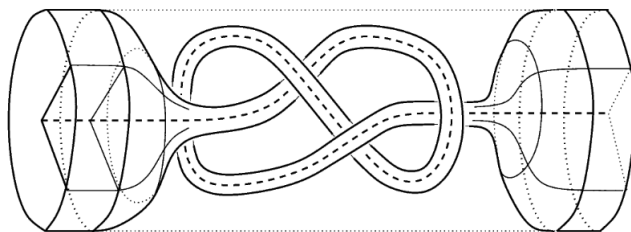


ESPACES DE PLONGEMENTS ENTRE VARIÉTÉS

NICOLAS GUÈS



1. TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE ET THÉORIE DE L'HOMOTOPIE

Mon domaine de recherche est la théorie de l'homotopie appliquée à des questions de topologie différentielle. Depuis les années 50, avec les travaux fondateurs de René Thom, Stephen Smale, John Milnor, pour ne citer qu'eux, on a réalisé que de nombreuses questions concernant les variétés (notamment des problèmes de classification de certaines structures sur celles-ci) étaient intimement reliées à des questions purement *homotopiques*, c'est à dire des questions portant sur le type d'homotopie de certains objets géométriques.

1.1. Topologie différentielle. La topologie différentielle vise à comprendre les *variétés lisses* : une variété topologique est un espace topologique¹ localement homéomorphe à \mathbb{R}^n . Une variété lisse M est une variété topologique munie d'une structure supplémentaire : un atlas *lisse*, c'est à dire une collection de cartes $\mathcal{U} \xrightarrow{f} M$ (où \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^n) qui recouvrent M telle que les changements de carte : $\mathcal{U} \cap f^{-1}(g(\mathcal{V})) \rightarrow \mathcal{V}$ pour $\mathcal{U} \xrightarrow{f} M \xleftarrow{g} \mathcal{V}$ soient C^∞ . L'objectif de la topologie différentielle est d'utiliser les outils provenant de cette structure lisse pour extraire des informations sur la topologie des variétés. La *théorie de Morse* est un exemple puissant d'un tel outil.

1.2. Théorie de l'homotopie. La théorie de l'homotopie peut être résumée (grossièrement) comme étant l'étude des espaces topologiques raisonnables² à équivalence d'homotopie près : une homotopie entre deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ (X et Y sont des espaces topologiques) est une application continue $H : I \times X \rightarrow Y$ telle que $H(0, -) = f$ et $H(1, -) = g$. On écrira $f \sim g$ si f et g sont homotopes. Une application continue $X \xrightarrow{f} Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que $fg \sim id_Y$ et $gf \sim id_X$. On appellera *type d'homotopie* une classe d'équivalence d'espaces associée à la relation engendrée par les équivalences d'homotopie. Par exemple, le cercle S^1 donne un type d'homotopie,

¹on demande aussi habituellement que l'espace soit à base dénombrable d'ouverts.

²Par "raisonnable" j'entends plus rigoureusement : ceux ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe, informellement : les espaces engendrés par recollement par des n -disques D^n le long de leur bord. Ce faisant on interdit la plupart des espaces pathologiques qui posent problème pour faire de la théorie de l'homotopie.

et c'est le même que \mathbb{C}^* . Le but de la théorie de l'homotopie est de comprendre la structure algébrique de la catégorie des espaces à homotopie près. Un outil fondamental est la construction d'*invariants algébriques* : pour obtenir des informations sur un espace, on peut lui associer un objet algébrique (souvent un groupe, souvent abélien), qui ne dépend que du type d'homotopie. Les plus fondamentaux sont les *groupes d'homotopie* et les *groupes de (co)homologie*, qui sont *fonctoriels* au sens où un morphisme entre types d'homotopie $X \xrightarrow{f} Y$ donne un morphisme entre leurs invariants.

- Etant donné un espace X et un point base $x \in X$, le n -ième groupe d'homotopie $\pi_n(X, x)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'application continues de $(S^n, *) \rightarrow (X, x)$, qu'on note $[S^n, X]_*$. Comme son nom l'indique, il peut être muni d'une structure de groupe si $n \geq 1$, abélien si $n \geq 2$.
- Etant donné un espace X et un anneau R , l'homologie $H_*(X, R)$ est un R -module gradué (il y a un R -module $H_d(R)$ pour chaque entier naturel d) que je ne définirai pas ici.

