

Introduction au domaine de recherche Géométrie de sous-ensembles nodaux aléatoires.

David Vernotte

Mai 2022

Introduction

Vers le début du XXI^e siècle, l'étude probabiliste des propriétés géométriques associées à des fonctions aléatoires a connu un fort essor. Cette théorie peut, en un certain sens, être vue comme une extension de la théorie de Kesten [Kes+80]. Cette dernière concernait la percolation sur des graphes localement finis (par exemple \mathbb{Z}^d), alors que notre motivation est davantage l'étude de fonctions aléatoires de la variable continue. Plus précisément, nous étudions des ensembles d'excursion $\mathcal{E}_\ell(f) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq -\ell\}$ et des ensembles nodaux $\mathcal{N}_\ell(f) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = -\ell\}$ où f est notre fonction aléatoire et $\ell \in \mathbb{R}$ est un niveau fixé. Les liens de ce sujet avec la physique sont nombreux, et apparaissent par exemple lorsqu'on étudie des modèles de gaz de Coulomb (voir par exemple [Kos77]). Si mon stage de M2 portait davantage sur l'étude du champ libre gaussien continu, notamment sur le support de [SS09], [SS10], j'ai choisi d'orienter cette introduction au domaine de recherche sur d'autres champs gaussiens définis sur \mathbb{R}^d qui sont des champs continus (voire même lisses) presque sûrement (alors que le champ libre gaussien, lui a pour nature une distribution).

Dans une première partie, il sera présenté quels sont ces champs qu'on étudie, et nous nous intéresserons brièvement à certaines de leurs propriétés topologiques. La seconde partie sera consacrée à la l'introduction d'un modèle de percolation autour de ces fonctions aléatoires et nous présenterons quelques résultats centraux ainsi que certaines idées et arguments essentiels qui interviennent dans les preuves de ces résultats. Enfin, la dernière partie est dédiée à la motivation de certaines questions encore ouvertes qui me motivent pour ma thèse.

1 Présentation des champs Gaussiens

Nous travaillons avec une fonction aléatoire $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Cependant, les fonctions que nous étudierons sont construites de manière bien précise. Dans toute la suite, nous travaillons sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nous notons $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur cet espace qui admettent un moment d'ordre 2. Commençons par une définition assez standard.

Définition 1.1. Soit X un ensemble quelconque, une famille $(f(x))_{x \in X}$ d'éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un **champ gaussien centré** si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall n \geq 1, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \forall x_1, \dots, x_n \in X, \exists \sigma \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (1.1)$$

Autrement dit, la famille $(f(x))_{x \in X}$ est un champ gaussien centré si chaque $f(x)$ est une variable gaussienne et si toute combinaison linéaire (finie) de certains $f(x_i)$ est également une variable gaussienne. Dans la suite nous prendrons souvent $X = \mathbb{R}^d$ et la famille $(f(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ sera vue comme une fonction aléatoire $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 1.2. Au niveau de la théorie de la mesure, on peut voir $(f(x))_{x \in X}$ comme un élément de \mathbb{R}^X muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes X}$. La loi de $(f(x))_{x \in X}$ est donc caractérisée par les lois fini-dimensionnelles des vecteurs gaussiens $(f(x_1), \dots, f(x_n))$.

La remarque précédente nous invite à définir la matrice de covariance d'un tel champ gaussien centré

Définition 1.3. Soit $(f(x))_{x \in X}$ un champ gaussien centré, alors la matrice de covariance de f est définie comme

$$K : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \mathbb{E}[f(x)f(y)] .$$

La remarque 1.2 assure que la matrice de covariance caractérise la loi de f comme élément de $(\mathbb{R}^X, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes X})$.

1.1 Un exemple important, le champ de Bargmann-Fock

L'existence d'un champ gaussien centré non trivial n'est pour le moment pas évidente. En effet, si $X = \mathbb{R}^d$, il s'agit de construire simultanément une quantité non dénombrable de variables gaussiennes sur le même espace de probabilité de sorte que (1.1) soit vérifiée. Nous allons construire un exemple explicite qui est en fait un objet vraiment central et naturel qui apparaît comme la limite d'échelle de certains modèles [BG17]. Fixons $d \geq 1$, prenons, une famille $(a_{i_1, \dots, i_d})_{i_1, \dots, i_d \in \mathbb{N}}$ de variables gaussiennes centrées réduites et mutuellement indépendantes. Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ nous posons

$$f(x) := e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} \sum_{i_1, \dots, i_d \in \mathbb{N}} a_{i_1, \dots, i_d} \frac{x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}}{\sqrt{i_1! \dots i_d!}} . \quad (1.2)$$

La formule (1.2) fait bien sens car on peut montrer que les sommes partielles de la série infinie écrite ci dessus sont de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui est complet. De plus, une limite dans L^2 de variables gaussienne est également une variable gaussienne (voir par exemple [Le 13] proposition 1.1), ceci montre que chaque $f(x)$ est une variable gaussienne et un argument similaire montre que c'est également le cas pour chaque combinaison linéaire de $f(x_i)$ (d'où (1.1)).

Calculons la matrice de covariance de f , nous avons pour $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ alors en utilisant le fait que $\mathbb{E}[a_{i_1, \dots, i_d} a_{i'_1, \dots, i'_d}] = \mathbb{1}_{(i_1, \dots, i_d) = (i'_1, \dots, i'_d)}$ on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x)f(y)] &= e^{-\frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)} \sum_{i_1, \dots, i_d \in \mathbb{N}} \frac{(x_1 y_1)^{i_1} \dots (x_d y_d)^{i_d}}{i_1! \dots i_d!} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)} e^{x_1 y_1 + \dots + x_d y_d} \\ \mathbb{E}[f(x)f(y)] &= e^{-\frac{1}{2}\|x-y\|_2^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Finalement, le champ de Bargmann-Fock sur \mathbb{R}^d est le champ gaussien centré dont la matrice de covariance est donnée par $K(x, y) = e^{-\frac{1}{2}\|x-y\|_2^2}$.

