

Introduction au domaine de recherche : Compactification via les espaces de Berkovich Sous la direction de Jérôme Poineau

Alexandre Roy

1 Introduction

L'idée de faire de l'analyse en géométrie non-archimédienne est ancienne mais l'on se heurte rapidement à des problèmes et il a donc fallu comprendre comment contourner ces problèmes pour par exemple définir une analyse semblable à l'analyse complexe mais sur les nombres p -adiques.

Une idée pour construire des espaces analytiques sur des corps non-archimédiens semblables aux espaces analytiques complexes classiques vient de J. Tate, [Tat71], qui définit les espaces analytiques rigides dans les années 1960. Puis dans les années 1970, M. Raynaud, [Ray74], fait le lien entre les espaces rigides analytiques et les fibres génériques de schéma formels. Enfin, V. Berkovich définit dans les années 1980, [Ber90], les espaces de Berkovich qui semblent aujourd'hui une solution appropriée aux problèmes posés. Il existe également les espaces adiques, qui consistent grossièrement en les espaces de Berkovich où l'on y rajoute des points "génériques". De nos jours, les espaces de Berkovich et les espaces adiques sont utilisés.

L'introduction et l'utilisation des espaces de Berkovich a eu de nombreuses applications dans divers domaines des mathématiques. Ils sont par exemple fortement utilisés en théorie du potentiel non-archimédien, dont C. Favre - J. Rivera-Letellier ont présenté les bases de la théorie [FRL06] sur \mathbb{C}_p en s'appuyant sur la théorie du potentiel sur \mathbb{C} . Plus récemment, S. Boucksom - M. Jonsson ont étudié une théorie du pluripotential globale sur un corps trivialement valué dans [BJ22]. En logique, les espaces de Berkovich semblent aussi jouer un rôle et l'on peut citer les travaux de E. Hrushovski - F. Loeser [HL17] qui sont également racontés dans l'article d'A. Ducros [Duc16] et pour des informations sur les ensembles définissables des courbes de Berkovich, on pourra se reporter aux travaux de P. Cubides-Kovacsics - J. Poineau [CKP19]. Les espaces de Berkovich "hybrides" que l'on définira semblent également jouer un rôle comme le montrent Boucksom-Jonsson [BJ17] en utilisant des liens avec la géométrie tropicale ou Jonsson qui les utilisent pour retrouver la tropicalisation d'une variété à partir de la dégénérescence d'amibes [Jon15].

De manière plus générale, les espaces de Berkovich se sont montrés d'une grande importance en dynamique. On peut par exemple noter que les résultats les plus récents sur la conjecture de DeMarco-Krieger-Ye utilisent ces espaces de Berkovich.

Conjecture 1.1. *Soit $d \geq 2$, il existe M une constante telle que pour toute fraction rationnelle $f, g \in \text{Rat}_d(\mathbb{C})$, on a :*

$$|\text{Preper}(f) \cap \text{Preper}(g)| \leq M \text{ ou } \text{Preper}(f) = \text{Preper}(g)$$

où $\text{Preper}(f) = \{a \in \mathbb{C} \mid \exists n \neq m, f^n(a) = f^m(a)\}$.

Les résultats les plus récents sont de M. Baker - L. DeMarco [BD11], de J. Poineau [Poi24] et L. DeMarco - N. M. Mavraki [DM22]. On va essayer de voir que les espaces de Berkovich permettent de compactifier des variétés et l'on va voir qu'un objectif peut être de compactifier l'espace des fractions rationnelles sur \mathbb{C} et l'on va essayer de voir quels sont les résultats que l'on a actuellement.

2 Définitions

2.1 Les nombres p-adiques

On va définir l'équivalent de \mathbb{C} mais dans le cas des nombres p -adiques.

Définition 2.1. Soit k un corps, une valeur absolue est une application $|\cdot| : k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que :

- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|xy| = |x||y|, \forall x, y \in k$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in k$.

On dit que cette valeur absolue est non-archimédienne si : $\forall x, y \in k, |x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Exemple 2.2. Par exemple, la valeur absolue triviale rend valué tout corps qui sera alors muni d'une valeur absolue non-archimédienne.

De plus, sur \mathbb{Q} la valeur absolue p -adique (pour tout p premier) est non-archimédienne où pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left|\frac{a}{b}\right|_p = p^{v_p(b) - v_p(a)}$.

Maintenant, l'on souhaite construire un équivalent de \mathbb{C} mais avec cette valeur absolue-ci. Pour construire \mathbb{C} , l'on part de \mathbb{Q} muni de la valeur absolue usuelle, que l'on complète pour avoir \mathbb{R} puis on prend sa clôture algébrique. On va donc faire pareil ici.

Définition 2.3. On définit le corps \mathbb{Q}_p pour p premier comme étant la complétion du corps \mathbb{Q} muni de la valeur absolue p -adique, ce qui consiste à ajouter les éléments de la forme $\sum_{n \geq n_0} a_n p^n$ où $n_0 \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq p - 1$.

On prends ensuite sa clôture algébrique mais ce corps n'est pas complet (contrairement à \mathbb{C}) et donc \mathbb{C}_p va être le complété de cette clôture algébrique (qui reste bien algébriquement clos).

Remarque 2.4. Malheureusement, ce corps est complètement discontinu i.e. ses composantes connexes sont ses points et l'on ne peut pas avoir de l'analyse qui se comporterait aussi bien qu'en analyse complexe.

On peut par exemple voir que si l'on prends le disque unité $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x| \leq 1\}$ il peut s'écrire comme l'union disjointe du disque unité ouvert et de la couronne $\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x| = 1\}$ mais comme la valeur absolue est non-archimédienne, ces deux ensembles sont ouverts et donc la fonction qui associe 0 sur le disque ouvert et 1 sur la couronne serait une fonction analytique.

L'on veut donc empêcher ce genre de choses de se passer, pour cela J. Tate dans sa théorie va définir des ouverts "admissibles" et ne garder que cela pour ses espaces analytiques rigides, dans le cas de Berkovich l'idée va être de relier tous les points entre eux, pour obtenir un arbre réel.

2.2 Les espaces de Berkovich

On commence par définir les espaces de Berkovich d'un point de vue générale puis l'on en verra des exemples, notamment sur \mathbb{C}_p ou \mathbb{C} avec différentes normes.

Définition 2.5. Soit A un anneau muni d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative i.e. $\forall x, y \in A, \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit l'espace affine analytique $\mathbf{A}_A^{n,an}$ de dimension n sur A comme étant l'ensemble des semi-normes multiplicatives $|\cdot|$ sur $A[T_1, \dots, T_n]$ tel que $\forall a \in A, |a| \leq \|a\|$.

Chaque point est donc défini comme étant une semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$, mais comme le noyau de cette semi-norme est un idéal premier p , on peut considérer le corps de fractions $\text{Frac}(A[T_1, \dots, T_n]/p)$ et la semi-norme induit une valeur absolue sur ce corps et l'on peut donc considérer son complété noté $\mathcal{H}(x)$ et la valeur absolue s'y prolonge de façon unique. Donc, chaque point peut-être vu comme la donnée d'un corps complet $\mathcal{H}(x)$ muni d'un morphisme $A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x)$ et d'une valeur absolue $|\cdot|_x$.

On munit cette espace de la topologie la plus grossière telle que pour tout $P \in A[T_1, \dots, T_n]$, l'application $\mathbf{A}_A^{n,an} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : |\cdot|_x \mapsto |P|_x$ soit continue.

On note $M(A) := \mathbf{A}_A^{0,an}$ et on l'appelle le spectre de Berkovich de A , de plus via l'inclusion $A \mapsto A[T_1, \dots, T_n]$, on dispose d'une application $\rho : \mathbf{A}_A^{n,an} \mapsto M(A)$.

