\Omega)$. En effet, Φ est bornée sur Ω donc $\Phi(v_\varepsilon) \in L^2(\Omega)$. De plus, puisque v_ε est bornée entre -1 et 1, $W(v_\varepsilon)$ est borné sur Ω car W est bornée sur $[-1,1]$. Ainsi, $\Phi'(v_\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)$ et $\Phi'(v_\varepsilon)|\nabla v_\varepsilon| \in L^2(\Omega)$, de sorte que $\nabla\Phi(v_\varepsilon) \in L^2(\Omega)$. Puisque $\Phi \circ v_\varepsilon$ est dans $H^1(\Omega)$, la fonction est également dans $BV(\Omega)$, et alors $D(\Phi\circ v_\varepsilon) = Dv_\varepsilon\sqrt{W(v_\varepsilon)}$.

D'autre part, puisque $\sqrt{W}$ est bornée sur $[-1,1]$, Φ est lipschitizienne sur $[-1,1]$, de sorte que, de la même manière que ci-dessus, $\Phi(v_\varepsilon) \to \Phi(v_0)$ dans $L^1(\Omega)$.

En utilisant la semi-continuité inférieure des fonctions $BV(\Omega)$:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} 2\int_\Omega \sqrt{W(v_\varepsilon)}|\nabla v_\varepsilon| = 2\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |D\Phi(v_\varepsilon)| \geqslant 2\int_\Omega |D\Phi(v_0)|$$

Or, $\Phi(v_0) = \int_a^b \sqrt{W(s)}1_{v_0=b}$. D'autre part, puisque $1_{v_0=a} + 1_{v_0=b} = 1_\Omega$ et que $D1_\Omega$ est la mesure nulle sur Ω (les fonctions tests sont à support compact dans Ω), on a $|D1_{v_0=a}|(\Omega) = |D1_{v_0=b}|(\Omega)$. Ainsi :

$$2\int_\Omega |D\Phi(v_0)| = 2\int_{-1}^1 \sqrt{W(s)}\mathrm{Per}_\Omega\{v_0=1\} = 2\int_{-1}^1 \sqrt{W(s)}\mathrm{Per}_\Omega\{v_0=1\} = P_0(v_0)$$

ce qui conclut la preuve de la borne inférieure.

Permettons-nous de remarquer que la preuve met en évidence le fait suivant : du fait du cas d'égalité de l'inégalité $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ qui se produit lorsque $x=y$, la suite $(P_\varepsilon(v_\varepsilon))$ est minimisée lorsque les deux termes de P_ε sont du même ordre de grandeur, ce qui correspond à ce que l'on avait annoncé. Ce principe s'appelle le principe d'équipartition de l'énergie.

4.3 Idées de preuve de la borne supérieure

Soit $v_0 \in BV(\Omega, \{-1,1\})$. Il s'agit de construire (v_ε) telle que $v_\varepsilon \to v_0$ dans $L^1(\Omega)$ et

$$c_0\mathrm{Per}_\Omega\{v_0=1\} = \lim_{\varepsilon\to 0} AC_\varepsilon(v_\varepsilon).$$

On donne la construction de la suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$. Pour les détails de la preuve, on pourra voir [10]. On se contente de décrire la stratégie lorsque $\{v_0=1\}$ est un ensemble de bord de classe C^2. Pour le cas général, il faut approximer v_0 par une fonction $\tilde{v_0}$ pour laquelle $\{\tilde{v_0}=1\}$ est régulier et puis appliquer un procédé diagonal. L'avantage de cette hypothèse supplémentaire est que l'on dispose d'une fonction distance orientée d à la frontière $\partial\{v_0=1\}$.

On construit une suite de fonctions v_ε qui, sur une couche d'épaisseur $\sqrt{\varepsilon}$ centrée autour de $\partial\{v_0=1\}$, effectuent la transition entre l'état $\{v_\varepsilon=-1\}$ et l'état $\{v_\varepsilon=-1\}$, le tout avec un coût minimal, c'est-à-dire de sorte que

$$\int_{-\sqrt{\varepsilon}\leqslant d(x)\leqslant\sqrt{\varepsilon}} \frac{W(v_\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon|\nabla v_\varepsilon|^2$$

soit minimal.