1.2 Un contexte plus général

Plus généralement, nous pouvons construire des champs gaussiens intéressants à partir du bruit blanc.

Définition 1.4. Le bruit blanc standard W sur \mathbb{R}^d est un champ gaussien indexé par $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathbb{E}[W(\varphi_1)W(\varphi_2)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx$.

Remarque 1.5. On peut voir W comme une distribution sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ aussi on peut penser à $W(f)$ comme à " $\int_{\mathbb{R}^d} f(y)W(dy)$ ".

La construction de cet objet est non triviale (voir [Jan97]) aussi nous admettrons son existence.

Prenons une fonction $q \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $q(-x) = q(x)$, nous définissons un champ gaussien en posant

$$f := q \star W. \quad (1.4)$$

Autrement dit pour $x \in \mathbb{R}^d$ alors $f(x) = W(q(x-\cdot))$. On vérifie que f est un champ gaussien centré. De plus,

$$\mathbb{E}[f(x)f(y)] = \int_{\mathbb{R}^d} q(x-t)q(y-t)dt \underset{q(x)=q(-x)}{=} (q \star q)(x-y).$$

Ainsi f est un champ gaussien qui admet comme matrice de covariance $K(x, y) = \kappa(x - y) := (q \star q)(x - y)$. Un tel champ dont la matrice de covariance $K(x, y)$ ne dépend que de la différence $x - y$ est dit stationnaire. Pour de tels champs on vérifie que la loi de f est invariante par le flot des translations de \mathbb{R}^d .

Exemple. Pour q donnée par

$$q(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/4} e^{-\|x\|_2^2}, \quad (1.5)$$

alors on trouve $K(x, y) = e^{-1/2\|x-y\|_2^2}$, ainsi on retombe sur le champ de Bargmann-Fock.

Notons que la construction réciproque est souvent faisable. Si f est un champ gaussien centré stationnaire ($K(x, y) = \kappa(x - y)$). Alors le théorème de Bochner garantit l'existence d'une mesure positive μ telle que

$$\kappa(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi\langle x, s \rangle} d\mu(s).$$

Supposons que μ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et notons $\rho^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la densité (dite densité spectrale associée).

Alors en posant q la transformée de Fourier de $\rho \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on vérifie que $q \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $q(-x) = q(x)$. De plus par des propriétés de la transformée de Fourier alors $q \star q$ est la transformée de Fourier de ρ^2 , ainsi $q \star q = \kappa$.

Conclusion : Pour $q \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $q(x) = q(-x)$ on définit $f = q \star W$ un champ gaussien stationnaire ayant pour matrice de covariance $K(x, y) = \kappa(x - y) = (q \star q)(x - y)$. La construction réciproque de q à partir de f est parfois possible sous certaines hypothèses.

1.3 Hypothèses et résultats de régularité

Nous présentons ici, les principales hypothèses que nous ferons sur notre champ gaussien $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et nous commentons leur importance.

Dans toute la suite nous supposons que $f = q \star W$ vérifie les hypothèses suivantes :

Hypothèses 1.6. *Étant donné un paramètre $\beta > 0$ on suppose que :*

- $\forall x \in \mathbb{R}^d, q \geq 0$.
- *Il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\forall x \in U, q(x) > 0$.*
- $\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_d, q(\pm x_{\sigma(1)}, \dots, \pm x_{\sigma(d)}) = q(x_1, \dots, x_d)$.
- $q \in \mathcal{C}^{10}(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha q \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour chaque multi-index α avec $|\alpha| \leq 10$.
- $\exists C > 0, \forall |x| \geq 1, \max(q(x), |\nabla q(x)|) \leq \frac{C}{|x|^\beta}$.

Ces hypothèses permettent de définir rigoureusement $f = q \star W$, de plus les symétries sur q se transmettent $\kappa = q \star q$. Par exemple, si nous sommes en dimension 2, alors la loi de f est invariante par rotation de l'espace d'angle $\pi/2$. La régularité demandée sur q permet de voir f comme une fonction continue et même \mathcal{C}^2 . Nous avons plus précisément la proposition suivante.

Proposition 1.7 ([NS15]). Si q satisfait les hypothèses 1.6 pour un $\beta > d$, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Il existe une modification notée f de $q \star W$ qui est dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors presque sûrement les ensembles $\{f \geq -\ell\}$ et $\{f \leq -\ell\}$ sont des variétés \mathcal{C}^1 -différentiables à bord. De plus, $\partial\{f \geq -\ell\} = \partial\{f \leq -\ell\} = \{f = -\ell\}$.
- Pour chaque $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ deux à deux distincts alors $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est non dégénéré.
- La loi de f est ergodique pour le flot de translations sur \mathbb{R}^d .

Remarque 1.8. Ces hypothèses ne sont pas optimales, cependant pour le champ de Bargmann-Fock, alors q est explicite (1.5) et vérifie ces hypothèses pour n'importe quel paramètre $\beta > 0$. On peut en fait montrer que le champ de Bargmann-Fock admet presque sûrement une modification qui est analytique.