Remarque 2.6. On dispose de plus de faisceaux structuraux sur ces espaces, mais l'on ne va pas rentrer dans ces détails ici, mais l'on pourra trouver toute la théorie dans [LP24].

Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.7. Soit X un A -schéma localement de présentation finie, alors il existe un analytifié de X , qui est le représentant du foncteur

$$\begin{aligned} \{\text{Espace } A\text{-analytiques}\} &\rightarrow \text{Ens} \\ S &\mapsto \text{Hom}_{A\text{-loc}}(S, X), \end{aligned}$$

où $\text{Hom}_{A\text{-loc}}(\cdot, \cdot)$ désigne les morphismes d'espace localement A -annelés.

Remarque 2.8. Un A -schéma est l'équivalent en géométrie algébrique des variétés différentielles où le fait d'être localement de présentation finie signifie que le schéma est localement un fermé de l'espace affine \mathbf{A}_A^n de dimension n défini sur A pour un certain n , ce qui correspond en variété différentielle à être localement \mathbb{R}^n et l'on recolle ces sous-ensembles comme pour les variétés différentielles.

Démonstration. Pour l'idée de cette preuve, on sait analytifier \mathbf{A}_A^n en $\mathbf{A}_A^{n,an}$ et si l'on a une A -variété affine de présentation finie, c'est un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_A^n défini par un idéal de présentation finie I et donc l'analytifié est le sous-espace analytique de $\mathbf{A}_A^{n,an}$ défini par I et pour le dernier cas, où X est simplement localement de présentation finie, il suffit de recoller les analytifications. \square

Exemple 2.9. Regardons quelques exemples.

— Tout d'abord le cas de la droite affine de Berkovich de \mathbb{C}_p .

Il s'agit donc de regarder les semi-normes sur $\mathbb{C}_p[T]$ qui sont égales à la norme usuelle de \mathbb{C}_p sur les constantes.

Pour tout $a \in \mathbb{C}_p, r \geq 0$, on peut définir la semi-norme :

$$\eta_{a,r} : P = \sum a_k(T - a)^k \mapsto \max(|a_k| r^k)$$

alors, si $r = 0$, c'est l'évaluation en a .

Via l'application $a \in \mathbb{C}_p \mapsto \eta_{a,0} \in \mathbf{A}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$, on peut y plonger \mathbb{C}_p et ce plongement est dense.

Parmi ces points, on distingue trois catégories, tout d'abord le cas où $r = 0$, on dit que les points sont alors de type 1, ensuite le cas où $r \in |\mathbb{C}_p^*| := \{\alpha | \exists x \in \mathbb{C}_p^*, |x| = \alpha\} = \{p^q\}_{q \in \mathbb{Q}}$, ces points sont dits de type 2 et enfin le cas où $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$, on dit dans ce cas que les points sont de type 3.

On obtient presque tous les points via ces semi-normes, mais il en existe en fait d'autres.

Commençons par la remarque suivante,

$$\eta_{a,r} = \eta_{b,s} \iff r = s, |a - b| \leq r$$

ce qui fait de $\mathbf{A}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$ un arbre réel dont les points de \mathbb{C}_p sont des feuilles, mais ce ne sont pas les seules, certaines feuilles apparaissent et ne sont pas de la forme $\eta_{a,r}$ mais ces semi-normes peuvent se voir comme des limites de certains η_{a_n, r_n} . De plus, les différentes branches se recoupent en les points $\eta_{a,r}, r \in |\mathbb{C}_p^*|$ et dans ces cas, il y a $p + 1$ branches qui partent de ce point. De plus sur un segment $[\eta_{a,r}, \eta_{a,s}]$, on trouve un ensemble dense de points $\eta_{a,t}, t \in |\mathbb{C}_p^*|$ et donc on a beaucoup de branches qui se rejoignent sur ce segment.

On pourra se référer aux figures 1 et 2 pour des dessins. Pour la première, on a représenté le cas $p = 3$, en plaçant plusieurs points intéressants et dans la deuxième, on a représenté