1.3. Pourquoi des problèmes de topologie différentielle sont-ils liés à la théorie de l'homotopie ? A priori, l'étude des variétés lisses ne semble que vaguement liée à la théorie de l'homotopie : notamment, la notion de structure lisse n'est pas une notion homotopique, celle de variété non plus. Cependant dans les années 50-60, René Thom a découvert que les classes de cobordisme³ de variétés étaient classifiées par les groupes d'homotopie d'un certain espace, le *spectre de Thom universel* MO :

Théorème 1. [Tho] $\pi_n(MO)$ est en bijection naturelle avec les classes de cobordisme de variétés de dimension n .

C'est une instance de théorème qui montre qu'on peut classifier des structures géométriques ou topologiques par des objets purement homotopiques comme les groupes d'homotopie d'un certain espace. Un autre exemple intéressant est la classification des structures lisses sur les sphères :

Si M est une variété topologique, on peut lui donner une structure de variété lisse en la munissant d'un *atlas* (une famille de cartes $\mathbb{R}^n \rightarrow M$ qui recouvrent M) où les changements de cartes sont C^∞ . Cependant, rien ne dit que toutes les structures lisses possibles sur une variété sont les mêmes. Le premier exemple, resté célèbre, est celui donné par Milnor sur la sphère S^7 en 1956 :

Théorème 2 ([Mil56]). Il existe plusieurs structures lisses sur S^7 qui sont non difféomorphes entre elles.

On appelle *sphère exotique* toute variété homéomorphe à une sphère sans être difféomorphe à la sphère lisse standard. Le problème de classification des structures lisses sur la sphère s'avéra encore une fois se ramener à des questions homotopiques :

Théorème 3. [?] Pour $n \geq 4$, l'ensemble des structures lisses sur la n -sphère, noté Θ_n , a une structure de groupe, et s'inscrit dans une suite exacte courte

$$0 \rightarrow bP_{n+1} \rightarrow \Theta_n \rightarrow \Theta_n/bP_{n+1} \rightarrow 0$$

³Deux n -variétés M et N sont dites cobordantes si il existe une $(n+1)$ -variété W dont le bord est la réunion de M et N . Il existe des versions "orientées" de cette définition, qui sont les plus courantes.

où bP_{n+1} est (relativement) compréhensible et Θ_n/bP_{n+1} est soit isomorphe, soit un sous-groupe d'indice 2 de π_n^S/J , un quotient du n -ième groupe d'homotopie stable des sphères⁴ par l'image du J -homomorphism (que je ne décrirai pas ici).

Cette fois, la classification des structures lisses est liée à la compréhension des groupes d'homotopie stable des sphères.

Mon sujet de recherche, plus précisément, concerne la topologie des *espaces de plongements* entre variétés.

2. ESPACES DE PLONGEMENTS

Définition 2.1. Une immersion entre deux variétés M et N est une application lisse $M \rightarrow N$ dont la différentielle en tout point est injective. Un plongement est une application lisse qui réalise un homéomorphisme sur son image.

Un problème important de topologie différentielle est la compréhension des plongements entre variétés. En ce qui concerne les immersions, leur étude a été grandement facilitée par le théorème historique de Smale-Hirsch :

Théorème 4. Soient M, N des variétés lisses de dimension respectivement m et n , avec $m < n$. Supposons que M soit compacte et que N soit sans bord. On note $\text{Imm}(M, N)$ l'espace des immersions lisses de M dans N , et $\text{fImm}(M, N)$ l'espace des immersions formelles, c'est-à-dire les couples $(f, \delta f)$ où $f : M \rightarrow N$ est continue, et δf est une injection entre fibrés tangents $TM \rightarrow f^*TN$. Alors l'application,

$$\text{imm}(M, N) \rightarrow \text{fimm}(M, N)$$

$$f \mapsto (f, df)$$

est une équivalence (faible) d'homotopie.