Le principe d'équipartition de l'énergie nous invite à considérer des fonctions v_ε qui, sur $\{-\sqrt{\varepsilon}\leqslant d(x)\leqslant\sqrt{\varepsilon}\}$, vérifient $W(v_\varepsilon)\simeq\varepsilon^2|\nabla v_\varepsilon|^2$. Cette intuition peut également être formalisée en regardant l'expression de la différentielle de AC_ε et l'équation différentielle vérifiée par les points critiques de AC_ε.

On s'appuie donc sur le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Il existe une unique solution z de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, qui vérifie l'équation différentielle*

$$\begin{cases} z'(t) = \sqrt{W(z(t))} \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

et qui tend vers -1 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. De plus, la fonction z est également une solution du problème

$$\inf\left\{I(z) := \int_\mathbb{R} W(z) + |z'|^2 \;\middle|\; z'\in L^2(\mathbb{R}), z\in L^2_{loc}(\mathbb{R}), z(-\infty)=-1, z(+\infty)=1\right\}$$

L'existence est guarantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz et le théorème de sortie des compacts. Le fait que z ainsi construite minimise I vient du fait z réalise l'égalité dans l'inégalité

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} W(y) + |y'|^2 \geqslant 2 \int_{\mathbb{R}} y' \sqrt{W(y)} = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{W(t)} dt.$$

On raccorde désormais de façon affine la fonction z construite par le lemme avec les valeurs -1 et 1, avec une échelle de temps de $\sqrt{\varepsilon}$. Ceci conduit à la fonction :

$$\rho_\varepsilon(s) : \begin{cases} 1 & \text{si } s \geqslant 2\sqrt{\varepsilon} \\ \left(\dfrac{1 - z\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) (s - 2\sqrt{\varepsilon}) + 1 & \text{si } \sqrt{\varepsilon} \leqslant s \leqslant 2\sqrt{\varepsilon} \\ z\left(\dfrac{s}{\varepsilon}\right) & \text{si } -\sqrt{\varepsilon} \leqslant s \leqslant \sqrt{\varepsilon} \\ \left(\dfrac{z\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) (s + 2\sqrt{\varepsilon}) - 1 & \text{si } -2\sqrt{\varepsilon} \leqslant s \leqslant -\sqrt{\varepsilon} \\ -1 & \text{si } s \leqslant -2\sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

On pose ensuite $v_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(d(x))$, où d est la distance orientée à la frontière $\partial\{v_0 = 1\}$. Pour ε suffisamment petit, d est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\{|d| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}\}$, de sorte que v_ε est dans $H^1(\Omega)$. La preuve de la borne inférieure se découpe alors en trois étapes :

Étape 1 : Montrer que $v_\varepsilon \to v_0$ dans $L^1(\Omega)$ et $m_\varepsilon := m - \int_\Omega v_\varepsilon = O(\varepsilon)$.

Étape 2 : Montrer que $\limsup_{\varepsilon \to 0} AC_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant P_0(v_0)$, qui implique, ajouté à la borne inférieure, que $AC_\varepsilon(v_\varepsilon) \to P_0(v_0)$.

Étape 3 : Montrer que $v_\varepsilon + \frac{m_\varepsilon}{|\Omega|}$ vérifie également l'inégalité de l'étape 2).

La fonction $\bar{v}_\varepsilon := v_\varepsilon + \frac{m_\varepsilon}{|\Omega|}$ sera donc une suite vérifiant la condition de la borne supérieure.

4.4 Preuve de la compacité

On cherche à démontrer que si (u_ε) est une suite de minimiseurs de la suite (AC_ε), elle admet une valeur d'adhérence dans $L^1(\Omega)$.
On rappelle que l'on note Φ la primitive de $\sqrt{W}$ s'annulant en -1. Alors Φ' est une fonction positive s'annulant en un nombre fini de points. Ainsi, Φ est strictement croissante et en particulier, Φ^{-1} est une fonctione bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit (u_ε) une suite de fonctions de $H^1(\Omega)$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, u_ε est un minimiseur de AC_ε. Nous allons d'abord montrer que $(\Phi(u_\varepsilon))$ est une suite bornée dans $BV(\Omega)$.

