INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE

BAPTISTE SERRAILLE

Sous la supervision de Sobhan Seyfaddini

Résumé. Nous faisons ici une courte introduction à un domaine de recherche, la géométrie symplectique. Nous abordons ensuite les sujets qui nous intéresserons particulièrement pendant notre thèse, les théorèmes de non-tassement ainsi que les invariants spectraux et leurs relations avec la topologie de contact C^0.

Table des matières

1. Introduction 1
1.1. La mathématisation de la mécanique classique, la géométrie symplectique 1
2. Quelques résultats importants de la géométrie symplectique 3
2.1. La conjecture d'Arnol'd 3
2.2. Le théorème de Liouville et le théorème de non-tassement de Gromov 4
3. Géométrie de contact 6
3.1. Définitions 6
3.2. Symplectisation et contactification 7
3.3. Non-tassement en géométrie de contact 7
4. Fonctions génératrices et non-tassement en géométrie symplectique et de contact 7
4.1. Définition des fonctions génératrices et les invariants spectraux associés 8
4.2. Non-tassement à grandes échelles et raffinement d'invariants spectraux par des techniques équivariantes 11
Références 11

1. Introduction

Dans cette introduction, nous allons présenter les objets principaux de la géométrie symplectique et de contact.

1.1. La mathématisation de la mécanique classique, la géométrie symplectique.

1.1. La mathématisation de la mécanique classique, la géométrie symplectique. La géométrie symplectique est, à l'origine, la mathématisation des équations de la dynamique hamiltonienne.

1.1.1. *L'espace des phases.* Admettons que l'on veuille comprendre le mouvement d'une masse M accrochée à un ressort et qui n'est soumis qu'à la force exercée par le ressort, on suppose de plus que la masse M bouge en ligne droite le long de l'axe $\mathbf{x}$. On note $x(t)$ la position de M à un instant t. Les applications des lois de la mécanique classique nous renseigne alors que

$$\ddot{x}(t) = -kx,$$

pour une constante $k > 0$. Il est alors possible de résoudre cette équation différentielle

$$x(t) = \alpha \cos\left(\sqrt{k}t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{k}t\right),$$

où α et β sont deux réels qui dépendent de la position et de la vitesse initiale de l'objet. L'évolution de la masse M est uniquement déterminée par sa position et sa vitesse initiale, c'est pourquoi nous introduisons l'**espace des phases**, qui suit simultanément l'évolution de ces deux quantités au cours du temps.

Notons ainsi $y(t) = \dot{x}(t)$, le mouvement de notre ressort peut maintenant être décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -kx. \end{cases}$$

On a découplé l'équation différentielle de degré 2 en deux équations différentielles de degré 1. L'espace de nos équations doublera donc en dimension mais l'équation différentielle sous-jacente perdra un degré.

Cette procédure est plus générale que le cas du ressort. Chaque système régit par les équations de la mécanique newtonienne peut être mis sous une forme similaire. Soit $\mathcal{S}$ un tel système qui comporte des particules avec n degré de libertés au total. On note $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ les n degrés de liberté de nos particules (l'espace des configurations), on note également $\mathbf{p} = (p^1, \dots, p^n)$ la quantité de mouvement associée à $\mathbf{q}$. Si les interactions entre particules sont régies par un potentiel $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{q} \mapsto V(\mathbf{q})$, alors l'énergie du système est

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V(\mathbf{q}),$$

et le flot hamiltonien g^t associé est décrit par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p^i}, \\ \dfrac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases} \tag{1}$$

Le flot hamiltonien a comme propriété que chaque trajectoire suit un niveau d'énergie du hamiltonien H. Cela correspond à la **conservation** de l'énergie du système. Une autre quantité intéressante qui est préservée par le flot hamiltonien est le volume. On note

$$\Omega := \mathrm{d}q_1 \cdots \wedge \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}p_1 \cdots \wedge \mathrm{d}p_n$$

le forme de volume standard de $\mathbb{R}^{2n}$.

Théorème 1 (Théorème de Liouville)**.** *Le flot hamiltonien préserve la forme volume standard Ω de $\mathbb{R}^{2n}$, c'est-à-dire que*

$$\left(g^t\right)^* \Omega = \Omega.$$

Nous verrons une preuve de ce théorème dans la section suivante.

1.1.2. *Le formalisme.* Soit M une variété lisse, on dit que ω est une **forme symplectique** si ω est une 2-forme différentielle fermée et non-dégénérée, en d'autres mots que $\mathrm{d}\omega = 0$ et que pour tout $q \in M$ la forme quadratique induite par ω sur l'espace tangent T_qM est non-dégénérée. Il suit par des propriétés standards de réduction des endomorphismes que toute variété symplectique est de dimension paire, disons $2n$, dans ce cas $\omega^n/n!$ est la **forme volume** associée à ω sur M. Ce que l'on appelle une **variété symplectique** est la donnée de M et ω.

On donne un exemple du cas le plus simple de variété symplectique.

Exemple 1.1. *La variété $\mathbb{R}^{2n}$ munie des coordonnées $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ peut être munie de la structure symplectique standard au moyen de la 2-forme*

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

Cet exemple peut-être généralisé à tous les fibrés cotangent sur une variété différentielle. Soit B une variété différentielle, on définit alors la forme de Liouville λ sur son fibré cotangent T^*B. Soit $\mathbf{q}$ une carte locale pour une ouvert $U \subset B$, ces coordonnées induisent une carte $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sur T^*U. La **forme Liouville** est définie par,

$$\lambda := \mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{q}.$$

Une fois que l'on a la forme de Liouville on peut définir une forme symplectique sur le fibré cotangent par $\omega = -\mathrm{d}\lambda$, c'est la forme **symplectique standard** sur le fibré cotangent. Pour $B = \mathbb{R}^N$, on retrouve l'exemple précédent.

De la même manière qu'une variété différentielle peut-être décrite par une collection de cartes qui sont homéomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et dont les fonctions de transitions sont lisses, il est possible de définir une variété symplectique comme une collection de cartes toujours homéomorphes à des ouverts de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ et dont les applications de transition sont des difféomorphismes préservant les formes symplectiques. Le fait que ces deux définitions coïncident n'est a priori pas évident. Une direction est claire, si une variété M est obtenue par la donnée d'un atlas dont les applications de transition préservent les formes symplectiques, alors il est possible de recoller les formes symplectiques induites sur chacune des cartes en tirant en arrière la forme symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n}$, qui sera ainsi toujours non-dégénérée et fermée, ces deux conditions étant locales. Le sens réciproque est fourni par le théorème de Darboux.