2 La percolation des ensembles nodaux

Nous présentons dans cette partie la notion de percolation pour les sur-niveaux d'une fonction aléatoire. Nous donnons un peu d'intuition en faisant le lien avec ce qui est connu pour la percolation de Bernoulli et présentons certains résultats principaux ainsi que quelques idées de preuve.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un niveau, on rappelle qu'on note $\mathcal{E}_\ell(f) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq -\ell\}$. Alors on s'intéresse au nombre $N_\ell(f)$ de composantes connexes non bornées de $\mathcal{E}_\ell(f)$. Cette quantité $N_\ell(f)$ est invariante par translation. Puisque f est ergodique (proposition 1.7) alors il existe une constante $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (dépendant de ℓ) telle que $N_\ell(f) = k$ presque sûrement.

Par ailleurs nous avons clairement $\ell < \ell' \Rightarrow \mathcal{E}_\ell(f) \subset \mathcal{E}_{\ell'}(f)$ et donc $N_\ell(f) > 0 \Rightarrow N_{\ell'}(f) > 0$. Cela amène à la définition suivante :

Définition 2.1. Le niveau critique pour q est défini par

$$\ell_c = \ell_c(q) := \sup\{\ell \in \mathbb{R} \mid N_\ell(f) = 0 \text{ p.s.}\} \quad (2.1)$$

On observe une transition de phase autour du niveau ℓ_c (voir figure 4). En effet, si $\ell > \ell_c$ alors presque sûrement il y a (au moins) une composante connexe non bornée dans $\mathcal{E}_\ell(f)$ alors que si $\ell < \ell_c$ presque sûrement on a que toutes les composantes connexes de $\mathcal{E}_\ell(f)$ sont bornées.

Ceci est à mettre en parallèle avec le modèle de Bernoulli. En effet, dans ce modèle, chaque arête $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ de \mathbb{Z}^d se voit associer une variable uniforme sur $[0, 1]$ notée X_e (ces variables étant indépendantes pour chaque arête). Disons que l'arête e est ouverte au niveau $p \in [0, 1]$ si $X_e \geq 1 - p$. Alors de même il existe un paramètre critique $p_c(d)$ tel que si $p < p_c(d)$ il n'y a pas de cluster ouvert infini presque sûrement, et si $p > p_c(d)$ il y a presque sûrement un cluster infini.

Modèle continu \mathbb{R}^d	Modèle de Bernoulli \mathbb{Z}^d
f un champ gaussien centré stationnaire	$(X_e)_{e \in E(\mathbb{Z}^d)}$ des variables uniforme sur $[0, 1]$
$\ell \in \mathbb{R}$	$p \in [0, 1]$
$\mathcal{E}_\ell(f) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq -\ell\}$	$\mathcal{E}_p\{e \in E(\mathbb{Z}^d) \mid X_e \geq 1 - p\}$

FIGURE 1 – Parallèle entre le modèle Bernoulli et le modèle continu.

Cependant, si de nombreux résultats sont connus concernant le comportement du modèle de Bernoulli, il est souvent très technique voire impossible de les transmettre directement au cas continu. Effectivement, le modèle de Bernoulli dispose de certaines propriétés cruciales dont ne bénéficient pas nos modèles continus. La première est bien entendu l'indépendance du statut de deux arêtes de \mathbb{Z}^d . Pour un champ comme Bargmann-Fock, la corrélation entre deux sites x et y est de l'ordre de $\exp(-\|x - y\|_2^2/2)$ ainsi on peut espérer de la quasi-indépendance lorsque les sites sont loins. Malgré cela, le champ de Bargmann-Fock est presque sûrement analytique, ainsi toute réalisation de ce champ est complètement déterminée par la restriction de cette réalisation à un petit ouvert non vide. Cela empêche le champ d'avoir la propriété d'**énergie finie**. Cette propriété consiste à dire que quelque soit le conditionnement effectué sur le champ excepté en un point, alors la probabilité que ce point soit dans $\mathcal{E}_\ell(f)$ ou non est toujours uniformément bornée loin de 0 et de 1. Cette propriété échoue pour nos modèles continus. Néanmoins de nouveaux outils provenant de la théorie des variables gaussiennes et des champs gaussiens vont pouvoir être utilisés (notamment le théorème 2.13).

Nous présentons dans la suite des résultats récents concernant $\mathcal{E}_\ell(f)$ en dimension 2 et aussi quelques résultats un peu moins précis en dimension $d \geq 3$.

2.1 Le cas $d = 2$

Le cas de la dimension $d = 2$ est certainement le cas le mieux compris de nos jours. On regarde un champ planaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. L'un des résultats centraux est celui qui décrit

une transition de phase au niveau critique $\ell_c(q) = 0$. Notons par ailleurs que ce résultat est une forme d'analogue du résultat de Kesten [Kes+80] pour la percolation de Bernoulli où $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$.

Avant d'annoncer le résultat essayons de motiver en quoi le niveau 0 joue un rôle particulier. Un argument essentiel dans la preuve de Kesten, est un argument de dualité, or ici nous disposons d'un résultat similaire. Effectivement puisque f est un champ gaussien centré, alors f et $-f$ ont la même loi. Ainsi les ensembles aléatoires $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq 0\}$ ont même loi. Cette dualité intervient aussi au niveau des événements de traversée.

Définition 2.2. Soit $a, b > 0$, on considère le rectangle $\mathcal{R} = [0, a] \times [0, b]$, et on note $\text{Cross}_\ell(a, b)$ l'évènement, où il existe une composante connexe de $\mathcal{R} \cap \mathcal{E}_\ell(f)$ qui intersecte les côtés gauche et droite de \mathcal{R} (ie $\{0\} \times [0, b]$ et $\{a\} \times [0, b]$). (voir figure 2).