En notant (v_ε) la suite construite dans la preuve de la borne supérieure (en prenant v_0 de $BV(\Omega, \{-1, 1\})$ quelconque), on a que $(AC_\varepsilon(v_\varepsilon))$ est bornée, car il s'agit d'une suite convergente. En reprenant les inégalités établies dans la preuve de la borne inférieure, on a :

$$\int_\Omega |\nabla \Phi(u_\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{2} AC_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2} AC_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant C$$

D'autre part, d'après le raisonnement de la borne inférieure, on a presque partout $-1 \leqslant u_\varepsilon \leqslant 1$, sans quoi $\tau \circ u_\varepsilon$ vérifie $AC_\varepsilon(\tau \circ u_\varepsilon) < AC_\varepsilon(u_\varepsilon)$, ce qui contredirait le fait que u_ε est un minimiseur de AC_ε. On déduit que

$$\int_\Omega |\Phi(u_\varepsilon)| = \int_\Omega \int_{-1}^{u_\varepsilon(x)} \sqrt{W(s)} ds dx \leqslant |\Omega| \int_{-1}^{1} \sqrt{W(s)} ds < \infty$$

de sorte que la suite $(\Phi(u_\varepsilon))$ est bien bornée dans $BV(\Omega)$.

Puisque Ω est régulier, d'après la compacité des fonctions BV, il existe une fonction $v_0 \in L^1(\Omega)$ et une sous-suite ε_k tendant vers 0 telle que $\Phi(u_{\varepsilon_k})$ converge vers v_0 dans $L^1(\Omega)$. Quitte à extraire, on peut même supposer qu'il y a convergence vers v_0 presque partout dans Ω.
Donc la suite (u_{ε_k}) converge simplement presque partout vers une fonction $u_0 := \Phi^{-1}(v_0)$. Puisque la suite (u_{ε_k}) est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et que Ω est borné, la suite (u_{ε_k}) est uniformément bornée dans $L^1(\Omega)$. D'après le théorème de convergence dominée, $u_{\varepsilon_k} \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$.

5 Ouverture

Quelles sont les généralisations possible du résultat qui vient d'être présenté ? Peut-on tirer d'autres informations de l'approximation du périmètre que l'on vient d'établir ?

- Tout d'abord, en considérant la formule $F_\varepsilon = \varepsilon \mathrm{Per}_\Omega + o(\varepsilon)$, on est en droit de se demander si l'on peut pousser le développement limité. Il se trouve que le second ordre du développement limité fait intervenir la courbure de l'ensemble $\{v = 1\}$.
- L'autre ouverture provient de l'observation suivante : si l'on cherche à minimiser la fonctionne AC_ε par une méthode numérique, par exemple une méthode de descente de gradient, la non-convexité de AC_ε ne guarantit pas que l'on trouve un minimiseur mais seulement un point critique de AC_ε. Ainsi, vers quoi converge une suite de points critiques de P_ε ? Notamment, a-t-on convergence des points critiques de la suite (AC_ε) vers un point critique de la fonctionnelle du périmètre ? Notons que la $\Gamma-$convergence ne permet pas d'obtenir de résultat de convergence pour des points critiques qui ne sont pas des minimiseurs. Une preuve relativement élémentaire de la bonne convergence des points critiques u_ε, sous l'hypothèse plus restrictive de la convergence de $(AC_\varepsilon(u_\varepsilon))$, est donnée par [6]. La preuve tire parti du principe d'équipartition de l'énergie : chacun des termes de AC_ε apporte asymptotiquement la même contribution et converge au sens de la mesure vers une même mesure limite.

6 Bibliographie

Références

[1] L.AMBROSIO, N.FUSCO, D.PALLARA, Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problem, *Oxford Science Publications*, 2000

[2] E. DE GIORGI, Convergence Problems for Functionals and Operators, Proceedings of the International Meetings on Recent Methods in Nonlinear Analysis, 1978

[3] G. DAL MASO, An introduction to Γ-convergence, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 1993

[4] L.EVANS, R.GARIEPY, Measure Theory and Fine Properties of Functions, 1992

[5] H. FEDERER, Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, 1969

[6] Q.LE, P.STERNBERG, Asymptotic Behavior of Allen-Cahn-type energies and Neumann Eignevalues via Inner Variations, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2018

[7] F.MAGGI, Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems, *Cambridge University Press*, 2012

[8] L. MODICA, The Gradient Theory of Phase Transitions and the Minimal Interface Cirterion, Arch. Rational Mech. Anal., 98, No.2, 1987

[9] L. MODICA, S. MORTOLA, Un esempio di Γ-convergenza, Boll. Un. Mat. Ital., B 14, 1977

[10] P. STERNBERG, The Effect of a Singular Perturbation on Nonconvex Variational Problem, 1988