Théorème 2 (Théorème de Darboux)**.** *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique. Pour tout point $q \in M$, il existe un voisinage ouvert U de q, V un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et un difféomorphisme $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\varphi^*\omega_0 = \omega$.*

Nous pouvons maintenant définir les symplectomorphismes et les difféomorphismes hamiltoniens.

Définition 1.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique, on dit que φ est un **symplectomorphisme** de M si φ est un difféomorphisme de M qui préserve ω, c'est-à-dire que $\varphi^*\omega = \omega$. Les symplectomorphismes de M forment un groupe, noté* $\mathrm{Symp}(M, \omega)$.

On peut définir le sous-groupe $\mathrm{Symp}_0(M, \omega) \subset \mathrm{Symp}(M, \omega)$ des symplectomorphismes isotopes à l'identité par des difféomorphismes symplectiques.

Soit Ψ_t une isotopie symplectique, c'est-à-dire une famille lisse de symplectomorphismes, on peut voir Ψ_t comme un flot. On définit un champ de vecteur X_t par

$$\partial_t \Psi_t = X_t \circ \Psi_t.$$

Comme pour tout t, on a $\Psi_t^*\omega = \omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \left(\Psi_t^*\omega\right) \\ &= \Psi_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t}\omega\right) \\ &= \Psi_t^* \left(\mathrm{d}(\iota_{X_t}\omega) + \iota_{X_t}\mathrm{d}\omega\right). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{d}\omega$ on a,

$$\mathrm{d}(\iota_{X_t}\omega) = 0.$$

De manière équivalente, si pour un champ de vecteur X_t, on a $\mathrm{d}(\iota_{X_t}\omega) = 0$, alors le flot de X_t est une isotopie symplectique. Le champ de vecteur X_t est appelé **champ de vecteur symplectique**. Lorsque la 1-forme $\iota_{X_t}\omega$ est même exacte, on dira que X_t est un **champ de vecteur hamiltonien** et une fonction $H\colon \mathbb{R}_t \times M \to \mathbb{R}$ telle que $\iota_{X_t}\omega = \mathrm{d}H$ est un **hamiltonien** de Ψ_t. Au temps 1, on dit que Ψ_1 est un **difféomorphisme hamiltonien**. On note $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ le groupe des difféomorphismes hamiltoniens.

Une notion importante en géométrie symplectique est la notion de sous-variété lagrangienne.

Définition 1.3. *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique, une sous-variété $L \subset M$ est dite **lagrangienne** si elle voit la forme symplectique s'annuler sur elle et qu'elle est de dimension maximale parmi de telles variétés (c'est-à-dire de dimension n).*

2. Quelques résultats importants de la géométrie symplectique

On fait le tour de quelques conjectures et résultats de géométrie symplectique.

2.1. La conjecture d'Arnol'd.

L'étude des systèmes dynamiques hamiltoniens a donné lieu à un certains nombre de conjecture. La plus célèbre étant la conjecture de Arnol'd.

Conjecture 2.1 (Conjecture de Arnol'd)**.** *Soit (M, ω) une variété symplectique close, alors pour tout φ difféomorphisme hamiltonien, le nombre de points fixes (non-dégénérées) de φ est au moins aussi grand que le nombre minimal de points critiques d'une fonction (de Morse) sur M.*

Définition 2.2. *Pour un point fixe q de φ, on dit que le point q est un **point fixe non-dégénérée** si $d_q\varphi$ n'admet pas 1 comme valeur propre.*

Cette conjecture semble pour l'instant hors de portée mais de nombreux progrès ont été fait. La conjecture de Arnol'd sous forme homologique a été démontrée pour une large classe de variété symplectique par Floer dans les années 80.

Théorème 3 (Floer [Fl86])**.** *Soit φ un difféomorphisme hamiltonien d'une variété symplectique fermée (M^{2n}, ω) (qui est symplectiquement asphérique et) dont tous les points fixes sont non-dégénérées admet au moins autant de points fixes que*

$$\dim H_*(M, \mathbb{Z}_2) = \sum_{i=0}^{2n} \dim H_i(M, \mathbb{Z}_2).$$

Définition 2.3. *Une variété symplectique (M, ω) est dite **symplectiquement asphérique** si pour toute sphère $S^2 \hookrightarrow M$, l'aire symplectique (obtenu en restreignant ω à la sphère) est toujours nulle.*

Remarque 2.4. *Les inégalités de Morse impliquent que le nombre de points critiques d'une fonction de Morse est au moins aussi grand que $\dim H_*(M)$. Il est cependant possible que le nombre minimal de points critiques d'une fonction de Morse soit strictement plus grand que $\dim H_*(M)$. Le théorème de Floer ne résout donc pas la conjecture de Arnol'd dans ces cas là.*

Remarque 2.5. *La formule de point fixe de Lefschetz nous donnait une égalité moins forte. En effet, on peut démontrer en général que le nombre minimal de points fixes d'un difféomorphisme doit être seulement plus grand que la somme alternée des dimensions des homologies de M.*

Les résultats les plus récents prennent en compte la torsion de l'homologie de M. Récemment, Bai et Xu ont ainsi démontré dans [BX] que la dimension de l'homologie de M à coefficients dans $\mathbb{Z}$ était une borne inférieure du nombre de points fixes d'un difféomorphisme hamiltonien.

Un autre objet intéressant de la géométrie symplectique est la notion de **sous-variété lagrangienne**, il s'agit des variétés de dimension maximale sur lesquelles la forme symplectique s'annule. Comme la forme symplectique ω sur M^{2n} est non-dégénérée, on peut démontrer que les variétés lagrangienne sont de dimension n.

2.2. **Le théorème de Liouville et le théorème de non-tassement de Gromov.** Avec les définitions de la section précédente, le théorème de Liouville est maintenant complètement clair. Comme la forme volume Ω de $\mathbb{R}^{2n}$ peut également s'écrire est $\Omega = \omega^n/n!$, elle est clairement préservée par un symplectomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$. Ceci est vrai sur toutes les variétés symplectiques.