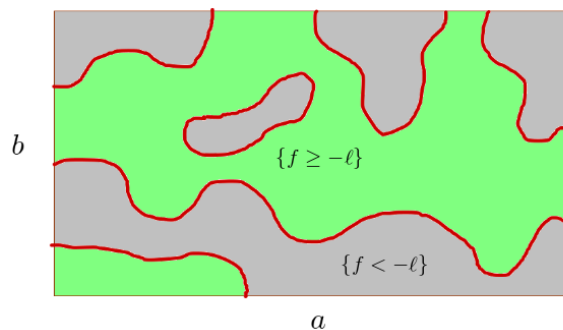


FIGURE 2 – Représentation de l'évènement $\text{Cross}_\ell(a, b)$.

Alors on observe que l'évènement complémentaire de $\text{Cross}_0(a, a)$ est l'évènement où il existe une composante de $\{f < 0\}$ reliant le côté haut et bas du carré $[0, a] \times [0, a]$. Mais puisque f et $-f$ ont la même loi, et puisque q est invariant par rotation, alors on voit que $\mathbb{P}(\text{Cross}_0(a, a)) = \mathbb{P}((\text{Cross}_0(a, a))^c)$. Ainsi nous avons pour $a > 0$ alors $\mathbb{P}[\text{Cross}_0(a, a)] = 1/2$.

Cette propriété est un cas particulier de la propriété RSW (Russo-Seymour-Welsh) que nous énonçons maintenant.

Proposition 2.3 ([BG17], [RV19]). Sous les hypothèses (1.6) pour un $\beta > 4$, alors pour $a, b > 0$ il existe $c > 0$ tel que :

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\text{Cross}_0(aR, bR)] \geq c > 0. \quad (2.2)$$

Remarque 2.4. Notons que ce résultat est originellement prouvé pour des champs vérifiant les hypothèses 1.6 avec $\beta > 325$ [BG17], cela a été amélioré à $\beta > 16$, puis à $\beta > 4$ [RV19].

Cette proposition est l'analogue d'un résultat connu pour la percolation de Bernoulli mais ce résultat sera la clé d'entrée pour l'étude des champs gaussiens en dimension 2. Moralement la forme de notre rectangle étant fixé, alors quelque soit sa taille, il y aura toujours une propriété uniformément minorée de le traverser dans $\mathcal{E}_0(f)$. Notons que la constante c n'est pas vraiment explicite mais la force de la proposition vient qu'on minore des probabilités de traversée pour des objets de tailles arbitrairement grande.

Enfin un autre outil utile pour la preuve de Kesten est l'inégalité *FKG* (Fortuin–Kasteleyn–Ginibre), qui elle aussi est valable pour le cas de Bernoulli. Nous introduisons la notion d'évènement croissant :

Définition 2.5. Soit A un évènement, pour $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on note $f \in A$ pour signifier que l'évènement A est réalisé par f . L'évènement aléatoire A est dit **évènement croissant**, si $f \in A \Rightarrow \forall h \geq f, h \in A$.

Un évènement est croissant si une augmentation des valeurs de f ne peut que favoriser la réalisation de l'évènement.

Exemple. Un exemple fondamental est que $\text{Cross}_\ell(a, b)$ est un évènement croissant. En effet si $\mathcal{E}_\ell(f) = \{f \geq -\ell\}$ traverse le rectangle $[0, a] \times [0, b]$ et si $h \geq f$ alors $\mathcal{E}_\ell(h)$ réalise également cette traversée.

Pour les champs gaussiens nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.6 ([Pit82]). Sous l'hypothèse que $\kappa \geq 0$, si A et B sont deux évènements croissants qui sont mesurables par rapport aux valeurs de f dans un compact, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \quad (2.3)$$

Cette proposition peut s'interpréter en terme d'évènements de traversées par exemple, en disant que si une traversée positive s'est déjà produite alors il est davantage probable qu'une autre traversée positive se produise également.

À présent nous donnons un schéma de preuve pour montrer que sous nos hypothèses 1.6 alors presque sûrement il n'y a pas de composante non bornée dans $\mathcal{E}_0(f)$ (ceci montre donc une inégalité $\ell_c(q) \geq 0$).

L'idée est la suivante : on considère des anneaux $A_n = [-2^{n+1}, 2^{n+1}]^2 \setminus [-2^n, 2^n]^2$. Et nous regardons l'évènement $\text{Ann}_0(A_n)$ qu'il existe une composante connexe de $\{f < 0\}$ dans A_n qui contienne un cycle entourant $[-2^n, 2^n]$ (voir figure 3). À présent on observe que l'évène-

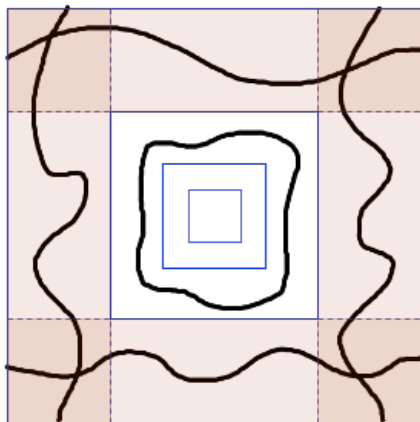


FIGURE 3 – Les anneaux A_n et deux circuits, le circuit le plus extérieur est provoqué par la présence d'une traversée dans chacun des quatre grands rectangles.

ment $\text{Ann}_0(A_n)$ est impliqué par l'occurrence de 4 traversées négatives dans les 4 rectangles qui recouvrent cet anneau (voir figure 3). Or ces évènements sont tous décroissants et donc positivement corrélés par la proposition 2.6. De plus, la proposition 2.3 (pour $a = 1, b = 1/4$) implique qu'il existe $c > 0$ qui minore la probabilité de chacun de quatre ces évènements (le c ne dépend pas de n). Notons qu'on utilise ici le fait que f et $-f$ ont la même loi. Ainsi, par la proposition 2.6, on a pour tout n assez grand, $\mathbb{P}(\text{Ann}_0(n)) \geq c^4 > 0$.