Le théorème de Smale-Hirsch ramène ainsi un problème de topologie différentielle (comprendre les immersions) à un problème purement homotopique (comprendre les classes d'homotopie de monomorphismes entre des fibrés vectoriels, et les classes d'homotopie d'applications continues $M \rightarrow N$). Un problème plus difficile est de comprendre les espaces de plongements entre variétés. Une difficulté supplémentaire par rapport aux immersions est que les plongements ne forment pas un *faisceau*, au sens où, si U et V sont des ouverts de M , et

$$f : U \rightarrow N$$

$$g : V \rightarrow N$$

sont des immersions qui coïncident sur $U \cap V$, alors la fonction $h : U \cup V$ qui prolonge f et g est encore une immersion. Ce n'est pas le cas pour les plongements, car la propriété d'être un plongement n'est pas locale. Les espaces de plongements ont une structure riche et apparaissent dans de multiples contextes en topologie et géométrie. Mon but est de proposer ici quelques exemples d'objets ou de problèmes actuels se rattachant aux espaces de plongements. Des exemples fondamentaux d'espace de plongement sont les espaces de configuration d'une variété :

Définition 2.2. Soit M une variété. On appelle *espace de configuration à n points* l'espace

$$\text{Conf}_n(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid i \neq j \implies x_i \neq x_j\}$$

De façon équivalente, c'est l'espace des plongements de $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$ dans M .

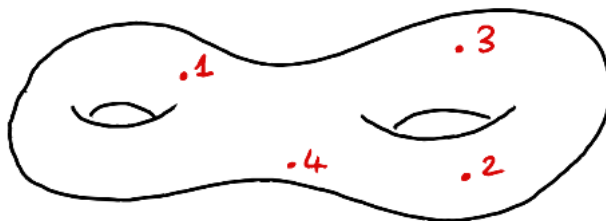
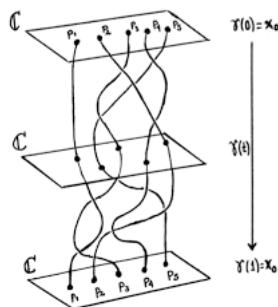


FIGURE 1. Une configuration à 4 points dans une surface de genre 2.

Comme $\text{Conf}_n(M)$ hérite d'une action libre de Σ_n par permutation des points, on peut quotienter par cette action et obtenir $F_n(M) = \text{Conf}_n(M)/\Sigma_n$ l'espace de configuration non ordonné. Alors même qu'on regarde les plongements d'un espace discret dans M , la topologie de cet objet est déjà compliquée à comprendre. Par exemple, ces espaces ont déjà une topologie intéressante pour $M = \mathbb{R}^2$: le groupe fondamental de $F_n(\mathbb{R}^2)$ est le *groupe de tresses* à n brins B_n :



(1)

Ces groupes B_n apparaissent dans de nombreux contextes en géométrie : ils sont notamment reliés à des questions de théorie des noeuds et de mapping class groups de surfaces. Il agit aussi naturellement sur de nombreux objets algébriques, notamment dans la théorie des groupes quantiques, qui nécessite l'utilisation de *catégories monoïdales tressées*. Ce sont des catégories monoïdales (C, \otimes) munies d'un *twist* $X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ qui est un isomorphisme mais n'est pas de carré nul. L'intuition derrière cette propriété est que ce n'est plus le groupe symétrique qui agit sur $X^{\otimes n}$ mais le groupe de tresses à n brins.

2.1. Homotopie et homologie des espaces de configuration. La cohomologie de $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d)$ a été calculée pour la première fois par Vladimir Arnold et Fred Cohen dans les années 70 :

Théorème 5 ([Arn],[Coh]). La cohomologie de $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d)$ est engendrée par des classes $\omega_{ij} \in H^{d-1}(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d), \mathbb{Q})$ pour $1 \leq i, j \leq n$ avec les relations

- $\omega_{ij} = (-1)^{ij} \omega_{ji}$
- $\omega_{ij} \wedge \omega_{ij} = 0$
- $\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \omega_{ki} \wedge \omega_{ij} = 0$

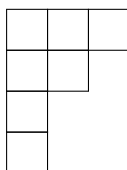
⁴Le théorème de suspension de Freudenthal (datant des années 30) dit que $\pi_{n+k}(S^k)$ est stationnaire pour k grand : on note sa limite π_n^S , le n -ième groupe d'homotopie stable des sphères. Ce résultat fonde la *théorie de l'homotopie stable*, un très vaste champ de recherche aujourd'hui.