Proposition 2.6. *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique et φ un symplectomorphisme de (M, ω), alors φ préserve la $2n$-forme volume associée Ω.*

Une question fondamentale en géométrie symplectique a été de savoir si le comportement d'un symplectomorphisme est beaucoup plus rigide que celui d'un difféomorphisme qui préserve les volumes. Le théorème de non-tassement de Gromov montre que les symplectomorphismes ne peuvent pas tasser des objets de la même manière que les difféomorphismes qui préserve le volume. Les questions de (non-)tassement en géométrie symplectique demandent si pour deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^{2n}$ munie de la structure symplectique standard, il existe un plongement symplectique de U dans V.
La première obstruction à l'existence d'un plongement symplectique est donc le volume des ouverts U et V.

Proposition 2.7. *Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$. Si $\int_V \Omega < \int_U \Omega$, alors il n'existe pas de plongement symplectique de U dans V.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un plongement symplectique $\psi : U \hookrightarrow V$, alors

$$\int_U \Omega = \int_{\psi(U)} \psi^* \Omega \leq \int_V \Omega.$$

C'est une contradiction avec la supposition de l'énoncé. □

Le résultat de Gromov montre que le volume des ouverts U et V n'est pas la seule obstruction à l'existence d'un plongement symplectique. Il introduit en 1985 dans [Gro85], l'étude des courbes pseudo-holomorphes en géométrie symplectique. Une des applications est le suprenant théorème suivant, qui exhibe deux ouverts, le premier à un volume fini mais n'admet pas de plongement symplectique dans le deuxième qui est pourtant de volume infini.

Théorème 4 (Corollaire 0.3.A. de [Gro85]). *Il n'y a pas de plongement symplectique de la boule de rayon R, $B^{2n}(R)$ dans le cylindre $C^{2n}(r) := \{(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q_n^2 + p_n^2 \leq r\}$, dès que $R > r$.*

Remarque 2.8. *En suivant [DeG], on peut donner une interprétation en les termes de la mécanique classique de ce théorème de Gromov. Soit un nuage de points qui est localisé dans l'espace des phases dans une boule de rayon R. Pour chaque degré de liberté q_i, le projection de cette boule sur le plan (q_i, p_i) a pour aire πR^2 (pour ce degré de liberté la particule est donc localisée en position et en phase dans un disque d'aire πR^2). L'évolution du système en suivant les lois de la mécanique classique ne permettra alors jamais au nuage de points que sa projection sur le plan (q_i, p_i) soit d'aire plus petite que πR^2. Cela fait penser au principe d'incertitude d'Heisenberg qui dit qu'une particule ne peut pas être trop localisée dans l'espace des phases.*

Plus récemment, une classification complète des propriétés de plongement symplectiques des ellipsoïdes a été produite par Hutchings et McDuff, des techniques beaucoup plus poussées de courbes pseudo-holomorphes ont été utilisées. On note $E(a, b)$ l'ensemble

$$E(a, b) := \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{|z_1|^2}{a} + \frac{|z_2|^2}{b} \leq 1 \right\}.$$

Pour chaque paire d'entiers (a, b), on note $\mathcal{N}(a, b)$ la suite réordonnée des combinaisons linéaires $(na + mb)_{n,m}$ avec n et m des entiers naturels, chaque nombre de $\mathcal{N}(a, b)$ apparaît éventuellement avec multiplicité. On note $\mathcal{N}(a, b) \preceq \mathcal{N}(c, d)$ si pour tous les entiers naturels k le k-ème nombre de $\mathcal{N}(a, b)$ est inférieur ou égal au k-ème nombre de $\mathcal{N}(c, d)$. Hutchings et McDuff ont alors démontré le théorème suivant.

Théorème 5 (Hutchings et McDuff, [Hut11, McD11]). *Il existe un plongement symplectique*

$$E(a, b) \hookrightarrow E(c, d)$$

si et seulement si $\mathcal{N}(a, b) \preceq \mathcal{N}(c, d)$.

Un autre phénomène de rigidité de la géométrie symplectique a donné naissance à la **topologie symplectique** C^0, c'est-à-dire l'étude du groupe

$$\mathrm{Sympeo}(M, \omega) := \overline{\mathrm{Symp}(M, \omega)} \cap \mathrm{Homeo}(M),$$

où l'adhérence est pour la topologie uniforme. Les éléments de $\mathrm{Sympeo}(M, \omega)$ sont appelés des **homéomorphismes symplectiques**. Dans un premier temps, Gromov a démontré dans un premier temps le théorème suivant.

Théorème 6 (Alternative de Gromov). *Soit (M, ω) une variété symplectique munie d'une distance riemannienne d, alors le groupe $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ est dense ou fermé dans le groupe des difféomorphismes préservant le volume, $\mathrm{Diff}(M, \Omega)$ pour la topologie induite par d de M. De plus, la densité ou la fermeture est la même dans toutes les variétés symplectiques de même dimension.*

Remarque 2.9. *Il est clair que le groupe $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ est fermé dans $\mathrm{Diff}(M, \Omega)$ pour la topologie C^1, cependant rien ne nous indique a priori que le comportement est similaire pour la topologie C^0.*

Dans les années 80, Eliashberg a montré un phénomène de rigidité.

Théorème 7 (Théorème de Gromov-Eliashberg, [Eli, Eli87]). *Le groupe $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ est fermé dans $\mathrm{Diff}(M, \Omega)$ pour la topologie C^0. Autrement dit, les difféomorphismes du groupe $\mathrm{Sympeo}(M, \omega)$ sont des symplectomorphismes.*

Le théorème est même *local*. Soit φ un difféomorphisme qui est la limite pour la norme uniforme d'une suite de symplectomorphismes de M et tel qu'il existe un ouvert $U \subset M$ tel que $\varphi|_U$ est lisse, alors la restriction $\varphi|_U$ préserve la forme symplectique.