Maintenant on veut utiliser un argument du type Borel Cantelli pour dire que presque sûrement au moins l'un des évènements $\text{Ann}_0(A_n)$ va se produire, garantissant que presque sûrement la composante connexe de 0 dans $\{f \geq 0\}$ est bornée (et donc qu'en fait presque sûrement, il n'y a pas de composante connexe infinie non bornée par un argument classique).

Bien sûr les différents évènements $\text{Ann}_n(A_n)$ ne sont pas indépendants quand n varie et donc on ne peut pas conclure si simplement. Une manière de résoudre le problème est de considérer uniquement des anneaux A_n assez espacés les uns des autres et d'utiliser des résultats de décorrélation pour les champs gaussiens à décroissance rapide (voir [RV19]).

Nous énonçons maintenant le théorème principal.

Théorème 2.7 ([RV20], [MV20], [Mui+20]). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un champ gaussien avec q vérifiant les hypothèse 1.6 pour $\beta > 40$, Alors :

- $\ell_c(q) = 0$.
- Si $\ell > 0$ alors presque sûrement il y a une seule composante non bornée dans $\mathcal{E}_\ell(f)$.
- La transition est "sharp" c'est à dire :

$$\forall \ell > 0, \forall a, b > 0, \exists c > 0, \forall R \geq 1, \mathbb{P}[\text{Cross}_\ell(aR, bR)] \geq 1 - e^{-cR}.$$

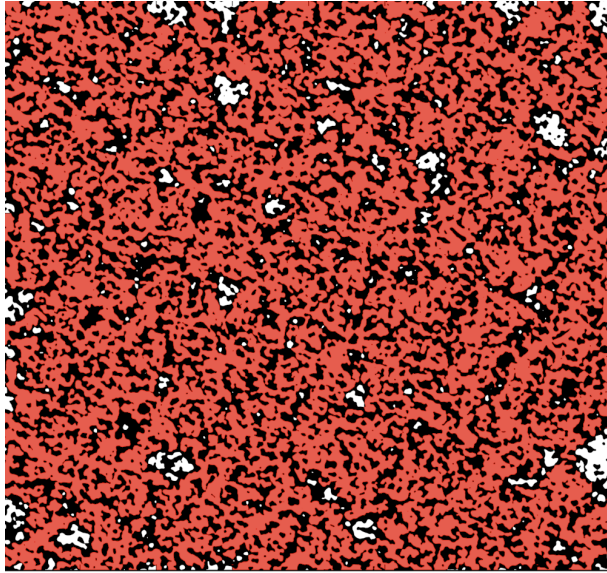


FIGURE 4 – En rouge, la composante géante de $\{f \geq -0.1\}$, en noir l'ensemble $\{f < -0.1\}$, en blanc les autres composantes de $\{f \geq -0.1\}$. Ici f est un champ de Bargmann-Fock planaire (figure par A. Rivera).

Remarque 2.8. Notons que ce théorème a été prouvé pour la première fois pour le champ de Bargmann-Fock, le résultat a ensuite été amélioré pour une vaste variété de champs gaussiens. De plus, dans [Mui+20] les auteurs parviennent à éviter l'utilisation de la proposition 2.6, permettant une extension à des champs gaussiens avec des corrélations négatives (certains résultats sur le caractère "sharp" de la transition sont néanmoins perdus).

Commentons ce résultat, le premier point complète l'argument détaillé précédemment. Nous avons $\ell_c(q) = 0$ en dimension 2 pour une vaste variété de champs gaussiens. Le deuxième point est un petit raffinement qui montre qu'en plus il y a unicité de la composante non bornée en surcritique ($\ell > \ell_c$). Enfin le caractère "sharp" de la transition de phase signifie que la composante non bornée est "dense" au sens où elle traverse des grands rectangles avec une très grande probabilité.

2.2 De nouvelles difficultés pour $d \geq 3$

Le cas de la dimension $d \geq 3$, est bien plus compliqué notamment car nous perdons totalement la notion de dualité qui était fondamentale pour l'étude de $d = 2$.

Une première observation est que la restriction d'un champ gaussien $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ à un plan (par exemple $\mathbb{R}^2 \times \{0\}^{d-2}$ nous donne un nouveau champ gaussien $g = f|_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}^{d-2}}$ qui est planaire. Ainsi on sait, par le théorème 2.7 que si $\ell > 0$, alors presque sûrement il y a une composante non bornée de $\{g \geq -\ell\}$ dans le plan. Ceci implique en particulier l'existence d'une composante non bornée de $\mathcal{E}_\ell(f)$. Ainsi on voit que si $d \geq 3$, alors $\ell_c(q) \leq 0$. La première question naturelle est de se demander si on a $\ell_c(q) < 0$ ou non. On peut voir que la restriction du champ à tout plan fixé ne percole pas au niveau 0, cependant avec l'ajout d'une dimension supplémentaire on peut espérer avoir l'apparition d'une composante non bornée pour un surniveau $\mathcal{E}_\ell(f)$ avec $\ell \leq 0$. Ce problème a été résolu sous nos hypothèses habituelles.