En général, pour une variété quelconque M , la cohomologie de $\text{Conf}_n M$ est difficile à calculer. Une approche pour comprendre la cohomologie des espaces de configuration est donnée par le champ de recherche de la *stabilité homologique*.

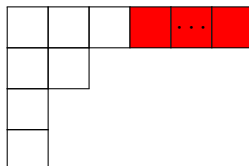
2.2. Stabilité homologique des espaces de configuration. La stabilité homologique est un champ de recherche actif en topologie algébrique. Cette notion vient du constat que pour beaucoup de suites d'objets de nature algébro-géométrique $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow$ par exemple $X_n = \Sigma_n$ les groupes symétriques, B_n les groupes de tresses, $F_n(X)$ les espaces de configuration non ordonnés, l'homologie se stabilise :

Théorème 6 (Nakaoka, McDuff, Segal, ...). Pour $(X_n) = (\Sigma_n), (B_n), (F_n(M)), \dots$ la flèche $H_d(X_n) \rightarrow H_d(X_{n+1})$ est un isomorphisme pour n assez grand.

(ici H_d désigne soit l'homologie des groupes, soit l'homologie singulière selon le contexte.) Pour les espaces de configuration non ordonnés, ce phénomène ne se produit pas : par exemple, $H_1(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2))$ est de dimension $\binom{n}{2}$ et ne peut donc pas se stabiliser. Cependant, il y a une notion de stabilité qui prend en compte l'action du groupe symétrique sur les configurations : en effet, $\text{Conf}_n(M)$ est naturellement muni d'une action de Σ_n par permutation des points, et donc son homologie rationnelle est une représentation du groupe symétrique. La théorie des représentations nous donne que les représentations irréductibles de Σ_n sont classifiées par les tableaux de Young i.e. les partitions de l'entier n , dessinées comme des superpositions de boîtes carrées dont le nombre décroît à chaque ligne. Si λ est un tableau de Young de taille n , par exemple



qui correspond donc à une représentation irréductible de Σ_7 , on peut construire un tableau de Young de taille $m > n$ en ajoutant des boîtes sur la première ligne :



qu'on notera $\lambda[m]$. Pour λ un tableau de Young de taille n , et V une S_m -représentation avec $m \geq n$, on note c_λ la multiplicité du tableau $\lambda[m]$.

Définition 2.3. Soit (V_n) une suite de \mathbb{Q} -ev telle que V_n soit une Σ_n -représentation, et munis d'un morphisme de Σ_n -représentations $V_n \rightarrow V_{n+1}$ (en utilisant l'inclusion $\Sigma_n \hookrightarrow \Sigma_{n+1}$). On dit que cette suite est représentation-stable si :

- (1) $V_n \rightarrow V_{n+1}$ est injective à partir d'un certain rang
- (2) $\text{im}(V_n) \subset V_{n+1}$ engendre V_{n+1} sous l'action de S_{n+1}
- (3) la multiplicité $c_{\lambda,n}$ d'un tableau de Young donné λ dans V_n est stationnaire pour n suffisamment grand (le rang minimum est appelé *rang de stabilisation*)

Church et Farb définirent cette notion de stabilité dans [CEF12] et démontrèrent que celle-ci s'applique dans le cas des espaces de configuration ordonnés, ainsi que beaucoup d'autres contextes :

Théorème 7 ([CEF12]). Si M est une variété (compacte ou pas), et d un entier, la suite $V_n = H^d(\text{Conf}_n(M), \mathbb{Q})$ de représentations des groupes symétriques est représentation-stable, avec un rang de stabilisation plus petit que $2d$ si $\dim M \geq 3$, et $4d$ si $\dim M = 2$.