Remarque 2.10. *Le résultat de non-tassement de Gromov ainsi que son alternative re-démontre le même résultat que celui qui est démontré par Eliashberg. Supposont que le groupe* $\mathrm{Symp}(M)$ *ne soit pas fermé, alors il est dense dans le groupe des difféomorphismes préservant le volume* $\mathrm{Diff}(M, \Omega)$*. On pourrait donc approcher n'importe quel difféomorphisme* ψ *préservant la forme volume* Ω *et envoyant la boule de rayon* R *dans un cylindre de rayon aussi petit que l'on veut. Dès qu'un symplectomorphisme est suffisamment proche de* ψ *pour le norme uniforme il fournirait une exemple de plongement symplectique d'une boule dans un cylindre de rayon aussi petit que l'on veut, mais Gromov a justement démontré que c'était impossible.*

Les éléments du groupe $\mathrm{Sympeo}(M, \omega)$ peuvent avoir des comportements similaires ou éloignés des éléments du groupe $\mathrm{Symp}(M, \omega)$. Par exemple, supposons qu'un élément φ de $\mathrm{Sympeo}(M, \omega)$ envoie une lagrangienne $L \subset M$ sur une sous-variété lisse L' de M, alors L' est également une lagrangienne, cela est démontré dans [HLS15]. Dans ce sens les éléments de $\mathrm{Sympeo}(M, \omega)$ se comportent de manière similaire aux symplectomorphismes. A contrario, la conjecture de Arnol'd devient complètement fausse dans le monde la topologie symplectique C^0. En effet, dans [BHS18], Buhovsky, Humilière et Seyfaddini ont construit des homéomorphismes symplectiques qui n'admettent qu'un point fixe sur toutes les variétés symplectiques de dimension plus grande que 4.

3. Géométrie de contact

On parle dans cette section de géométrie de contact. Si le lecteur souhaite avoir une introduction plus complète à la géométrie de contact, nous le redirigeons vers [Gei08].

3.1. Définitions.

Les variétés de contact sont souvent considérées comme le pendant en dimension impair des variétés symplectiques. Une **structure de contact** ξ sur une variété lisse M de dimension $2n + 1$ est une collection d'hyperplans qui est maximalement non intégrable, c'est-à-dire que les seules sous-variétés qui sont tangentes à la collection d'hyperplans ξ ont pour dimension maximale n. Les structures de contact peuvent s'écrire localement comme le noyau d'une **1-forme de contact adaptée** α qui vérifie que $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n$ est une forme volume (il s'agit de l'exact opposé de la condition de Frobenius pour les collections d'hyperplans complètement intégrables). On dira qu'une variété de contact est **coorientable** lorsqu'il existe une 1-forme de contact adaptée à la structure de contact et définie sur toute la variété. Une sous-variété de dimension maximale n qui est tangente à la structure de contact ξ est appelé une **sous-variété legendrienne**, de la même manière qu'une sous-variété lagrangienne est une sous-variété sur laquelle la forme symplectique s'annule, les variétés legendriennes voient toutes les formes de contact adaptées (locale) s'annuler.

Exemple 3.1. *L'espace* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *peut être muni de la structure de contact standard* $\xi_0 := \ker(\alpha_0)$*,*

$$\alpha_0 := \boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{q} - \mathrm{d}z$$

où $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, z)$ *est la base de* $\mathbb{R}^{2n+1}$*.*

La ressemblance entre la formule de l'exemple et la 1-forme de Liouville n'est pas une coïncidence comme nous allons le voir dans la section suivante.

Les transformations d'une variété de contact (M, ξ) sont les difféomorphismes φ qui préservent la structure de contact, c'est-à-dire $\varphi^*\xi = \xi$. On note $\mathrm{Cont}(M, \xi)$ le groupe des **contactomorphismes** de (M, ξ). Supposons maintenant que l'on dispose de α une 1-forme telle que $\ker(\alpha) = \xi$, alors pour chaque contactomorphisme φ, il existe une fonction strictement positive g tel que $\varphi^*\alpha = e^g\alpha$, g est appelé le **facteur conforme** et joue un rôle important en géométrie de contact.
On dispose d'un analogue du théorème de Gromov-Eliashberg dans le contexte de la géométrie de contact.

Théorème 8 (Théorème de Gromov-Eliashberg)**.** *Le groupe des contactomorphismes* $\mathrm{Cont}(M, \xi)$ *d'une variété de contact* (M, ξ) *est fermé dans le groupe* $\mathrm{Diff}(M)$ *des difféomorphismes de* M*.*

On peut ainsi définir $\overline{\mathrm{Cont}}(M, \xi) := \overline{\mathrm{Cont}(M, \xi)} \cap \mathrm{Homeo}(M)$, le groupe des **homéomorphismes de contact**.

3.2. **Symplectisation et contactification.** On décrit ici une relation entre les variétés symplectique dont la forme symplectique est nulle en homologie et les variétés de contact coorientable. Soit $(M, \omega = \mathrm{d}\lambda)$ une variété symplectique telle que $[\omega] = 0 \in H^2(M)$, alors la variété $M \times \mathbb{R}_z$ (ou la variété $M \times S^1_z$) peut-être munie de la forme de contact $\alpha := \lambda - \mathrm{d}z$. À titre d'exemple, la contactification de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ est $(\mathbb{R}^{2n+1}, \ker(\alpha_0))$. Supposons maintenant que $(X, \ker(\alpha))$ soit une variété de contact, on peut définir une structure symplectique sur $\mathbb{R}_\rho \times X$ par $\omega = \mathrm{d}(e^\rho \alpha)$, notons que la structure symplectique dépend a priori de la forme de contact choisie. La procédure de contactification appliqué au fibré cotangent d'une variété lisse B muni de sa structure symplectique standard donne lieu à une structure de contact naturelle sur la fibré 1-jet $J^1B \simeq T^*B \times \mathbb{R}$ ou encore le fibré de **préquantification** de B, $PB \simeq T^*B \times S^1$.

3.3. **Non-tassement en géométrie de contact.** Il semblerait dans un premier temps qu'il n'existe pas d'analogue des théorèmes de non-tassement de Gromov en géométrie de contact. Comme la transformation $\varphi_c(\mathbf{q}, \mathbf{p}, z) = (c\mathbf{q}, c\mathbf{p}, c^2 z)$ est de contact pour chaque réel $c > 0$, chaque domaine borné de $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_0)$ peut être envoyé dans un voisinage de 0 aussi petit que l'on veut. En 2006, Eliashberg, Kim et Polterovich ont cependant démontré un résultat de non-tassement dans $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$, la variété de préquantification de $\mathbb{R}^n$.

Dans la suite, pour chaque ouvert de $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, on note sa préquantification $\hat{U} := U \times S^1 \subset \mathbb{R}^{2n} \times S^1$. On note encore $B^{2n}(R)$ la boule de $\mathbb{R}^{2n}$ de rayon R et $C^{2n}(R)$ le cylindre de rayon R.