Théorème 2.9 ([Dum+23]). *Supposons que $d \geq 3$, et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un champ gaussien satisfaisant les hypothèses 1.6 pour $\beta > d$, alors $\ell_c(q) < 0$.*

Une autre question est de comprendre s'il y a unicité ou non de la composante non bornée lorsqu'il y a percolation ($\ell > \ell_c(q)$). Cette question a également reçue une réponse affirmative. L'argument derrière ce résultat diffère vraiment de celui utilisé pour traiter le modèle de Bernoulli. En effet, un argument d'énergie finie était de mise, argument dont nous ne disposons absolument pas. À la place, une propriété des champs gaussiens est utilisée, il s'agit du théorème de Cameron Martin.

Définition 2.10. Soit $(f(x))_{x \in X}$ un champ gaussien centré. Nous considérons E le sous espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ engendré par les $(f(x))_{x \in X}$ et nous notons F sa fermeture

dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nous définissons :

$$P : F \rightarrow \mathbb{R}^X \\ \xi \mapsto (x \mapsto \mathbb{E}[\xi f(x)]) .$$

Nous définissons également $H := P(F)$ et nous munissons H du produit scalaire $\langle h_1, h_2 \rangle_H := \mathbb{E}[P^{-1}(h_1)P^{-1}(h_2)]$.

Remarque 2.11. On vérifie que cette définition fait sens car P est clairement linéaire et injective. En effet, la linéarité est évidente et si $P(\xi) = 0$ alors $\forall x \in X, \mathbb{E}[\xi f_x] = 0$ et donc $\forall f \in E, \mathbb{E}[\xi f_x] = 0$ et donc cela vaut également pour $f \in F$ par densité (en particulier $\mathbb{E}[\xi^2] = 0$ ce qui montre que $\xi = 0$).

Remarque 2.12. L'espace F est un espace de Hilbert (en tant que sous espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$). De plus, H est par définition isométrique à F au travers de P , ainsi H est un espace de Hilbert appelé espace de Cameron Martin associé au processus $(f_x)_{x \in X}$.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de Cameron Martin.

Théorème 2.13 ([Jan97]). *Soit $(f_x)_{x \in X}$ un processus gaussien centré, et H l'espace de Cameron martin associé. Soit $h \in H$, alors les lois de f et de $f + h$ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre.*

Plus précisément pour E un mesurable de \mathbb{R}^X on a :

$$\mathbb{P}(f + h \in E) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{f \in E} \exp(P^{-1}(h) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[P^{-1}(h)^2])].$$

Corollaire 2.14. *Si $(f_x)_{x \in X}$ un processus gaussien centré, et $h \in H$ dans l'espace de Cameron Martin, alors pour tout E mesurable de \mathbb{R}^X on a :*

$$\mathbb{P}(f \in E) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(f + h \in E) > 0.$$

Avec ce corollaire nous pouvons donner une esquisse d'un argument pour montrer que presque sûrement $\{f \geq -\ell\}$ contient au plus une composante non bornée.

Effectivement, rappelons que $N_\ell(f)$ compte le nombre de composantes non bornées de $\mathcal{E}_\ell(f)$. Cette variable aléatoire est constante presque sûrement par ergodicité. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tel que $N_\ell(f) = k$ presque sûrement.

Alors, quitte à prendre un $R > 0$ assez grand (mais fixé), la probabilité que B_R intersecte les k composantes géantes est plus grande que $3/4$. Pour ce R fixé, il existe un $M > 0$ tel que la probabilité que l'infimum du champ f sur B_R soit plus grand que $-M$ est plus grande que $3/4$.

On considère maintenant une fonction $h \in H$ de l'espace de Cameron Martin telle que $h \geq 0$ et h est plus grande que $-\ell + M$ sur B_R (une telle fonction peut être construite sous nos hypothèses 1.6).

On voit que les k composantes non bornées de f vont "fusionner" pour $f + h$. Des détails techniques (utilisant la décroissance de h à l'infini) permettent de voir que de nouvelles composantes non bornées ne peuvent se former.

Ainsi $\mathbb{P}(N_\ell(f + h) = k) = 0$ alors que $\mathbb{P}(N_\ell(f) = k) = 1$ ce qui contredit le corollaire 2.14.

Il reste cependant à bien comprendre pourquoi l'ajout de h à f ne rajoute pas de composante non bornée dans $\mathcal{E}_\ell(f + h)$. Il reste également à traiter le cas où il y aurait un nombre infini de composantes non bornées ($N_\ell(f) = \infty$). Ce travail a été effectué assez récemment par Severo, et nous avons le résultat suivant

Théorème 2.15 ([Sev22]). *Si f est un champ gaussien satisfaisant les hypothèses 1.6 pour $\beta > d$, alors si $\ell \in \mathbb{R}$ est fixé, presque sûrement il y a au plus une composante non bornée de $\{f \geq -\ell\}$.*

3 Problèmes ouverts et conjectures

Nous présentons ici quelques problèmes encore non résolus donc certains ont pour vocation d'être étudiés pendant ma thèse et dont certains ont déjà quelques pistes de résolutions.

3.1 Géométrie des traversées

Le premier problème est celui de la distance chimique (chemical distance). La motivation est la suivante, on se place au niveau $\ell > \ell_c$, ainsi par les théorèmes 2.7 (pour $d = 2$) et sinon 2.15 pour ($d = 2$ et $d \geq 3$), alors il existe une unique composante non bornée de $\mathcal{E}_\ell(f)$. Si deux points, x, y sont dans une même composante connexe de $\mathcal{E}_\ell(f)$ (on note $x \xleftrightarrow{\mathcal{E}_\ell(f)} y$) alors on peut considérer la plus courte longueur d'un chemin continu joignant x et y et contenu dans $\mathcal{E}_\ell(f)$. Cette longueur minimale est appelée la distance chimique entre les points x et y (par convention cette distance vaut $+\infty$ si les deux points ne sont pas connectés dans $\mathcal{E}_\ell(f)$).