Dans ce contexte des espaces de configurations, Church, et Ellenberg ont montré que cette notion implique en fait le fait suivant : en notant $\text{Conf}_S(M) = \text{Emb}(S, M)$, il existe un rang N explicite (fonction de d et $\dim M$) :

$$H^d(\text{Conf}_S(M)) = \text{colim}_{T \subset S, |T| \leq N} H^d(\text{Conf}_T(M))$$

Ce résultat montre en quelque sorte une propriété d'"engendrement fini" de la cohomologie des espaces de configuration. Durant ma préthèse, j'ai cherché à comprendre ces questions avec un point de vue homotopie-théorique et obtenir des résultats de ce type pour les *groupes d'homotopie* des espaces de configuration. Notamment, je me suis intéressé à une notion de stabilisation qui porte non pas sur la cohomologie, mais au complexe de cochaîne sous-jacent, voire sur le type d'homotopie stable sous-jacent. On peut par cette méthode obtenir des résultats de stabilisation pour d'autres invariants, comme les groupes d'homotopie stables ou instables. Entre autres, si l'on note $\hat{\pi}_d \text{Conf}_S(M)$ le dual de Pontryagin $\text{Hom}(\pi_d \text{Conf}_S(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, qui conserve seulement l'information sur la torsion, on peut montrer

$$\hat{\pi}_d \text{Conf}_S(M) = \text{colim}_{T \subset S, |T| \leq N} \hat{\pi}_d \text{Conf}_T(M)$$

avec un N dépendant explicitement de d .

2.3. Invariance homotopique des espaces de configuration. La communauté mathématique s'est demandée si les espaces de configuration étaient un invariant du type d'homotopie d'une variété (à dimension fixée). En effet, on a constaté que si deux variétés M et N de même dimension sont homotopiquement équivalentes, alors :

- (1) Les résultats de Bödigheimer et al. [BCT] et de Bendersky et Gitler [BG91] ont montré que l'homologie de $\text{Conf}_r(M)$ dépend uniquement du type d'homotopie de M (sous certaines hypothèses sur la dimension de M ou la caractéristique du corps de base).
- (2) Levitt [Lev] a montré que le type d'homotopie de l'espace de lacets $\Omega \text{Conf}_r M$ de l'espace de configurations de M dépend uniquement du type d'homotopie de M . En particulier, cela montre que les groupes d'homotopie de $\text{Conf}_r(M)$ dépendent uniquement du type d'homotopie de M .
- (3) Aouina et Klein [AK] ont prouvé que le type d'homotopie stable de $\text{Conf}_r(M)$ est également un invariant d'homotopie, c'est-à-dire que si $M \sim N$ alors $\Sigma^k \text{Conf}_r(M) \sim \Sigma^k \text{Conf}_r(N)$ pour un certain $k \geq 0$, où $\Sigma X = X \wedge S^1$ est la suspension de X .

On conjecture alors naturellement que si $M \sim N$ alors $\text{Conf}_n(M) \sim \text{Conf}_n(N)$ pour tout n . Un contre-exemple a été donné par Riccardo Longoni et Paolo Salvatore en 2005:

Théorème 8. [LS] Les espaces lenticulaires $L_{7,1}$ et $L_{7,2}$ sont homotopiquement équivalents mais leurs espaces de configuration ne le sont pas.

Pour deux nombres premiers (p, q) on définit l'espace lenticulaire $L_{(p,q)}$ comme le quotient de $S^3 = \{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |z'|^2 = 1\}$ sous l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donnée par :

$$(z, z') \mapsto (e^{2i\pi/p} z, e^{2i\pi q/p} z')$$

La stratégie consistant à montrer que certains *produits de Massey* (une version triadique, partiellement définie, du cup-produit en cohomologie) s'annulent dans l'un et pas dans l'autre.

Cependant, les espaces impliqués ne sont pas simplement connexes et on conjecture que c'est de là que vient l'obstruction. La conjecture suivante est toujours ouverte :

Conjecture 1. Si M et N sont deux variétés de dimension n simplement connexes, a-t-on

$$M \sim N \implies \text{Conf}_n(M) \sim \text{Conf}_n(N)?$$

Une version peut-être plus abordable de la conjecture est sa version *rationnelle*, aussi toujours ouverte :

Théorème 9. Si M et N sont deux variétés de dimension n simplement connexes, alors

$$M \sim_{\mathbb{Q}} N \implies \text{Conf}_n(M) \sim_{\mathbb{Q}} \text{Conf}_n(N)$$

où $\sim_{\mathbb{Q}}$, l'équivalence rationnelle, est la notion d'équivalence (entre espaces simplement connexes, pour simplifier) engendrée par les applications continues $X \rightarrow Y$ qui induisent des isomorphismes sur les groupes d'homotopie rationalisés :

$$\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{f_* \otimes \mathbb{Q}} \pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q}$$

Najib Idrissi a démontré une version de cette conjecture pour le type d'homotopie *réel* (que je ne définirai pas ici) des espaces de configuration. [Idr].