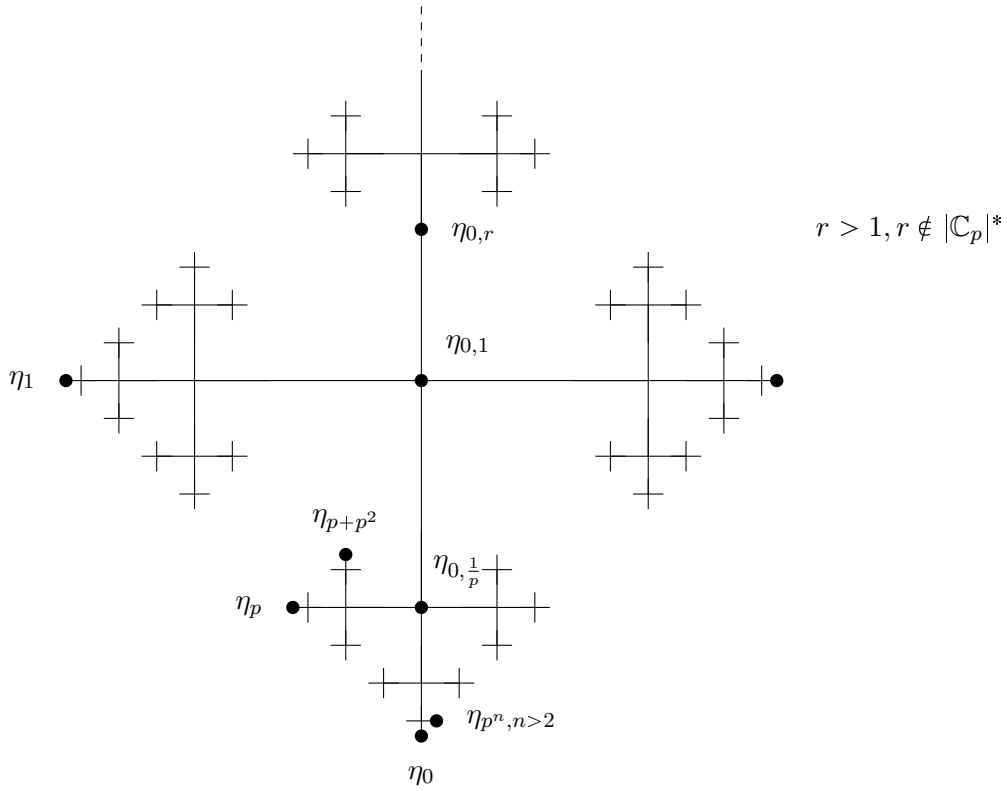


FIGURE 1 – Droite affine de l'espace de Berkovich sur \mathbb{C}_p pour $p = 3$

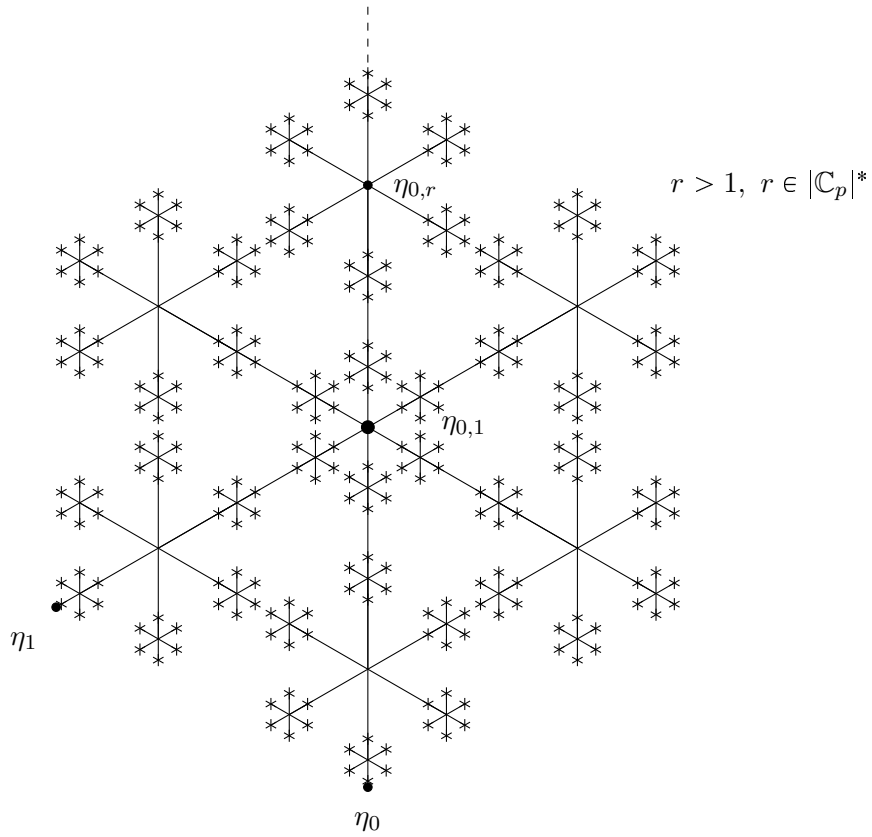


FIGURE 2 – Droite affine de l'espace de Berkovich sur \mathbb{C}_p pour $p = 5$

plus de branches pour essayer de visualiser la "quantité" de branches que l'on trouve sur la droite affine de Berkovich de \mathbb{C}_p .

Pour une étude de l'espace topologique sous-jacent, l'étude des boules ouvertes, fermées, des annulis, des voisinages de la droite affine de Berkovich d'un corps non-nécessairement algébriquement clos et comment y définir des fonctions analytiques, on pourra se référer à [PT20].

De plus, comme pour $\forall a \in \mathbb{C}_p, \eta_{a,r} = \eta_{0,r}$ pour r assez grand, on peut rajouter un point $\{\infty\}$ au bout de cette branche et cela nous donne l'espace projectif de Berkovich de \mathbb{C}_p . Et cet espace va être un bon analogue de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'espace projectif de \mathbb{C} .

On pourra regarder la partie 3 de [FRL06] pour une présentation de cet espace en particulier.

- Essayons de voir ce que donne la droite de Berkovich sur \mathbb{C} . Soit η une semi norme sur $\mathbb{C}[T]$ qui est égale à la valeur absolue usuelle sur \mathbb{C} . Si son noyau est non nul, donc de la forme $(T - a)$ alors la semi-norme est l'évaluation. Si son noyau est nul, la semi-norme induit une norme sur $\mathbb{C}(T)$ qui prolonge la valeur absolue usuelle sur \mathbb{C} et cela est impossible. Donc, les seules semi-normes sont les évaluations et on trouve

$$\mathbf{A}_{\mathbb{C}}^{1,an} \cong \mathbb{C}.$$

Donc, cela peut-être vu comme une indication que considérer l'espace de Berkovich sur \mathbb{C}_p est un bon analogue à \mathbb{C} pour faire de l'analyse sur \mathbb{C}_p .

- Regardons maintenant \mathbb{C} muni d'une autre norme, mais cette fois sous-multiplicative. Définissons, pour tout $x \in \mathbb{C}$, la "valeur absolue" hybride,

$$|x|_{hyb} = \max(|x|_{usuelle}, |x|_{triviale}).$$

Regardons le spectre de $(\mathbb{C}, |\cdot|_{hyb})$, ce sont les semi-normes multiplicatives plus petites que la valeur absolue hybride. Ce sont donc toutes les $|\cdot|_{usuelle}^\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq 1$, où la puissance 0-ième donne la valeur absolue triviale et donc $M(\mathbb{C}, |\cdot|_{hyb}) = [0, 1]$.

Ainsi, si l'on prends un \mathbb{C} -schéma, où l'on voit \mathbb{C} muni de cette valeur absolue, on peut l'analytifier. En regardant les fibres de l'application ρ définie à la fin de la définition 2.5, on se retrouve avec une famille de variétés où pour chaque $\varepsilon \in]0, 1]$ on a une variété complexe classique et pour $\varepsilon = 0$, on a une variété non-archimédienne, qui peut-être interprétée dans certains cas comme la limite de ces variétés complexes chacune vue avec la valeur absolue à la puissance ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

Maintenant que nous avons vu à quoi peuvent ressembler ces espaces de Berkovich, voyons ce que l'on peut en faire. Dans notre cas, on va essayer d'appliquer cette théorie pour obtenir des compactifications d'espaces dont le bord (ou l'infini i.e. la partie que l'on rajoute à l'espace pour le compactifier, qui est donc un point pour $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ et qui est $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ pour $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$) sera un en sens canonique. On ne peut pas espérer que le bord soit en lui-même canonique, on aura un choix mais on y ajoute une structure pour le rendre en un sens canonique.

Regardons tout d'abord l'espace de modules des fractions rationnelles complexe de degré 2 qui est le premier espace que l'on veut compactifier en utilisant les espaces de Berkovich.

3 L'espace des modules des fractions rationnelles quadratiques

Dans cette section, on va s'intéresser à la compactification connue de l'espace M_2 qui est le quotient de Rat_2 , l'espace des fractions rationnelles de degré 2 complexe par l'action de PSL_2 .

3.1 Une première tentative de compactification

Définition 3.1. L'espace Rat_d pour $d \geq 2$ est l'espace des fractions rationnelles complexes $f = \frac{P}{Q}, P, Q \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_d]$ tel que P et Q n'aient pas de racines communes et au moins un des deux

ait d comme degré, ce qui peut s'écrire sous la forme $\text{res}(P, Q) \neq 0$ où res désigne le résultant. Donc $\text{Rat}_d \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2d+1} \setminus \{\text{res}(P, Q) = 0\}$.

L'action de PSL_2 sur cet espace est donnée par, pour $f \in \text{Rat}_d, \gamma \in PSL_2$:

$$(\gamma \cdot f)(z) = \gamma^{-1}f(\gamma z)$$

où $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}, \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

On désigne par M_d le quotient de cette action.

Remarque 3.2. *J. Silverman a traité le sujet de la compactification de M_d en tout degré, dans [Sil98] en utilisant la théorie de la géométrie invariante, on notera \overline{M}_d cette compactification. Mais cela ne correspond pas aux demandes que l'on va avoir pour ces compactifications, en effet, les itérations des fractions rationnelles de la compactification ne sont pas bien définies.*

L. DeMarco a résolu le problème dans le cas où $d = 2$, dans [DeM07] mais le problème reste ouvert dans le cas des degrés supérieurs. Nous allons ici donner les principales étapes de la construction de cette compactification.

Les problèmes d'itération des fractions rationnelles sur le bord comme construit par Silverman sont également étudiés en détail par DeMarco dans [DeM05].

Le résultat suivant est dû à J. Milnor dans [Mil93].

Proposition 3.3. *L'espace M_2 est isomorphe à \mathbb{C}^2 et la compactification de Silverman \overline{M}_2 est isomorphe à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.*

Démonstration. L'idée est de prendre une fraction rationnelle, de regarder ses points fixes notés z_1, z_2, z_3 (les z_i peuvent éventuellement être ∞) et de regarder la multiplicité de ses points fixes i.e. l'évaluation de la dérivée en les z_i que l'on note μ_i et qui sont bien invariants par l'action de PSL_2 . Alors on peut considérer

$$\sigma_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

$$\sigma_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1$$

$$\sigma_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$$

les polynômes symétriques de ses multiplicités. En intégrant la forme différentielle $\frac{dz}{z-f(z)}$, on trouve $\sum \frac{1}{1-\mu_i} = 1$ et donc $\sigma_3 = \sigma_1 - 2$. D'où l'isomorphisme via les coordonnées (σ_1, σ_2) .