Théorème 9 (Eliashberg-Kim-Polterovich, [EKP06])**.** *Supposons que $R_2 < m < R_1$ pour un entier strictement positif m. Alors, l'adhérence de $\widehat{B^{2n}(R_1)}$ ne peut pas être envoyée dans $\widehat{C^{2n}(R_2)}$ par un contactomorphisme de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$.*

Remarque 3.2. *Vers 2010, Sandon* [San09a, San09b, San15c] *a re-démontré ce résultat, en utilisant la technique des fonctions génératrices (cf. section 4.1). Albers et Merry* [AM18] *ont également démontré certaines propriétés similaires pour des fibrés de préquantification plus généraux en utilisant l'homologie de Floer-Rabinowitz.*

Il est naturel de se demander ce qu'il se passe lorsque R_2 et R_1 sont plus grands que 1. Peut-on envoyer une boule à l'intérieur de l'autre comme lorsque les rayons sont entre 0 et 1 ou bien est-ce toujours impossible ? Quelques années après le résultat de Eliashberg-Kim-Polterovich, Chiu et Fraser ont démontré qu'il y avait toujours une propriété de non-tassement dès lors que les rayons étaient plus grand que 1. Ce résultat à été redémontré récemment dans la pré-publication de Fraser-Sandon-Zhang [FSZ] en utilisant des fonctions génératrices.

Théorème 10 (Non tassement à grandes échelles [Chi17, Fra16])**.** *Supposons que $1 < R_2 < R_1$. Alors, l'adhérence de $\widehat{B^{2n}(R_1)}$ ne peut pas être envoyé dans $\widehat{C^{2n}(R_2)}$ par un contactomorphisme de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$.*

Dans ce même article, Eliashberg, Kim et Polterovich démontrent également un résultat de tassement.

Théorème 11 (Eliashberg-Kim-Polterovich, [EKP06])**.** *Supposons que $R_2 < R_1 < 1$ et que $n > 1$. Alors l'adhérence de $\widehat{B^{2n}(R_1)}$ peut être envoyé par le moyen d'une transformation de contact dans $\widehat{B^{2n}(R_2)}$.*

De la même manière que pour le résultat de Gromov, il est possible de donner une interprétation de ce résultat en des termes physiques [EKP06].

4. Fonctions génératrices et non-tassement en géométrie symplectique et de contact

Dans cette section on esquisse une preuve du théorème de Gromov donnée par Viterbo dans [Vit92] puis du théorème de non-tassement de Eliashberg-Kim-Polterovich en géométrie de contact donnée par Sandon. Nous aborderons également les outils de la preuve donnée par Fraser, Sandon et Zhang.

Dans son article, Viterbo construit des invariants spectraux pour tous les difféomorphismes hamiltoniens de $\mathbb{R}^{2n}$. Les invariants permettent de retrouver le résultat de Gromov mais elles peuvent être également utilisées pour construire une norme invariante par conjugaison sur le groupe de difféomorphismes hamiltoniens. Nous allons donner une définition des fonctions génératrices et des invariants spectraux définis par Viterbo ainsi qu'énoncer des propriétés qu'ils vérifient.

La preuve de Sandon, dans le cadre de la géométrie de contact, s'inspire de ce qu'à fait Viterbo mais nous noterons néanmoins quelques différences notables dans les preuves. En particulier, Sandon construit une norme bi-invariante sur le groupe des contactomorphismes isotopes à l'identité de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ mais cette norme ne prend que des valeurs entières.

4.1. **Définition des fonctions génératrices et les invariants spectraux associés.**

4.1.1. *Les fonctions génératrices.* On peut démontrer par un bref calcule la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soit σ une 1-forme sur une variété B, alors le graphe de σ dans le fibré cotangent T^*B muni de sa structure symplectique standard est une sous-variété lagrangienne si et seulement si la 1-forme σ est fermée.*

Une cas particulier de ces sous-variétés lagrangiennes de T^*B sont les sous-variétés lagrangiennes exactes, c'est-à-dire qu'il faut de plus que la forme de Liouville λ soit exacte sur la lagrangienne (cette définition ne dépend donc pas seulement de ω mais du choix d'une primitive). Cependant, toutes les lagrangiennes exactes de T^*B ne sont pas des graphes de 1-forme. C'est ici qu'intervient la théorie des fonctions génératrices, elles permettent, à la condition d'étendre d'une certaine manière la notion de 1-forme différentielle, d'engendrer toutes les lagrangiennes exactes de T^*B isotopes à la section nulle.

Soit B une variété fermée et soit $S\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur E, l'espace total d'un fibré de rang k, $\pi\colon E \to B$ au-dessus de B. On suppose de plus que la différentielle $\mathrm{d}S : E \to T^*E$ est transverse à

$$N_E := \{(e, \eta) \in T^*E \mid \eta = 0 \text{ sur } \ker(\mathrm{d}p)\}.$$

On définit alors Σ_S l'ensemble des **points critiques dans la fibre** par la formule,

$$\Sigma_S := \{e \in E \mid e \text{ point critique de } S|_{p^{-1}(p(e))}\}.$$

Passons un peu en coordonnées locales, pour $U \subset B$ un ouvert tel que $E|_U \simeq U \times F$, où F est un espace vectoriel réel de dimension k. On note $\mathbf{q}$ les coordonnées dans la base et ξ les coordonnées dans la fibre F. On peut ainsi caractériser Σ_S par

$$\Sigma_S = \{(b, \xi) \in E \mid \partial_\xi S(b, \xi) = 0\}.$$

Dans la suite, nous utiliserons toujours un système de coordonnées locales.

De l'hypothèse de transversalité de $\mathrm{d}S$ et N_E et du théorème de l'immersion, on obtient que Σ_S est une sous-variété de dimension $\dim B$. On définit également, l'application

$$\begin{aligned} i_S\colon \quad \Sigma_S &\to T^*B \\ (b, \xi) &\mapsto (b, \partial_b S(b, \xi)). \end{aligned}$$

Cette immersion est exacte lagrangienne comme on peut démontrer que $i_S^*\lambda_{can} = \mathrm{d}(S|_{\Sigma_S})$. On dit alors que S est une fonction génératrice pour la lagrangienne $i_S(\Sigma_S)$.