2.4. Mon projet de thèse. Mon projet de thèse vise à étudier, non pas le type d'homotopie rationnel des espaces de configuration, mais un raffinement de celui-ci, le type d'homotopie *modéré*, défini par Dwyer en 1979. Une équivalence d'homotopie modérée entre espaces simplement connexes est une application continue

$$X \xrightarrow{f} Y$$

qui induit des isomorphismes sur l'application induite

$$\pi_n(X) \otimes R_n \rightarrow \pi_n(Y) \otimes R_n$$

pour tout n , où R_n est le plus petit sous-anneau de \mathbb{Q} contenant les $\frac{1}{p}$ pour $2p - 3 \leq n$. En d'autres termes, on inverse seulement quelques nombres premiers en chaque degré au lieu de les inverser tous. La borne $2p - 3 \leq n$ est la borne optimale qui empêche certains phénomènes d'obstruction, qui compliquent la situation, de se produire (plus spécifiquement : les opérations de Steenrod). Ainsi, la théorie de l'homotopie modérée permet de récupérer une partie de la torsion dans les groupes d'homotopie, information perdue par l'homotopie rationnelle, mais qui reste plus calculable que la théorie de l'homotopie "sur \mathbb{Z} ", c'est-à-dire classique. J'aimerais ensuite appliquer cette compréhension des espaces de configuration à l'étude du type d'homotopie modéré d'espaces de plongements plus généraux.

3. CALCUL DES PLONGEMENTS ET TOUR DE GOODWILLIE-WEISS

Le but de cette section est de présenter une technique inventée au début des années 2000 par Tom Goodwillie et Michael Weiss [Wei] pour obtenir des informations sur les espaces de plongements entre deux variétés : le *calcul des plongements*. Cette technique présente plusieurs analogies formelles avec l'approximation d'une fonction lisse par des polynômes de degré n , que je vais essayer de mettre en valeur.

Soient M, N deux variétés. L'idée du calcul des plongements est d'approximer l'espace $\text{Emb}(M, N)$ par une tour

$$\text{Emb}(M, N) \rightarrow \dots \rightarrow T_n \text{Emb}(M, N) \rightarrow T_{n-1} \text{Emb}(M, N) \rightarrow \dots \rightarrow T_1 \text{Emb}(M, N)$$

d'espaces $T_n \text{Emb}(M, N)$, qui sont, en un certain sens, des approximations "polynomiales" à l'ordre n . Dans la suite je définis ce calcul des plongements lorsque M et N sont de

même dimension. Je m'inspire beaucoup du cours récemment écrit (avril 2024) d'Alexander Kupers [Kupa] dans cette section.

Définition 3.1. On définit \mathbf{Var}_d la catégorie des variétés de dimension d et dont les morphismes sont les plongements entre variétés. Cette catégorie est enrichie dans les espaces, en munissant de la topologie compacte-ouverte l'ensemble des plongements $Emb(M, N)$.

On appelle E_M le préfaisceau en espaces sur \mathbf{Var}_d représenté par une variété M . En d'autres termes, à N une variété on associe $Emb(N, M)$ et on obtient un foncteur $\mathbf{Var}_d \rightarrow \mathcal{S}$, la catégorie des espaces. Par le lemme de Yoneda, on a une équivalence

$$Emb(N, M) \simeq Nat(E_N, E_M)$$

entre les plongements $N \rightarrow M$ et les transformation naturelles $E_N \rightarrow E_M$. Soit $Disc_{\leq k}$ la sous-catégorie pleine de \mathbf{Var}_d constituée des variétés qui sont réunion disjointes de moins de k disques D^d . Alors chaque E_M se restreint en un préfaisceau sur $Disc_{\leq k}$. On définit alors le n -ième étage de la tour de Goodwillie-Weiss :