Pour le bord, les fractions rationnelles que l'on peut rajouter sont donc celles qui s'écrivaient $\frac{P}{Q}$ où P, Q avaient une racine commune, et on se retrouve donc, d'une certaine façon avec des fractions rationnelles de degré 0 ou 1 que l'on veut rajouter. Cela n'est pas exactement le cas, il faut rajouter la notion de pôle à ces fractions rationnelles mais c'est une bonne idée de ce qu'il se passe.

Et on se retrouve donc avec la fonction constante que l'on note λ_0 (unique comme on a l'action de PSL_2), les fractions rationnelles du type $z \mapsto az, a \neq 0, 1, \infty$ que l'on note λ_a et la fonction translation $z \mapsto z + 1$ que l'on note λ_1 .

On se rend compte en regardant l'action de PSL_2 que $[\lambda_a] = [\lambda_{\frac{1}{a}}]$ où $[\cdot]$ signifie que l'on regarde la classe de la fonction dans le quotient. Et avec cela, on obtient une définition explicite du bord de notre compactification qui est bien \mathbb{P}^1 . \square

Étudions maintenant les problèmes de cette compactification, tout d'abord comme M_2 est dense dans \overline{M}_2 et comme l'application $f \in M_2 \mapsto f^n \in M_{2^n}$ (la notation f^n sera dans toute la suite, l'itération n -ième de f) est propre (i.e. l'image réciproque d'un compact est compact), on dispose d'une application rationnelle, pour tout n

$$\Phi_n : \overline{M}_2 \rightarrow \overline{M}_{2^n}.$$

Le résultat suivant est dû à DeMarco dans [DeM07] :

Theorème 3.4. *Pour tout $n \geq 2$, le lieu d'indétermination de Φ_n , noté $I(\Phi_n)$ est :*

$$I(\Phi_n) = \{[\lambda_a] \in \delta M_2 : a \neq 1, \exists 2 \leq q \leq n, a^q = 1\}.$$

Démonstration. Début de la preuve

Pour voir que l'itération est bien définie pour les $[\lambda_a]$ tel que a ne soit pas une racine de l'unité ou que l'itération est bien défini jusqu'à $q - 1$ si a est une racine q -ième de l'unité se fait en regardant la stabilité de ces fractions rationnelles, ce qui utilise la mesure de probabilité atomique μ_{λ_a} . On verra plus tard, dans la définition 3.20, une définition des mesures associées aux fractions rationnelles. Pour plus de détails, on pourra se référer à [DeM05]. \square

Pour continuer cette preuve, on va s'appuyer sur des résultats d'A. Epstein, [Eps00] repris par DeMarco.

Définition 3.5. *La forme normale d'Epstein d'une fraction rationnelle $f \in \text{Rat}_2$ avec 3 points fixes distincts $0, 1, \infty$ avec multiplicités respectives : $\alpha, \beta, \gamma = \frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}$ est :*

$$f = z \frac{(1-\alpha)z + \alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)z + (1-\beta)}.$$

On remarque que tout élément de M_2 avec trois points fixes distincts a un représentant de cette forme.

Remarque 3.6. *Ainsi si $p : (0, 1] \rightarrow M_2$ est un chemin continu tel que $p(t) \rightarrow [\lambda_a], a \notin \{0, 1, \infty\}$ quand t tend vers 0, alors ses points fixes sont distincts pour t assez petit et on peut donc choisir un représentant de cette forme $\tilde{p}(t) \in \text{Rat}_2$ et l'on peut aussi regarder continûment les multiplicités notés $\alpha(t) \rightarrow a, \beta \rightarrow \frac{1}{a}, \gamma(t) \rightarrow \infty$*

Et ce sont avec ces représentants que l'on va pouvoir regarder les problèmes d'itération de $[\lambda_\zeta]$ pour ζ une racine q -ième de l'unité.

Définition 3.7. *Soit $\Delta : \mathbf{D} \rightarrow \overline{M}_2$ un disque holomorphe, i.e. une application holomorphe du disque fermé de \mathbb{C} vers \overline{M}_2 tel que $\Delta(0) = [\lambda_\zeta]$ où ζ est une racine q -ième de l'unité. Pour $q \geq 3$, on peut paramétriser deux multiplicités holomorphiquement $\alpha(t) \rightarrow \zeta, \beta(t) \rightarrow \frac{1}{\zeta}$ et posons $\varepsilon(t) = 1 - \alpha(t)\beta(t)$.*

On peut alors définir la τ^2 valeur du chemin par :

$$\tau^2(\Delta) = \lim \frac{(\alpha(t)^q - 1)^2}{\varepsilon(t)}$$

et par la définition de ε , on peut ici intervertir α et β et on peut donc définir cela aussi pour $q = 2$ (on avait jusque là un problème pour définir α et β sans choix comme $\zeta = \frac{1}{\zeta}$.)

De plus, on pose $\tau^2(\Delta) = \infty$ si $\Delta \subset \partial M_2$ comme dans ce cas, ε est la fonction constante égale à 0.

On arrive enfin au théorème suivant de DeMarco :

Theorème 3.8. *Soit ζ une racine q -ième de l'unité pour $q \geq 2$ et soient Δ, Δ' deux disques holomorphes dans \overline{M}_2 tel que $\Delta(0) = \Delta'(0) = [\lambda_\zeta]$. Alors pour tout $n \geq q$, on a :*

$$\begin{aligned} \lim \Phi_n(\Delta(t)) &= \lim \Phi_n(\Delta'(t)) \text{ in } \overline{M}_{2^n} \\ \text{ssi } \tau^2(\Delta) &= \tau^2(\Delta'). \end{aligned}$$

On peut donc terminer la preuve du précédent théorème.

Démonstration. Fin preuve du théorème 3.4

Il nous reste à montrer que si a est une racine q -ième de l'unité alors l'itération n -ième pour $n \geq q$ ne se comporte pas correctement.

Pour cela, il suffit d'après le théorème ci-dessus de construire deux chemins ayant un τ^2 différent. Prenons tout d'abord le chemin pour lequel $\alpha(t) = \zeta + t$ et $\beta(t) = \frac{1}{\zeta} + 2t$. Alors $(\alpha(t)^q - 1)^2 = O(t^2)$ et $\varepsilon(t) = -t(2\zeta + \frac{1}{\zeta}) + O(t^2)$. Ainsi, $\tau^2 = 0$ et si on prends un chemin inclus dans le bord de $\overline{M_2}$, on trouve un $\tau^2 = \infty$. \square

Ce sont donc ces problèmes que l'on veut corriger et ainsi avoir une itération bien définie sur toute la compactification de M_2 .

3.2 La compactification de DeMarco

Présentons maintenant la solution de DeMarco.

Pour pouvoir présenter cette solution, on va redéfinir quelques notions qui vont nous servir dans la suite.

Définition 3.9. Soient (I, \leq) un ensemble ordonné, $(E_i)_{i \in I}$ famille d'ensembles indexés par I , $(f_i^j)_{i < j}$ famille d'applications $f_i^j : E_j \rightarrow E_i$ vérifiant :

- $\forall i \in I, f_i^i = Id_{E_i}$;
- $\forall i \leq j \leq k, f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$.

Alors on définit la limite projective E de ce système si elle existe et on la note $\varprojlim E_i$. Cette limite est donnée avec des projections $\pi_i : E \rightarrow E_i$ telles que pour tout $i \leq j : \pi_i = f_i^j \circ \pi_j$ et elle satisfait la propriété universelle que pour tout ensemble Y muni de flèches ψ_i satisfaisant aux mêmes propriétés, il existe une unique flèche $u : Y \rightarrow X$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & & \\
 & & \downarrow u & & \\
 & \psi_j & X & \psi_i & \\
 & \swarrow \pi_j & & \searrow \pi_i & \\
 E_j & \xrightarrow{f_i^j} & E_i & &
 \end{array}$$

Regardons ce que cela donne sur un exemple.