Définition 3.1. Si $x, y \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$d_\ell(x, y) := \inf\{\text{longueur}(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathcal{E}_\ell(f)), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

Le premier problème est le suivant

Problème 3.2. Si f est un champ gaussien centré satisfaisant 1.6 pour un $\beta > d$, alors pour $\ell > \ell_c(q)$, il existe des constantes $C, c, \rho, \alpha > 0$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, |x| \geq C \Rightarrow \mathbb{P}(0 \xleftrightarrow{\mathcal{E}_\ell(f)} x \text{ et } d_\ell(0, x) \geq \rho|x| \log|x|^\alpha) \leq \exp(-|x|^c).$$

Autrement dit ce problème consiste à demander si lorsque deux points sont connectés dans un surniveau supercritique, alors on peut les relier via un chemin d'une longueur quasi-linéaire.

Notons que ce problème admet une réponse positive pour la percolation de Bernoulli. Il s'agit d'un théorème de Agoston et Pisztorá [AP96] qui dit pour $p > p_c$ pour la percolation de Bernoulli alors un résultat similaire a lieu (sans avoir besoin du terme logarithmique).

Une réponse affirmative au problème peut vraisemblablement être donnée dans le cas $d = 2$ (grâce notamment aux résultats du théorème 2.7). Pour le cas de la dimension supérieure, une réponse affirmative peut être donnée sous réserve d'un résultat de sharpness locale de la transition de phase. Ce résultat fait l'objet du second problème

Problème 3.3. Si $\ell > \ell_c(q)$, alors notons $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$ les composantes connexes de $\mathcal{E}_\ell(f) \cap B_R$ ordonnées par diamètre décroissant ($\text{diam}(\mathcal{C}_1) \geq \text{diam}(\mathcal{C}_2) \geq \dots$). Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $R \geq 1$

$$\mathbb{P}[\text{diam}(\mathcal{C}_2) \geq \frac{R}{100}] \leq \exp(-R^c).$$

Autrement dit dans une boule de taille R , alors il y a au plus une (et en fait exactement une) grosse composante de $\mathcal{E}_\ell(f)$ les autres seront de petits diamètres.

Ce résultat de sharpness local avec un argument de renormalisation permet moralement d'obtenir le problème 3.2. Le problème 3.3 quant à lui, a un analogue pour le modèle de Bernoulli qui est vérifié (voir [Pis96]), et il est conjecturé dans la littérature qu'il doit être valable pour notre modèle continu (voir [Dum+23] remarque 1.9 ou la discussion dans [Sev21]). Cependant, ce problème peut déjà être résolu pour $\ell > -\ell_c(q)$ en utilisant un résultat récent de Severo [Sev21].

Un autre problème est l'étude de $\mathcal{E}_0(f)$ en dimension 2. On sait déjà que cet ensemble ne percole pas (par le théorème 2.7). Cependant des questions se posent quand à la géométrie de cet ensemble conditionnellement à avoir une traversée.

Problème 3.4. Soit $\mathcal{R} = [0, a] \times [0, b]$ un rectangle, et $N \geq 1$ un entier. Alors conditionnellement à l'évènement $\text{Cross}_0(N\mathcal{R})$ est-ce que la probabilité que dans $N\mathcal{R}$ la longueur du chemin traversant le plus bas ait une longueur plus grande que $N^{1+\varepsilon}$. tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini ?

Un problème similaire a été étudié pour le modèle de Bernoulli [DHS21]. Une version plus faible de ce problème est d'obtenir une longueur qui tend vers l'infini plus vite que N avec grande probabilité.

3.2 Quelques mots sur le champ libre gaussien

Finalement, je conclus par quelques problèmes ouverts concernant le champ libre gaussien. Bien que je n'en ai pas traité dans ce mémoire, il a fait l'objet de mon stage de M2. Pour rappel, le champ libre gaussien discret ($DGFF$ pour discrete gaussian free field) est un champ gaussien naturel f_δ défini sur les sommets d'un réseau triangulaire δT (dont les arêtes sont de taille δ) intersecté avec un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{C}$ dont le bord topologique est formé d'arêtes du réseau.

Si on conditionne le champ f_δ à valoir -1 sur la "moitié" du bord de Ω et 1 sur l'autre moitié, alors l'extension affine par morceaux de f_δ à Ω possède un lieu d'annulation $Z(f_\delta)$ dont une seule composante γ_δ rejoint dans Ω les points du bord où f_δ change de signe. En 2009, O. Schramm et S. Sheffield démontrent le résultat suivant

Théorème 3.5 ([SS09]). *L'interface γ_δ converge vers $SLE(4)$ quand δ converge vers 0.*

Par ailleurs, le champ libre gaussien discret converge lorsque δ tend vers 0 vers une distribution aléatoire appelée le champ libre gaussien (GFF). Cela permet de définir de manière rigoureuse une interface γ dont la loi est $SLE(4)$ et qui s'interprète comme un lieu d'annulation du GFF ([SS10]).