$$T_k Emb(N, M) = Nat_{Disc_{\leq k}}^h(E_N, E_M)$$

des morphismes *dérivés* (i.e. une bonne notion d'espace de morphismes dans un cadre homotopique) entre les préfaisceaux associés. Comme $Disc_{\leq k}$ s'inclut dans $Disc_{\leq k+1}$, on a des restrictions $T_{k+1} Emb(N, M) \rightarrow T_k Emb(N, M)$.

3.1. Le premier étage $T_1 Emb(M, N)$. Si l'on veut comprendre la tour, il faut :

- Une description du premier étage
- Une description de la différence entre les étages, i.e. la fibre homotopique de T_n vers T_{n-1} .

Nous allons voir que le premier étage $T_1 Emb(M, N)$ est en fait, sous quelques hypothèses sur M et N (par exemple si N est une variété ouverte), équivalent à l'espace des immersions

$$T_1 Emb(M, N) = Imm(M, N)$$

Le calcul des plongements formalise l'idée que l'espace des immersions est une "première approximation" de l'espace des plongements.

Remarque 3.1. Ce calcul des plongements peut aussi être défini pour M et N de dimension différente.

Une question importante concernant le calcul des plongement est celle de la convergence de la tour : A-t-on

$$Emb(M, N) = \lim_n T_n Emb(M, N)?$$

Goodwillie et Weiss apportent une réponse : la tour converge dès que $dim N - dim M \geq 3$. D'autres conditions assurent aussi la convergence de la tour.

4. APPLICATIONS

Le calcul des plongements permet notamment de mieux comprendre $Diff_{\partial}(D^n)$, le groupe (topologique) des difféomorphismes du n -disques D^n qui préservent le bord, qui est un objet très complexe, en dépit de la simplicité de sa définition. On sait par exemple depuis les travaux de Manuel Krannich, Alexander Kupers et Oscar Randal-Williams. [KRW, Kupb, RW] Leurs travaux permettent par exemple d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 10. Pour $j \leq 3n - 8$ on a

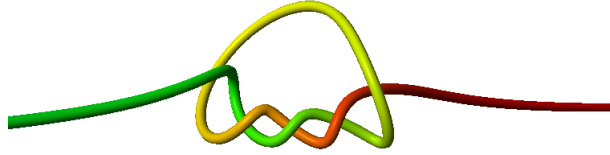
$$\pi_{j-1}(\text{Diff}_{\partial}(D^{2n+1})) \otimes \mathbb{Q} = K_{j+1}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \oplus \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } j = 2n - 2 \pmod{4}, j \geq 2n - 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $K_{j+1}(\mathbb{Z})$ est le $(j + 1)$ -ème groupe de K -théorie algébrique de \mathbb{Z} , un objet qui a des liens profonds avec la théorie des nombres notamment.

Les techniques pour prouver ce genre de résultats impliquent le calcul des plongements : en effet, les difféomorphismes du disque préservant le bord sont la même chose que les plongements de D^n dans D^n qui préservent le bord, et on peut appliquer les méthodes du calcul des plongements.

Une autre application est le calcul de l'homologie des espaces de noeuds. On définit l'espace des longs noeuds \mathcal{K}_n comme l'espace des plongements $Emb(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ qui sont égaux à l'inclusion naturelle en dehors d'un compact : Le π_0 de cet espace pour $n = 3$ est

FIGURE 2. Un exemple de long noeud dans \mathbb{R}^3 .