Exemple 3.10. Soit k un corps et notons $k_n[X]$ les polynômes de degré $\leq n$. Alors, on dispose d'une application de projection de $k_n[X] \rightarrow k_m[X], n \geq m$ qui projette un polynôme de degré $\leq n$ sur ses $m + 1$ premières coordonnées. Alors la limite projective de ce système est $k[[X]]$ l'anneau des séries formelles.

Passons maintenant à la notion d'éclatements.

Définition 3.11. Soit k un corps algébriquement clos, \mathbf{A}_k^n l'espace affine de dimension n , \mathbb{P}_k^{n-1} l'espace projectif de dimension $n-1$ (donc à n coordonnées), définissons l'éclatement en le point $0 = (0, \dots, 0)$. Notons x_1, \dots, x_n les coordonnées de \mathbf{A}_k^n et y_1, \dots, y_n celles de \mathbb{P}_k^{n-1} , alors l'éclatement de \mathbf{A}_k^n en 0 est le fermé de $\mathbf{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ défini par les équations $\{x_i y_j = x_j y_i | i, j = 1, \dots, n\}$, noté X .

On a de plus, un morphisme naturel $\phi : X \rightarrow \mathbf{A}_k^n$ obtenu en projetant X sur le premier facteur.

Remarque 3.12. Ce que l'on a fait peut-être vu comme avoir remplacé 0 par une copie de \mathbb{P}_k^{n-1} , dans le cas où $n = 2$, cela veut dire que l'on a "éclaté" un point du plan, en rajoutant un cercle à ce point, les éclatements sont notamment très utiles dans l'étude des singularités.

En fait, on a même que ϕ est un isomorphisme de $X \setminus \phi^{-1}(0)$ sur $\mathbf{A}_k^n \setminus \{0\}$ et $\phi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$.

On peut maintenant présenter la compactification de M_2 .

Définition 3.13. Soit $\Phi_n : M_2 \rightarrow M_{2^n}$ qui à f envoie sa n -ième itération pour tout n , et définissons Γ_n l'adhérence de l'image de M_2 dans le produit $\overline{M_2} \times \overline{M_{2^2}} \times \cdots \times \overline{M_{2^n}}$ via l'injection $(Id, \Phi_1, \cdots, \Phi_n)$. Soit $\pi_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma_{n-1}$ la projection sur les $n-1$ premiers facteurs. Alors, la composition $\pi_2 \cdots \pi_n : \Gamma_n \rightarrow \overline{M_2}$ est un isomorphisme en dehors du lieu d'indétermination $I(\Phi_n) \subset \overline{M_2}$.

Comme (Γ_n, π_n) est un système projectif, on peut définir sa limite projective que l'on appellera \hat{M}_2 dans toute la suite et qui va être la compactification voulue, c'est bien une compactification car M_2 y est dense et \hat{M}_2 est clairement compact comme fermé d'un compact.

L'objectif va maintenant être de construire plus explicitement ce \hat{M}_2 et c'est pour cela que l'on va utiliser les éclatements.

Définition 3.14. On va construire un modèle pour Γ_n . Pour cela, considérons tout d'abord $p_2 : B_2 \rightarrow \overline{M_2} \cong \mathbb{P}^2$ qui désigne l'éclatement standard de \mathbb{P}^2 à l'unique point de $I(\Phi_2)$. On trouve donc que B_2 peut-être vu comme l'adhérence du graphe de $(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mapsto (x : y) \in \mathbb{P}^1$ où l'on a choisit des coordonnées sur \mathbb{P}^2 pour avoir $I(\Phi_2) = \{(0 : 0 : 1)\}$ et p_2 est donc le morphisme naturel défini avec les éclatements i.e. la projection sur le premier facteur. Et on peut définir récursivement, $p_n : B_n \rightarrow B_{n-1}$ tel que B_n soit un éclatement de B_{n-1} à tous les points de $I(\Phi_n) \setminus I(\Phi_{n-1})$.

On peut donc voir B_n comme étant $\overline{M_2}$ mais à tous les points de bords $[\lambda_\zeta]$ où ζ est une racine q -ième de l'unité, $2 \leq q \leq n$, on a rajouté un \mathbb{P}^1 .

On a maintenant le théorème suivant :

Théorème 3.15. Pour tout $n \geq 2$, il existe un homomorphisme $h_n : B_n \rightarrow \Gamma_n$ tel que $\pi_n \circ h_n = p_n$. Cet homomorphisme est l'identité sur sa restriction à l'ensemble dense M_2 .

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.16. La limite projective \hat{M}_2 est naturellement homéomorphe à la limite inverse du système des (B_n, p_n) noté \hat{B} .

Ce corollaire nous dit que le bord de la compactification \hat{M}_2 est topologiquement isomorphe à la figure 3, où l'on a \mathbb{P}^1 (le bord de \mathbb{P}^2) auquel on a rajouté un \mathbb{P}^1 par éclatement à toutes les racines de l'unité, donc à un nombre dénombrable de points.

Remarque 3.17. On ne va pas montrer le théorème 3.15 qui est calculatoire mais on va essayer d'expliquer pourquoi ce modèle semble cohérent. On a vu précédemment que le problème de l'itération sur le bord aux racines de l'unité venait du fait que suivant la "direction" (symbolisée par la valeur τ^2 des chemins) l'itération n -ième ne donnait pas le même résultat, donc ce que l'on fait c'est qu'on essaye de différencier plusieurs $[\lambda_\zeta]$ suivant la direction avec laquelle on l'atteint et c'est ce que fait un éclatement, et c'est pour cela que l'on va éclater tous les points où il y a un problème d'itération, pour tenir compte de cette "direction".

On a quelques résultats sur cette compactification ;

Théorème 3.18. Tout élément de $\hat{M}_2 \subset \prod_{n=1}^{\infty} \overline{M_{2^n}}$ est uniquement déterminé par un nombre fini de coordonnées.

Démonstration. Soit $x = (x_1, x_2, \cdots)$. Tout d'abord supposons que $x_1 \notin I(\Phi_n)$ pour tout n . Alors x est uniquement déterminé par x_1 comme ses itérations sont bien définies.

Sinon, posons N le plus petit n tel que $x_1 \in I(\Phi_N)$. Montrons que x est uniquement déterminé par (x_1, \cdots, x_N) .

Posons $y_N \in B_N$ l'unique point correspondant à $(x_1, \cdots, x_N) \in \Gamma_N$ par le théorème 3.15. On sait que pour $n \geq N$, la composition $p_{n+1} \cdots p_n$ est un isomorphisme près de y_N donc il existe un unique point $y_n \in B_n$ envoyé sur y_N et donc en réutilisant le théorème 3.15, il existe un unique point $(x_1, \cdots, x_n) \in \Gamma_n$ et donc x va être uniquement déterminé par (x_1, \cdots, x_N) . \square