Le champ libre gaussien lisse ($CGFF$ continuous gaussian free field) d'énergie L sur Ω est formé comme une combinaison linéaire des fonctions propres du Laplacien sur Ω , avec condition au bord nulle et dont la valeur propre associée est plus petite que L . Les coefficients de cette combinaison linéaire sont des variables gaussiennes indépendantes centrées et de variance l'inverse de la valeur propre. On peut ajouter à ce champ la fonction harmonique qui vaut -1 sur une moitié de la frontière de Ω et 1 sur l'autre moitié. Il existe alors encore une fois une unique interface γ_L , lieu d'annulation du champ qui relie les 2 points de discontinuité sur le bord. Dans [Sch11], O. Schramm pose le problème suivant

Problème 3.6. *Est-ce que γ_L converge vers $SLE(4)$ lorsque $L \rightarrow \infty$?*

En effet, il est connu que le $CGFF$ converge vers le GFF au sens des distributions lorsque $L \rightarrow \infty$. Cependant, le $CGFF$ est un champ réel analytique, aussi il ne dispose absolument pas de la propriété de Markov qui est pourtant un outil crucial dans [SS09].

Des versions plus faibles de ce problème existent :

Problème 3.7. *Est-ce que la longueur de γ_L diverge vers $+\infty$ lorsque $L \rightarrow \infty$?*

Puisque la dimension de hausdorff d'une courbe $SLE(4)$ est strictement plus grande que 1, alors une réponse positive au problème 3.6 entraîne une réponse positive au problème 3.7.

Un autre de type de question est sur l'existence d'une propriété RSW (voir 2.3) pour $\{f_L > 0\}$. En effet une conséquence du résultat de O. Schramm et S. Sheffield (théorème 3.5) est une propriété de RSW pour le $DGFF$.

Théorème 3.8. *Pour $\mathcal{R} \subset \Omega$ un rectangle fixe, alors*

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}[\text{il existe une composante de } \{f_\delta > 0\} \text{ qui traverse } \mathcal{R}] > 0.$$

Une question analogue se pose donc pour le $CGFF$

Problème 3.9. *Pour $\mathcal{R} \subset \Omega$ un rectangle fixe, alors*

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\text{il existe une composante de } \{f_L > 0\} \text{ qui traverse } \mathcal{R}] > 0.$$

Il est envisageable d'attaquer ce problème sans avoir résolu le problème 3.6, via des arguments plus généraux semblables à ceux de V. Tassion [Tas16].

Références

- [Kos77] JM KOSTERLITZ, *The d -dimensional Coulomb gas and the roughening transition*, Journal of Physics C : Solid State Physics 10.19 (1977), p. 3753.
- [Kes+80] Harry KESTEN et al., *The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$* , Communications in mathematical physics 74.1 (1980), p. 41-59.
- [Pit82] Loren D PITT, *Positively correlated normal variables are associated*, The Annals of Probability (1982), p. 496-499.
- [AP96] Peter ANTAL et Agoston PISZTORA, *On the chemical distance for supercritical Bernoulli percolation*, The Annals of Probability 24.2 (1996), p. 1036-1048.
- [Pis96] Agoston PISZTORA, *Surface order large deviations for Ising, Potts and percolation models*, Probability Theory and Related Fields 104 (1996), p. 427-466.
- [Jan97] Svante JANSON, *Gaussian hilbert spaces*, 129, Cambridge university press, 1997.
- [SS09] Oded SCHRAMM et Scott SHEFFIELD, *Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field*, Acta Mathematica 202.1 (2009), p. 21-137, DOI : 10.1007/s11511-009-0034-y.
- [SS10] Oded SCHRAMM et Scott SHEFFIELD, *A contour line of the continuum Gaussian free field*, 2010, DOI : 10.48550/ARXIV.1008.2447.
- [Sch11] Oded SCHRAMM, *Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems*, Selected Works of Oded Schramm (2011), p. 1161-1191.
- [Le 13] Jean-François LE GALL, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, 2013.
- [NS15] Fedor NAZAROV et Mikhail SODIN, *Asymptotic laws for the spatial distribution and the number of connected components of zero sets of Gaussian random functions*, arXiv preprint arXiv :1507.02017 (2015).
- [Tas16] Vincent TASSION, *Crossing probabilities for Voronoi percolation*, The Annals of Probability 44.5 (2016), p. 3385-3398, DOI : 10.1214/15-AOP1052.
- [BG17] Vincent BEFFARA et Damien GAYET, *Percolation of random nodal lines*, Publications mathématiques de l’IHÉS 126.1 (2017), p. 131-176.
- [RV19] Alejandro RIVERA et Hugo VANNEUVILLE, *Quasi-independence for nodal lines*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques 55.3 (2019), p. 1679-1711, DOI : 10.1214/18-AIHP931.
- [MV20] Stephen MUIRHEAD et Hugo VANNEUVILLE, *The sharp phase transition for level set percolation of smooth planar Gaussian fields* (2020).
- [Mui+20] Stephen MUIRHEAD et al., *The phase transition for planar Gaussian percolation models without FKG*, arXiv preprint arXiv :2010.11770 (2020).
- [RV20] Alejandro RIVERA et Hugo VANNEUVILLE, *The critical threshold for Bargmann–Fock percolation*, Annales Henri Lebesgue 3 (2020), p. 169-215.
- [DHS21] Michael DAMRON, Jack HANSON et Philippe SOSOE, *Strict Inequality for the Chemical Distance Exponent in Two-Dimensional Critical Percolation*, Communications on Pure and Applied Mathematics 74.4 (2021), p. 679-743.
- [Sev21] Franco SEVERO, *Sharp phase transition for Gaussian percolation in all dimensions*, arXiv preprint arXiv :2105.05219 (2021).
- [Sev22] Franco SEVERO, *Uniqueness of unbounded component for level sets of smooth Gaussian fields*, arXiv preprint arXiv :2208.04340 (2022).
- [Dum+23] Hugo DUMINIL-COPIN et al., *Existence of an unbounded nodal hypersurface for smooth Gaussian fields in dimension $d > 3$* , The Annals of Probability 51.1 (2023), p. 228-276.