Remarque 4.2. *Les points critiques (non-dégénéré) de S correspondent aux intersections (transverses) de $i_S(\Sigma_S)$ avec la section nulle du fibré cotangent.*

Il y a deux résultats cruciaux dans la théorie des fonctions génératrices qui se comportent de manière quadratique asymptotiquement dans toutes les fibres (que l'on nomme **fonction génératrice quadratiques à l'infini**, f.g.q.i en abrégé). Tout d'abord il existe une fonction génératrice pour n'importe quelle lagrangienne exacte isotope à la section nulle, ce fut démontré par Laudenbach et Sikorav dans [LS85, Sik86, Sik87]. De plus, les fonctions génératrices pour une lagrangienne exacte (toujours supposée isotope à la section nulle) donnée satisfont une propriété d'unicité à certaines opérations "simples" près, ce résultat a été démontré par Théret et Viterbo dans [Th99, Vit92].

Avec les fonctions génératrices ont peut démontrer la conjecture de Arnol'd lagrangienne dans le fibré cotangent pour le section nulle, cela a été fait par Sikorav dans [Sik87]. La conjecture de Arnol'd lagrangienne borne inférieurement le nombre d'intersection transverses entre une lagrangienne et son image par un difféomorphisme hamiltonien par la dimension de l'homologie de la lagrangienne.

4.1.2. *Invariants spectraux.* On définit maintenant des invariants spectraux pour les lagrangiennes.

Dans toute cette section, on identifie S^{2n} avec $\mathbb{R}^{2n} \cup \{\infty\}$. Il est possible de définir des invariants spectraux pour toutes les lagrangiennes exactes isotopes à la section nulle dans T^*S^n qui intersectent la section nulle en ∞. On suppose dans la suite que les fonctions génératrices de nos lagrangiennes sont *normalisées* c'est-à-dire qu'elles s'annulent à l'infini. Soit L une telle lagrangienne et $S\colon E \to \mathbb{R}$ une f.g.q.i pour cette lagrangienne. On définit $E^a := \{x \in E \mid S(x) \leq a\}$ les niveaux de la fonction S. Soit a un réel suffisamment petit, alors E^a aura un type de difféomorphisme fixé d'après la théorie de Morse et sera noté $E^{-\infty}$. Notons $i_a\colon (E^a, E^{-\infty}) \hookrightarrow (E, E^{-\infty})$ les inclusions des différents niveaux de S, ces applications induisent des applications en homologie :

$$i_a^*\colon H_*(S^n;\mathbb{R}) \simeq H_*(E, E^{-\infty};\mathbb{R}) \to H_*(E^a, E^{-\infty};\mathbb{R}).$$

L'isomorphisme $H_*(S^n;\mathbb{R}) \simeq H_*(E, E^{-\infty};\mathbb{R})$ provient de l'isomorphisme de Thom. Les invariants spectraux sont définis comme les moments où les classes d'homologie de l'espace total $(E, E^{-\infty})$ apparaissent. Pour chaque $u \in H_*(S^n;\mathbb{R})$:

$$c(u, S) := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid i_a(u) \neq 0\}.$$

Comme le type d'homotopie des niveaux ne change qu'aux points critiques de S, les invariants spectraux correspondront à des points critiques de S dès que S est une fonction de Morse. Les propriétés d'unicité des fonctions génératrices quadratiques à l'infini impliquent ([Vit92]) que $c(u, S)$ ne dépend que de la lagrangienne et non pas de la f.q.g.i S. On peut donc renommer cette quantité $c(u, L)$.

En compactifiant l'espace $T^*\mathbb{R}^n$ en T^*S^n, on peut définir des invariants spectraux pour les lagrangiennes isotopes à la section nulle qui coïncident avec la section nulle à l'infini.

4.1.3. *Invariants spectraux pour les difféomorphismes hamiltoniens.* Nous voudrions maintenant étudies les difféomorphismes symplectiques, on sait que $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^{2n})$ donne lieu à une lagrangienne $gr_\varphi\colon \mathbb{R}^{2n} \to \overline{\mathbb{R}^{2n}} \times \mathbb{R}^{2n}, x \mapsto (x, \varphi(x))$ dans la variété symplectique produit $(\overline{\mathbb{R}^{2n}} \times \mathbb{R}^{2n}, -\omega \oplus \omega)$. De plus il est possible d'identifier $\overline{\mathbb{R}^{2n}} \times \mathbb{R}^{2n}$ et $T^*\mathbb{R}^{2n}$, il est donc possible d'associer à φ les invariants spectraux d'une lagrangienne dans le fibré cotangent $T^*\mathbb{R}^{2n}$,

$$c^+(\varphi) := c([S^{2n}], gr_\varphi), \quad c^-(\varphi) := c([pt], gr_\varphi).$$

On peut également définir $\gamma_v(\varphi) := c^+(\varphi) - c^-(\varphi)$.

Remarque 4.3. *Les points fixes de φ correspondent à l'intersection de gr_φ avec la diagonale de $\overline{\mathbb{R}^{2n}} \times \mathbb{R}^{2n}$ et donc aux points critiques des f.g.q.i associées au graphe.*

Les invariants qui viennent d'être définis satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 4.4 (Viterbo, [Vit92])**.** *Soit φ et ψ deux difféomorphismes hamiltoniens à support compact dans $\mathbb{R}^{2n}$, alors*

(i) on a les inégalités $c^-(\varphi) \leq 0 \leq c^+(\varphi)$ avec égalité si et seulement si $\varphi = Id$,
(ii) on a $c^+(\psi\varphi\psi^{-1}) = c^+(\varphi)$ ainsi que $c^-(\psi\varphi\psi^{-1}) = c^-(\varphi)$,
(iii) il y a l'inégalité triangulaire $c^+(\varphi\psi) \leq c^+(\varphi) + c^+(\psi)$ ainsi que $c^-(\varphi\psi) \geq c^-(\varphi) + c^-(\psi)$.

Il suit que γ_v est une norme invariante par conjugaison et non-dégénérée.

On décrit maintenant comment Viterbo a redémontré le théorème 4. Pour chaque ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$, il définit une capacité,

$$c(\mathcal{U}) := \sup\{c^+(\varphi) \mid \varphi \text{ est à support dans } \mathcal{U}\}.$$

Cette capacité est invariante sous difféomorphismes hamiltoniens par la propriété d'invariance par conjugaison de c^+ (voir la proposition 4.4). De plus, si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, alors on a très clairement $c^+(\mathcal{V}) \leq c^+(\mathcal{U})$. Il calcule alors que $c^+(B^{2n}(R)) = \pi R^2$ et que $c^+(C^{2n}(r)) = \pi r^2$. On déduit alors le théorème de Gromov.