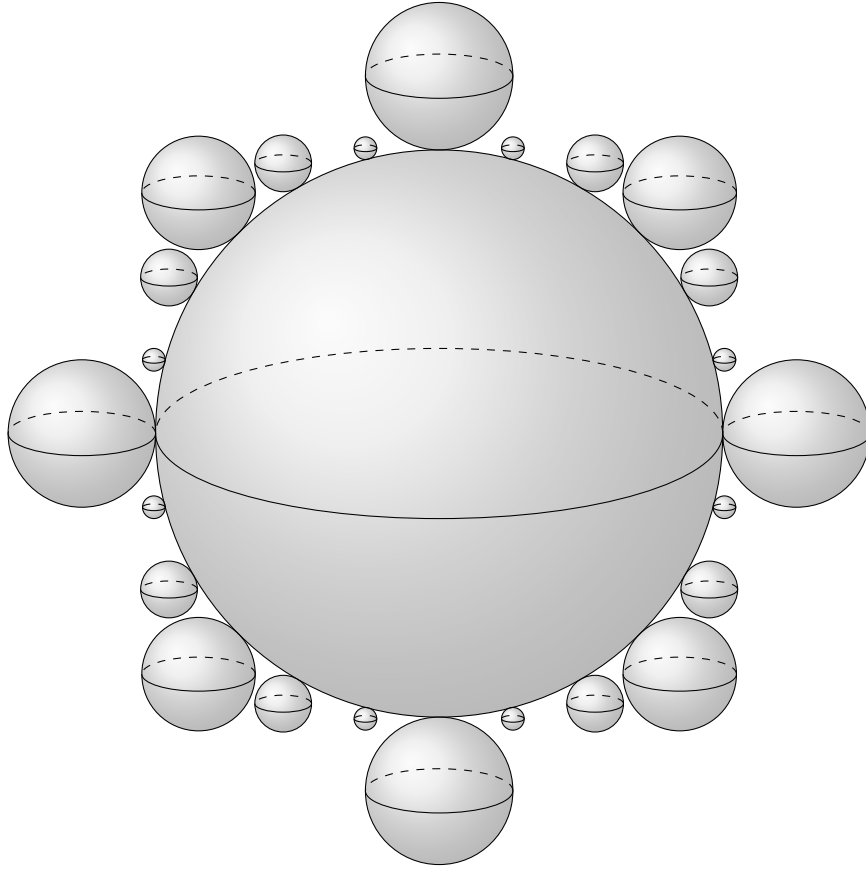


FIGURE 3 – Bord de la compactification de M_2 , il y a un nombre dénombrable de \mathbb{P}^1 rattachés à un \mathbb{P}^1

Le problème avec ces constructions est que \hat{B} reste un objet très formel, mais DeMarco a trouvé un espace qui lui est isomorphe en passant par l'espace des mesures.

Présentons sa construction. Pour cela on va avoir besoin de rappels sur les mesures de probabilités.

Définition 3.19. Soit $M^1(\mathbb{P}^1)$ l'espace des mesures de probabilités sur le sphère de Riemann, alors en identifiant \mathbb{P}^1 avec $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, on définit le centre Euclidien de la masse d'une mesure de probabilité μ par :

$$E(\mu) = \int_{S^2} \zeta d\mu(\zeta).$$

Soit $\mu \in M^1(\mathbb{P}^1)$ tel que $\mu(z) < \frac{1}{2}$ pour tout z , alors le barycentre $C(\mu) \in \mathbf{D}^3$ est uniquement déterminé par les deux propriétés suivantes :

- $C(\mu) = 0 \iff E(\mu) = 0$,
- $C(A_*\mu) = AC(\mu), \forall A \in PSL_2$,

où \mathbf{D}^3 désigne la boule unité dans \mathbb{R}^3 .

Une mesure est dite barycentrée si $C(\mu) = 0$. Le barycentre est une fonction continue sur l'espace des mesures vérifiant $\mu(z) < \frac{1}{2}$ pour tout z et est indéfini sinon.

Définition 3.20. Pour toute fraction rationnelle $f \in \text{Rat}_2$, on peut définir son unique mesure de probabilité μ_f satisfaisant pour tout n , $\mu_f = \mu_{f^n}$, de la manière suivante

$$\mu_f = \lim_{d^n} \frac{1}{d^n} \sum_{f^n(z)=a} \delta_z,$$

pour tout point a non exceptionnel i.e. l'orbite $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{f^n(a)\}$ est infinie.

Ainsi, pour tout $[f] \in M_2$, on peut choisir un représentant qui a une mesure barycentrée qui va être unique à l'action de SO_3 près. Donc si $M_{bc}^1(\mathbb{P}^1)$ désigne l'espace des mesures barycentrées sur \mathbb{P}^1 , on obtient une application

$$B : M_2 \rightarrow M_{bc}^1(\mathbb{P}^1)/SO_3.$$

Notons alors $\overline{M_{bc}^1(\mathbb{P}^1)}$ l'adhérence de $M_{bc}^1(\mathbb{P}^1)$ dans l'ensemble de mesures de probabilités, on peut alors noter $\overline{M_2}$ l'adhérence du graphe de B comme étant un sous-espace de $\overline{M_2} \times \overline{M_{bc}^1(\mathbb{P}^1)}/SO_3$.

Alors, $\overline{M_2}$ est un espace compact qui contient M_2 comme sous-espace dense.

Theorème 3.21. *Les compactifications $\hat{M}_2, \overline{\overline{M_2}}$ sont en fait canoniquement homéomorphes.*

Corollaire 3.22. *Les applications itérations s'étendent continûment à $\overline{\overline{M_2}}$.*

Remarque 3.23. *On ne va pas rentrer dans les détails de cet homéomorphisme mais, là encore l'objectif va être de paramétriser les points où les itérations ne se font pas correctement, pour les autres on aura toujours une unique mesure de probabilité barycentrée associée essentiellement car leurs mesures de probabilité vont respecter $\mu(z) < \frac{1}{2}$ pour tout z ce qui revient à la stabilité évoquée précédemment dans le début de la preuve du théorème 3.4. Les mesures des fractions rationnelles problématiques, quant à elles non et on va donc pouvoir leur associer différentes mesures pour les paramétriser.*

3.3 En degré supérieur ?

Pour tout degré d , on peut encore construire \hat{M}_d et $\overline{\overline{M_d}}$, mais pour $d \geq 5$, on peut montrer qu'il n'existe pas d'application continue $\overline{\overline{M_d}} \rightarrow \hat{M}_d$ qui se restreigne en l'identité sur M_d . Donc ces espaces ne seront pas homéomorphes.

Ainsi, même s'ils restent des compactifications de M_d , ils ne répondent pas aux différents problèmes que l'on attends d'une compactification de M_d , pour le cas de $\overline{\overline{M_d}}$, il n'y a aucune raison que l'itération y soit bien définie (dans le cas $d = 2$, on utilise justement l'homéomorphisme pour le montrer) et pour \hat{M}_d , le premier problème est que l'on ne sait pas du tout à quoi ressemble la limite projective en générale et même si les itérations seront nécessairement bien définies, on perd tout lien avec des mesures de probabilités, or ces mesures sont très importantes dans l'étude de problèmes sur les fractions rationnelles, comme le montre les articles déjà évoqués : [BD11], [DM22].

Ce qui amène donc à la réflexion suivante, comment compactifier M_d en général. Et c'est ici que les espaces de Berkovich interviennent.

4 Berkovich et compactification

L'idée va être d'utiliser les espaces de Berkovich pour compactifier différents espaces. Cette idée a par exemple été utilisée par A. Thuillier pour compactifier des variétés toriques dans [Thu07] en utilisant une rétraction des espaces de Berkovich en reprenant des idées de Berkovich dans [Ber90]. L'une des grandes motivations de l'utilisation des espaces de Berkovich pour compactifier est que ces derniers permettent d'obtenir une certaine canonicité sur le bord des compactifications obtenues. L'idée est d'essayer de retrouver la compactification de DeMarco dans le cas $d = 2$ et ainsi utiliser ses techniques pour compactifier en tout degré et avoir une compactification qui répond aux différents problèmes posés dans la dernière section.

Pour cette partie là, on va s'appuyer sur un article en cours d'écriture de J. Poineau, on pourra trouver une première version ici [MP19] qui est en collaboration avec M. Maculan.

Dans toute la suite, on adoptera le langage des schémas, on rappelle que l'idée à avoir est que c'est l'équivalent d'une variété différentielle et on donnera des exemples pour éclairer les différentes définitions.