l'espace des noeuds, qui est d'un grand intérêt en topologie de basse dimension (un noeud $L \in Emb(S^1, S^3)$ permet de construire par chirurgie le long de son bord des variétés de dimension 3). Il est plus généralement intéressant de comprendre le type d'homotopie de l'espace des noeuds. Le calcul des plongements dans le cas des espaces de noeuds a été étudié notamment par Sinha, Lambrechts, Volic et Turchin (voir [Vol06][Sin06][LTV] entre autres). Il permet dans des cas d'obtenir par exemple une suite spectrale (la suite spectrale de "Goodwillie-Sinha")

$$E_{p,q}^1 = H_p(\text{Conf}_q(\mathbb{R}^d), \mathbb{Q}) \implies H_{p+q}(\mathcal{K}_d, \mathbb{Q})$$

qui converge lorsque $d \geq 4$. Si vous n'êtes pas familiers avec les suites spectrales, c'est, pour le dire en quelques mots, un algorithme de calcul d'homologie (en général) qu'on abrège sous la forme

$$E_{p,q}^1 \implies H_{p+q}$$

où $E_{p,q}^1$ sont les entrées, paramétrées par un couple d'entiers p, q , que l'on sait calculer, et l'application de la suite spectrale à ces entrées permet, dans les bons cas, de récupérer de l'information sur des groupes d'homologie H_{p+q} . On peut y penser comme une généralisation d'une suite exacte longue d'homologie. En tout cas, cette suite spectrale montre que l'homologie des espaces de configuration a des implications sur l'homologie de l'espace des noeuds, ce qui est une motivation supplémentaire pour comprendre leur topologie.

REFERENCES

- [AK] Mokhtar Aouina and John R. Klein. On the homotopy invariance of configuration spaces. 4:813–827. Publisher: Geometry & Topology Publications, Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry; Mathematical Sciences Publishers, Berkeley.
- [Arn] Vladimir I. Arnold. The cohomology ring of the colored braid group. In Vladimir I. Arnold, Alexander B. Givental, Boris A. Khesin, Alexander N. Varchenko, Victor A. Vassiliev, and Oleg Ya. Viro, editors, *Vladimir I. Arnold - Collected Works: Hydrodynamics, Bifurcation Theory, and Algebraic Geometry 1965-1972*, pages 183–186. Springer.
- [BCT] C. F. Bödigheimer, F. Cohen, and L. Taylor. On the homology of configuration spaces. *Topology*, 28(1):111–123.
- [BG91] Martin Bendersky and Sam Gitler. The cohomology of certain function spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 326(1):423–440, 1991.
- [CEF12] Thomas Church, Jordan Ellenberg, and Benson Farb. Fi-modules and stability for representations of symmetric groups. *Duke Mathematical Journal*, 164, 04 2012.
- [Coh] Fred Cohen. Cohomology of braid spaces. 79(4):763–766. Publisher: American Mathematical Society.
- [Idr] Najib Idrissi. *Real Homotopy of Configuration Spaces: Peccot Lecture, Collège de France, March & May 2020*, volume 2303 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer International Publishing.
- [KRW] Manuel Krannich and Oscar Randal-Williams. Diffeomorphisms of discs and the second weiss derivative of $B\text{Top}(-)$. <http://arxiv.org/abs/2109.03500>.
- [Kupa] Alexander Kupers. Copenhagen lectures on an operadic setup for embedding calculus and its variants. <https://www.utoronto.ca/people/kupers/wp-content/uploads/sites/50/lecturenotes.pdf>.
- [Kupb] Alexander Kupers. Diffeomorphisms of discs.
- [Lev] Norman Levitt. Spaces of arcs and configuration spaces of manifolds. 34(1):217–230.
- [LS] Riccardo Longoni and Paolo Salvatore. Configuration spaces are not homotopy invariant. 44(2):375–380.
- [LTV] Pascal Lambrechts, Victor Tourtchine, and Ismar Volic. The rational homology of spaces of long knots in codimension >2 . 14(4):2151–2187.
- [Mil56] John Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64(2):399–405, 1956.
- [RW] Oscar Randal-Williams. Diffeomorphisms of discs. <http://arxiv.org/abs/2201.02380>.
- [Sin06] Dev P. Sinha. Operads and knot spaces. *Journal of the American Mathematical Society*, 19(2):461–486, 2006.
- [Tho] René Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 28(1):17–86.
- [Vol06] Ismar Volic. Calculus of the embedding functor and spaces of knots. *arXiv: Algebraic Topology*, 2006. <https://arxiv.org/abs/math/0601268>.
- [Wei] Michael Weiss. Embeddings from the point of view of immersion theory: Part i. 3(1):67–101.