Les normes spectrales sont très utiles en topologie symplectique C^0, en effet les objets usuels de la géométrie symplectique ne sont souvent pas continus pour la topologie uniforme. Cependant, comme démontré dans [BHS21], les normes spectrales peuvent être continues. En particulier, on peut définir la norme spectrale des éléments de $\mathrm{Hameo}(M, \omega) := \overline{\mathrm{Ham}(M, \omega)}$.

4.1.4. *La preuve de Sandon et la construction d'une norme invariante par conjugaison sur les groupes de contactomorphismes.* Nous avons vu précédemment que l'on pouvait étudier certaines lagrangiennes d'un fibré cotangent au moyen de fonction génératrices cette théorie a également été développée pour les legendriennes isotopes à la section nulle du fibré 1-jet. Soit $S\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction sur un fibré vectoriel E au dessus de B, on peut donc définir $\iota_S\colon \Sigma_S \to T^*B$ l'immersion lagrangienne exacte décrite plus haut. Cette immersion peut être relevée naturellement sur J^1B par

$$j_S\colon \Sigma_S \to J^1B, \quad (b,\xi) \mapsto (b, \partial_b S(b,\xi), S(b,\xi)).$$

Cette application est une immersion legendrienne. De la même manière que dans le cas du fibré cotangent, il a été démontré par Chekanov [Che96] et Chaperon [Cha95] que toutes les legendriennes de J^1B qui sont isotopes à la section nulles admettent une fonction génératrice quadratique à l'infini et que ces fonctions génératrices sont essentiellement unique. Cela nous permet d'utiliser les mêmes constructions que précédemment pour définir des invariants spectraux de legendriennes pour chaque classe d'homologie de $H_*(B)$.

En utilisant les invariants spectraux du graphe d'un contactomorphisme φ de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$, on peut ainsi définir $c^+(\varphi)$ et $c^-(\varphi)$ les invariants spectraux qui correspondent respectivement à la classe fondamentale et à la classe du point de l'homologie de S^n. Dans le cas symplectique, les points critiques des fonctions génératrices correspondent à des points fixes de difféomorphismes hamiltoniens. Cependant, en géométrie de contact ils correspondent aux points translatés. Cette définition a été introduite par Sandon.

Définition 4.5. *Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ un contactomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ munie de sa 1-forme de contact standard α_0 et g son facteur conforme. On dit que $x = (q,p,z)$ est un* ***point translaté*** *de φ si $\varphi_1(x) = q$, $\varphi_2(x) = p$ et $g(x) = 0$. Dans ce cas, $\varphi_3(x) - z$ est l'****action de contact*** *de x. L'ensemble des actions des points translatés forme le* ***spectre*** *de φ.*

Un point translaté d'un contactomorphisme φ de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ correspond à un point translaté du relevé de φ dans $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$. Les points translatés de φ correspondent aux points critiques d'une fonction génératrice du graphe de φ et l'action des points correspond à la valeur de S au point critique correspondant. Il existe encore une forme d'inégalité triangulaire et une forme d'invariance par conjugaison. Néanmoins, comme la notion de point translaté n'est pas invariante par conjugaison, il n'est pas possible d'obtenir mieux que le théorème suivant. En remarquant que les points translatés d'actions de contact des nombres ensuite sont des points fixes et en suivant des idées introduites par Bhupal dans [Bh01], Sandon démontre que :

Théorème 12 ([San09b])**.** *Soit φ et ψ des contactomorphismes de $\mathrm{Cont}_{0,c}(\mathbb{R}^{2n} \times S^1)$, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*
- *(i) on a $c^-(\varphi) \leq 0 \leq c^+(\varphi)$, avec égalités si et seulement si $\varphi = Id$,*
- *(ii) il y a une inégalité triangulaire, $\lceil c^+(\varphi\psi)\rceil \leq \lceil c^+(\varphi)\rceil + \lceil c^+(\psi)\rceil$ et $\lfloor c^-(\varphi\psi)\rfloor \geq \lfloor c^-(\varphi)\rfloor + \lfloor c^-(\psi)\rfloor$,*
- *(iii) une invariance par conjugaison, $\lceil c^+(\psi\varphi\psi^{-1})\rceil = \lceil c^+(\varphi)\rceil$ et $\lfloor c^-(\psi\varphi\psi^{-1})\rfloor = \lfloor c^-(\varphi)\rfloor$.*

Sandon a également définit des capacités pour les ouverts $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ par

$$c(\mathcal{U}) := \sup\{\lceil c^+(\varphi)\rceil \mid \varphi \text{ est à support dans } \mathcal{U}\}.$$

De cette manière, elle démontre le théorème 9. De la même manière que Viterbo avant elle, Sandon définit une norme $\gamma_s(\varphi) := \lceil c^+(\varphi)\rceil - \lfloor c^-(\varphi)\rfloor$ qui a donc les propriétés suivantes.

Théorème 13. *La norme γ_s est à valeurs entières, elle est invariante par conjugaison et non-dégénérée.*

Remarque 4.6. *On voudrait démontrer que la norme γ_s est continue pour la topologie uniforme, de la même manière que la norme γ_v. Comme γ_s est à valeurs entières il n'est pas clair de ce que cette affirmation voudrait dire. Néanmoins, dans un travail en préparation en collaboration avec Stojisavljević, nous démontrons que la norme γ_s s'étend naturellement au groupe $\overline{\mathrm{Cont}}(\mathbb{R}^{2n} \times S^1)$ en une norme non-dégénérée et invariante par conjugaison (et toujours à valeurs entières).*

Il est étonnant à première vue que la norme soit à valeurs entières, il se trouve cependant que l'on ne peut pas faire beaucoup mieux à cause de la proposition énoncé plus bas. On dit qu'une norme sur une groupe topologique est **fine** lorsque elle peut prendre des valeurs arbitrairement proches de 0.