Définition 4.1. Soit k un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ non triviale, comme avec ce que l'on a fait pour \mathbb{C} on définit une norme hybride sur k par

$$||x||_{hyb} = \max(|x|_0, |x|)$$

où $|\cdot|_0$ est la valeur absolue triviale. On note k_{hyb} le corps muni de cette norme. Alors, comme pour \mathbb{C} , on a $M(k_{hyb}) = [0, 1]$ son spectre de Berkovich.

On note k_0 le corps muni de la valeur absolue triviale et \hat{k}_ε le complété de k muni de la valeur absolue $|\cdot|^\varepsilon, \varepsilon \in (0, 1]$, ainsi tous les \hat{k}_ε sont homéomorphes, comme pour \mathbb{C} .

Si X est un k_{hyb} espace analytique, avec la projection $p : X \rightarrow M(k_{hyb})$, on note X_ε la fibre de p au dessus de ε pour $\varepsilon \in [0, 1]$.

Pour $\varepsilon \in [0, 1]$, posons

$$I_0 := [0, \infty]$$

$$I_\varepsilon := [0, \frac{1}{\varepsilon}], \varepsilon > 0$$

et $I_\varepsilon^* := I_\varepsilon \setminus \{0\}$.

Soit X un espace k_{hyb} -analytique, alors pour tout $x \in X$ posons $I_x := I_{p(x)}$.

Pour $x \in \mathbf{A}_k^{n,an}, \alpha \in I_x$, définissons $x^\alpha \in \mathbf{A}_k^{n,an}$ comme étant la semi-norme :

$$P \in k[T_1, \dots, T_n] \mapsto |P|_x^\alpha.$$

Ainsi, on peut définir

$$D(\mathbf{A}_k^{n,an}) = \bigcup_{x \in \mathbf{A}_k^{n,an}} \{x\} \times I_x^*$$

On peut finalement définir le flux Φ par :

$$\Phi : D(\mathbf{A}_k^{n,an}) \rightarrow \mathbf{A}_k^{n,an}$$

$$(x, \alpha) \mapsto x^\alpha.$$

Puis, pour $x \in \mathbf{A}_k^{n,an}$, la trajectoire de x est l'ensemble

$$T(x) := \Phi(x, I_x^*).$$

Proposition 4.2. Le flux est une application continue et ouverte.

Si $x, y \in \mathbf{A}_k^{n,an}$ avec $y \in T(x)$ alors $T(x) = T(y)$.

On a besoin de quelques notation supplémentaires.

Notation 4.3. Soit X un schéma localement de type fini sur k , alors on note X^{hyb} , l'analytification de X au dessus de k_{hyb} et X_0^{an} son analytification au-dessus de k_0 .

Remarque 4.4. Ainsi, l'idée de la compactification va être de prendre une variété sur un corps, de l'analytifier avec le corps muni de la norme hybride, typiquement si on prends une variété complexe, on va analytifier sur \mathbb{C}_{hyb} et le bord de la variété va être la partie au dessus de k_0 . Mais on ne va vouloir ne garder qu'une partie de cet espace pour faire notre bord. Pour l'instant on a notre variété qui est analytifié au dessus de chaque \hat{k}_ε et c'est pour cela que l'on a défini le flux, on va quotienter cette analytification hybride par le flux pour ne garder qu'une copie de notre variété et cela va aussi servir à rendre le bord compact.

Pour cela, il faut définir la partie à enlever. Pour cela, on va définir la fibre générique X^\square de schémas formels X localement algébrique muni d'une application $r_X : X^\square \rightarrow X$ anti-continue. On va faire la construction en 3 étapes.

Définition 4.5. Soit X comme dans la remarque.

- 1 ère étape : $X = \text{Spec}(A)$ est affine. ($\text{Spec}(A)$ est l'ensemble des idéaux premiers de A .)
Posons :

$$X^\triangleright := M(A)$$

où A est vu muni de la valeur absolue triviale. Alors $r_X : M(A) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est défini de la façon suivante, pour $x \in M(A)$:

$$r_X(x) := \{a \in A \mid |a|_x < 1\}.$$

- 2 ème étape : X est le complété d'un schéma affine S le long d'un sous-schéma fermé Y .
Notons $S = \text{Spec}(A), Y = V(I)$, alors

$$X^\triangleright := r_S^{-1}(Y) = \{x \in S^\triangleright \mid |b|_x < 1, \forall b \in I\}.$$

Et r_X est induite par r_S .

- Enfin pour la dernière étape où X est localement algébrique, il suffit de recoller la construction de l'étape 2.

Et il s'agit de cette partie là que l'on va enlever.

Posons donc $X_\infty := X_0^{\text{an}} \setminus X^\triangleright$ qui est un ouvert de X_0^{an} .

Exemple 4.6. Regardons ce que cela donne sur quelques exemples.

Prenons le cas de \mathbb{C} , alors il s'agit de regarder $X = \text{Spec}(\mathbb{C}[T])$. La droite affine de Berkovich sur \mathbb{C} muni de la valeur absolue triviale consiste en tous les points de \mathbb{C} qui se rejoignent tous en le point de Gauss $\eta_{0,1}$ et ensuite une demi-droite qui part de ce point et s'en va vers l'infini.

Si on retire $M(\mathbb{C}[T])$ qui l'ensemble des semi-normes plus petites que 1, donc l'ensemble des semi-normes où $|T| \leq 1$ et il ne reste donc plus que cette demi droite sans son origine en le point de Gauss. Et donc une fois que l'on quotiente par le flux, il ne reste plus qu'un point, ce qui est bien l'infini connu de la compactification de \mathbb{C} .

Regardons maintenant \mathbb{C}^* , alors il s'agit de regarder $\text{Spec}(\mathbb{C}[T, T^{-1}])$. L'espace de Berkovich de cet anneau est le même que celui de \mathbb{C} sans la semi-norme évaluation en 0.

On veut retirer $M(\mathbb{C}[T, T^{-1}])$ (où $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ est muni de la valeur absolue triviale). Il faut retirer les semi-normes telles que $|T| \leq 1$ et $|T^{-1}| \leq 1$ donc $|T| = 1$. Il reste donc encore la demi-droite sans son origine en le point de Gauss, et il reste également le segment ouvert $] \eta_0, \eta_{0,1} [$. Et chacune de ces demi-droites se rétractent en un point et donc, le bord de \mathbb{C}^* est deux points, ce qui est le résultat attendu.

On pourra retrouver un dessin représentant ces exemples à la figure 4.

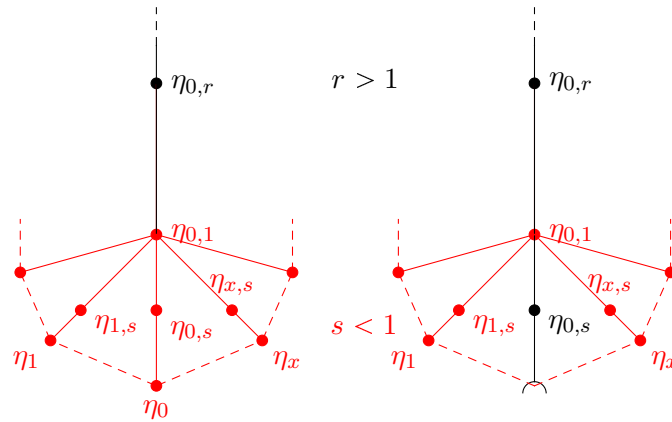


FIGURE 4 – Bord de \mathbb{C} à gauche et \mathbb{C}^* à droite avec $M(\mathbb{C}[T])$ et $M(\mathbb{C}[T, T^{-1}])$ en rouge

Définition 4.7. On peut également définir la fibre générique d'un schéma formel X localement algébrique sur k_0 , elle est définie de la façon suivante :

$$X_\eta = X^\square \setminus X_s^\square$$

où X_s désigne la fibre spéciale de X .

Voyons ce que veut dire cette définition en regardons le cas où X est la complétion d'un schéma $S = \text{Spec}(A)$ le long d'un sous-schéma fermé $Y = V(I)$. Alors,

$$X_\eta = \{x \in M(A) : \forall b \in I, 0 < |b|_x < 1\}.$$

La fibre spéciale correspond à l'espace sous-jacent, donc $V(I)$ ici, et donc les éléments que l'on retire sont les points qui dans $M(A)$ sont l'injection de I donc les évaluations en les points de I , donc on ne garde que les semi-normes qui sont > 0 sur I .

Remarque 4.8. Soit Y une compactification de X , donc une variété propre où X y est dense. Posons $Z := Y \setminus X$ et posons \mathfrak{A} le complété de Y le long de Z , alors on obtient un isomorphisme entre \mathfrak{A}^\square et l'ouvert $r_y^{-1}(Z)$ de Y_0^{an} .

Alors $\mathfrak{A}_\eta = X_\infty$ et donc \mathfrak{A}_η ne dépend pas du Y choisi, ce qui montre une certaine canonicité du bord.

Il ne nous reste donc plus qu'à formaliser cette idée de quotient par le flux et donc de rétraction des points de X_∞ .

Définition 4.9. Soit X une variété sur k , posons

$$X^+ := X^{hyb} \setminus X^\square.$$

Alors, c'est un ouvert de X^{hyb} donc un espace analytique sur k_{hyb} , on a $X_0^+ = X_\infty$ et $X_\varepsilon^+ = X_\varepsilon^{hyb}$, $\forall 0 < \varepsilon < 1$.

Soient $x, y \in X^{hyb}$, on dit que x et y sont en relation par le flux ssi $T(x) = T(y)$, et on écrit $x\Phi y$.

Proposition 4.10. Soit X un k -schéma. La relation Φ est une relation d'équivalence sur X^{hyb} qui préserve X^+ .

L'application quotient $X^+ \rightarrow X^+/\Phi$ est ouverte et en particulier X^+/Φ est localement quasi-compact.

De plus, si X est quasi projectif, alors X^+/Φ est T_2 i.e. Hausdorff.

Notation 4.11. Posons

$$X^\dagger := X^+/\Phi$$

que l'on appelle la compactification hybride de X et notons X^∂ l'image de X_∞ dans X^\dagger que l'on appelle la frontière hybride de X .

Remarque 4.12. D'un point de vue topologique, on a donc bien $X^\partial = X_\infty/\Phi$.

Theorème 4.13. Pour tout X k -schéma, X^\dagger est quasi-compact et compact si X est quasi-projectif.

Voici donc une compactification que l'on peut faire avec les espaces de Berkovich, on a vu que le bord était en un sens canonique et que la compactification était bien celle voulue dans les cas classiques comme pour \mathbb{C} ou \mathbb{C}^* par exemple. Le but est maintenant d'utiliser ces techniques pour retrouver des compactifications plus subtiles et essayer de généraliser les résultats.

Références

- [BD11] M. BAKER et L. DEMARCO. « Preperiodic points and unlikely intersections ». In : Duke Mathematical Journal (2011). DOI : 10.1215/00127094-1384773.
- [Ber90] V. BERKOVICH. Spectral theory and analytic geometry over Non-Archimedean Fields. American Mathematical Society, 1990.
- [BJ17] S. BOUCKSOM et M. JONSSON. « Tropical and non-archimedean limits of degenerating families of volume forms ». In : Journal de l'Ecole polytechnique — Mathématiques 4 (2017), 87–139. DOI : 10.5802/jep.39.
- [BJ22] S. BOUCKSOM et M. JONSSON. « Global pluripotential theory over a trivially valued field ». In : Annales de la faculté des sciences de Toulouse - Mathématiques 31 (2022), 647–836. DOI : 10.5802/afst.1705.
- [CKP19] P. CUBIDES KOVACSICS et J. POINEAU. « Definable sets of Berkovich curves ». In : Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 20.4 (2019), 1275–1339. DOI : 10.1017/s1474748019000495.
- [DeM05] L. DEMARCO. « Iteration at the boundary of the space of rational maps ». In : Duke Mathematical Journal (2005). DOI : 10.1215/s0012-7094-05-13015-0.
- [DeM07] L. DEMARCO. « The moduli space of quadratic rational maps ». In : Journal of the American Mathematical Society (2007). DOI : 10.1090/s0894-0347-06-00527-3.
- [DM22] L. DEMARCO et N. M. MAVRAKI. « Dynamics on \mathbb{P}^1 : Preperiodic points and pairwise stability ». In : (2022). arXiv : math/2212.13215v1.
- [Duc16] A. DUCROS. « About Hrushovski and Loeser’s work on the homotopy type of Berkovich Spaces ». In : Nonarchimedean and Tropical Geometry (2016), 99–131. DOI : 10.1007/978-3-319-30945-3_4.
- [Eps00] A. EPSTEIN. « Bounded Hyperbolic Components of Quadratic Rational Maps ». In : Ergodic Theory and Dynamical Systems 20.3 (2000), 727–748. DOI : 10.1017/s0143385700000390.
- [FRL06] C. FAVRE et J. RIVERA-LETETIER. « Equidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective ». In : Mathematische Annalen (2006). DOI : 10.1007/s00208-006-0751-x.
- [HL17] E. HRUSHOVSKI et F. LOESER. « Non-archimedean tame topology and stably dominated types (AM-192) ». In : Princeton University Press (2017). DOI : 10.23943/princeton/9780691161686.001.0001.
- [Jon15] M. JONSSON. « Degenerations of amoebae and Berkovich Spaces ». In : Mathematische Annalen 364.1–2 (2015), 293–311. DOI : 10.1007/s00208-015-1210-3.
- [LP24] T. LEMANISSIER et J. POINEAU. « Espaces de Berkovich globaux, catégorie, topologie, cohomologie ». In : (2024). arXiv : math/2010.08858v2.
- [Mil93] J. MILNOR. « Geometry and dynamics of quadratic rational maps ». In : Experimental Mathematics 2.1 (1993), 37–83. DOI : 10.1080/10586458.1993.10504267.
- [MP19] M. MACULAN et J. POINEAU. « Non-archimedean compactifications of complex analytic spaces ». In : (2019). URL : <https://poineau.users.lmno.cnrs.fr/Textes/Compactifications.pdf>.
- [Poi24] J. POINEAU. « Dynamique analytique sur \mathbb{Z}^2 ; Ecart uniforme entre Lattès et conjecture de Bogomolov-Fu-Tschinkel ». In : (2024). arXiv : math/2207.01574v3.

- [PT20] J. POINEAU et D. TURCHETTI. « Berkovich curves and Schottky uniformization I : The berkovich affine line ». In : Lecture Notes in Mathematics (2020), 179–223. DOI : 10.1007/978-3-030-66249-3_5.
- [Ray74] M. RAYNAUD. « Géométrie analytique rigide d’après Tate, Kiehl... » In : Mémoires de la société mathématiques de France 1 (1974), 319–327. DOI : 10.24033/msmf.170.
- [Sil98] J. SILVERMAN. « The space of rational maps on \mathbb{P}^1 ». In : Duke Mathematical Journal 94.1 (1998). DOI : 10.1215/s0012-7094-98-09404-2.
- [Tat71] J. TATE. « Rigid analytic spaces ». In : Inventiones mathematicae (1971). DOI : 10.1007/BF01403307.
- [Thu07] A. THUILLIER. « Géométrie Toroïdale et géométrie analytique non archimédienne. Application au type d’homotopie de certains schémas formels ». In : manuscripta mathematica 123.4 (2007), 381–451. DOI : 10.1007/s00229-007-0094-2.