Proposition 4.7 (Burago, Ivanov et Polterovich [BIP08])**.** *Soit* (M,ξ) *une variété de contact, alors il n'existe pas de norme invariante par conjugaison qui soit finie sur le groupe* $\mathrm{Cont}_0(M,\xi)$ *des difféomorphismes de contact isotopes à l'identité.*

4.2. **Non-tassement à grandes échelles et raffinement d'invariants spectraux par des techniques équivariantes.** Toutes les preuves connues du théorème 10 utilisent des techniques équivariantes, elles utilisent toujours l'action de $\mathbb{Z}_k$ et font tendre ensuite k vers l'infini pour obtenir des résultats de plus en plus fins sur les possibilités de tassement. L'approche employée, par Fraser, Sandon et Zhang dans [FSZ] utilise des fonctions génératrices équivariantes. Pour une fonction génératrice $F\colon \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, (x,y,\xi)\mapsto F(x,y,\xi)$ qui génère le graphe d'un symplectomorphisme φ de $\mathbb{R}^{2n}$, Allais définit dans [All22] la fonction génératrice $F^{\#k}\colon \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n(k-1)}\times\mathbb{R}^{Nk}\to\mathbb{R}$, par

$$F^{\#k}(x_1,y_1;x_2,y_2,\dots,x_n,y_n,\xi_1,\dots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{k} F\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{2}(x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1}).$$

Pour k impair, cette fonction génératrice génère le graphe de φ^k. De plus, cette fonctions est $\mathbb{Z}^k$-équivariante sous l'action de $\mathbb{Z}_k$ qui envoie (x_i,y_i,ξ_i) sur $(x_{i+1},y_{i+1},\xi_{i+1})$. En regardant l'homologie $\mathbb{Z}^k$-équivariante des niveaux de fonctions, ils arrivent alors à démontrer le théorème 10.

Ils ne définissent cependant pas de capacités, dans un travail en collaboration avec Allais, Sandon et Zhang nous tenterons de définir des invariants spectraux et de démontrer un certains nombres de propriétés. Le but étant de définir une norme invariante par conjugaison sur le groupe des contactomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}\times S^1$ qui atteignent toutes les valeurs de $\mathbb{R}_{\geq 1}\cup\{0\}$ (ce n'est pas interdit par le théorème 4.7), et qui permettrait en particulier de définir des capacités pour les ouverts de $\mathbb{R}^{2n}\times S^1$ qui retrouverait le théorème 9 directement.

Références

[AM18] P. Albers, W. J. Merry, *Orderability, contact non-squeezing, and Rabinowitz-Floer homology*, J. Symplectic Geom. 2018, **16**(6), 1481–1547.

[All22] S. Allais, *On periodic points of Hamiltonian diffeomorphisms of* $\mathbb{C}P^d$ *via generating functions*, the Journal of Symplectic Geometry **20**(1), 2022, pp. 1–48.

[BX] S. Bai, G. Xu, *Arnold conjecture over integers*, arXiv :2209.08599.

[Bh01] M. Bhupal, *A partial order on the group of contactomorphisms of* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *via generating functions*, Turkish J. Math. **25**, 2001, 125–135.

[BHS18] L. Buhovsky, V. Humilière, S. Seyfaddini, *A* C^0 *counter example to the Arnold conjecture*, Inventiones Mathematicae, **213**, 2018, 759–809.

[BHS21] L. Buhovsky, V. Humilière, S. Seyfaddini, *The action spectrum and* C^0 *Symplectic Topology*, Mathematische Annalen **380**(1), 2021, 293–316.

[BIP08] D. Burago, S. Ivanov, L. Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, Adv. Stud. Pure Math., **52**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, 221–250.

[Cha95] M. Chaperon, *On generating families*, in The Floer Memorial Volume (H. Hofer et al., eds.), (Progr. Math., **133**) Birkhauser, Basel 1995, pp. 283–296.

[Che96] Y. Chekanov, *Critical points of quasi-functions and generating families of Legendrian manifolds*, Funct. Anal. Appl. **30** (1996), 118–128.

[Chi17] S-F. Chiu, *Non-squeezing property of contact balls*, Duke Math. J. **166**(4) (2017), 605–655.

[Eli] Y. Eliashberg, *Rigidity of symplectic and contact structures*, preprint.

[Eli87] Y. Eliashberg, *A theorem on the structure of wave fronts and its application in symplectic topology*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **21**(3), (1987), 65–72, 96.

[EKP06] Y. Eliashberg, S.S. Kim, L. Polterovich, *Geometry of contact transformation and domains : orderability versus non-squeezing*, Geometry and Topology **10** (2006), 1635–1747

[Fl86] A. Floer, *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certains Kähler manifolds*, Duke Mathematical Journal (1986).

[Fra16] M. Fraser, *Contact Non-squeezing at large scale in* $\mathbb{R}^{2n}\times S^1$, Int. J. Math. **27**(13) 2016.

[FSZ] M. Fraser, M. Sandon, B. Zhang, *Contact non-squeezing at large scale via generating functions* arXiv :2310.11993.

[Gei08] H. Geiges, *An Introduction to Contact Topology*, Cambridge University Press, 2008.

[DeG] M. De Gosson, *How classical is the quantum universe ?*, arXiv :0808.2774v1.

[Gro85] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in Symplectic Manifolds*, Invant. Math. **82** (1985), 307–347.

[HLS15] V. Humilière, R. Leclercq, S. Seyfaddini, *Coisotropic rigidity and C^0-symplectic topology*, Duke Mathematical Journal **164**, 2015, 767–799.

[Hut11] M. Hutchings, *Quantitative embedded Contact Homology*, J. Differential Geom. **88** (2011), 231–266.

[LS85] F. Laudenbach, J.C. Sikorav, *Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent*, Invent. Math. **82** (1985), 349–357.

[McD11] D. McDuff, *The Hofer Conjecture on Embedding Symplectic Ellipsoids*, J. Differential Geom. **88** (2011), 519–532.

[San09a] S. Sandon, *Contact Homology, Capacity and Non-Squeezing in $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ via Generating Functions*, Annales Institut Fourier **61** (2009).

[San09b] S. Sandon, *An integer valued bi-invariant metric on the group of contactomorphisms of* $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$, Journal of Topology and Analysis **2** (2009) 3.

[San15c] S. Sandon, *Bi-invariant metric on contactomorphism groups*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences, **9**(2) (2015), 195–228.

[SerSto] B. Serraille, V. Stojisavljević, *On certain C^0-aspects of contactomorphism groups, en préparation.*

[Sik86] J.C. Sikorav, *Sur les immersions lagrangiennes dans un fibré cotangent admettant une phase génératrice globale*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **302** (1986), 119–122.

[Sik87] J.C. Sikorav, *Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 62–73.

[Th99] D. Théret, *A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions*, Topology Appl. **96** (1999), 249–266.

[Vit92] C. Viterbo, *Symplectic topology as the geometry of generation function*, Math. Ann. **292** (1992), 685–710.