

Programme de Langlands et centre de Bernstein : introduction au domaine de recherche

Léo Gratien

Octobre 2024

Il est plus aisé pour un chameau de rentrer par le trou d'une aiguille que de fournir une introduction au programme de Langlands satisfaisante en si peu de place. Ce mémoire introduit donc les objets et les résultats d'intérêts avant leurs motivations. Celles-ci sont présentées en section 4. Au centre de la philosophie de R. Langlands se trouve la classification des représentations d'un groupe réductif p -adique. Celle-ci relie conjecturalement certains « paquets » de représentations irréductibles de G (côté *automorphe*) avec certains morphismes du groupe de Galois dans le L -groupe de G (côté *galoisien*).

Ce mémoire présente la théorie des représentations d'un groupe p -adique à travers l'étude de son *centre de Bernstein* $\mathcal{Z}(G)$. Pour une introduction générale au programme de Langlands, voir l'IDR d'Arthur-César Le Bras [15].

Historique En 1976, à la suite des travaux monumentaux de Harish-Chandra dans le cas réel, J. Bernstein et A. Zelevinsky [1] classifient les représentations complexes irréductibles de $GL_n(F)$ en fonction de représentations supercuspidales. Ici, F sera un corps p -adique non archimédien, c'est-à-dire une extension finie de \mathbb{Q}_p . Puis en 1992, J. Bernstein et P. Deligne [7] généralisent la construction précédente à tout groupe réductif p -adique G . On obtient un objet qui classifie les (classes d'équivalences de) paires cuspidales (M, ρ) où M est un sous-groupe de Lévi de G et ρ une représentation supercuspidale de M . Fait non trivial : cet ensemble est muni d'une structure de variété algébrique sur \mathbb{C} . L'existence d'une structure de variété sur cet objet permet des raisonnements géométriques, ce qui donne lieu à d'importants résultats que nous présentons.

1 Représentations de groupes réductifs p -adiques

Cette section introduit la théorie des représentations d'un groupe algébrique réductif connexe G défini sur une extension finie E de \mathbb{Q}_p . Des exemples de groupes algébriques réductifs sont SL_n , GL_n , et leurs quotients. On explicite en appendice la théorie dans le cas de SL_2 . Les représentations de G seront lisses (i.e. le stabilisateur de tout vecteur est un ouvert de G) et irréductibles (i.e. sans sous-espace vectoriel non-trivial stable par G).

On voit qu'une représentation de G est la donnée d'un G -module. Il est commode de « linéariser » l'étude des G -modules. Soit \mathcal{H} l'algèbre des fonctions lisses à support compact sur G . La multiplication est donnée par la convolution.

1.1 Algèbre de Hecke et complétion

Définition 1.1. Soit une algèbre H . Un module V sur H est *non-dégénéré* si l'application canonique $H \otimes V \rightarrow V : h \otimes v \mapsto h \cdot v$ est un isomorphisme ; soit $\mathcal{M}(H)$ la catégorie des H -modules non-dégénérés.

Une représentation (π, V) de G se transfère en une action sur l'algèbre de Hecke de $G : f$ agit sur v par

$$\pi(f)v := \int_G \pi(g)v \cdot f(g)\mu_G(g).$$

($f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, et $v \in V$). On ne perd rien à passer au niveau des algèbres de Hecke :

Proposition 1.2. *Les catégories $\mathcal{M}(G)$ des G -modules lisses (irréductibles) et $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ des \mathcal{H} -modules non-dégénérés (irréductibles) sont équivalentes.*

Démonstration. Une représentation lisse V de G donne lieu à un \mathcal{H} -module $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} V$. Par lissité, celui-ci est non-dégénéré. Le foncteur $V \mapsto \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} V$ définit l'équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(G)$ et $\mathcal{M}(\mathcal{H})$. \square

Définition 1.3. On définit le complété de l'algèbre de Hecke $\widehat{\mathcal{H}}$. Soit $\iota: \mathcal{M}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C} - \mathbf{vect}$ le foncteur d'oubli. Le complété $\widehat{\mathcal{H}}$ est l'anneau des endomorphismes de ι :

$$\widehat{\mathcal{H}} = \text{End}(\iota).$$

On définit le centre de l'algèbre $\widehat{\mathcal{H}}$:

$$Z(\widehat{\mathcal{H}}) = \text{End}(\text{Id}: \mathcal{M}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H})).$$

De manière équivalente, on montre que $\widehat{\mathcal{H}}$ est l'anneau $\text{End}_{\mathcal{H}^{op}}(\mathcal{H})$ des endomorphismes de \mathcal{H} vu comme \mathcal{H} -module à droite. Une description moins évidente est la suivante.

Soit $x \in \widehat{\mathcal{H}}$ un endomorphisme de \mathcal{H} , vérifiant donc $x(hh') = x(h) * h'$ pour tous $h, h' \in \mathcal{H}$. Pour tout K sous-groupe compact ouvert de G , on dispose de la fonction caractéristique e_K de K ; c'est un idempotent de \mathcal{H} . Alors $x(e_K) = x(e_K * e_K) = x(e_K) * e_K \in \mathcal{H} * e_K$. De plus, lorsque K varie, $\{x(e_K)\}$ forme un système compatible. On en déduit un élément de la limite projective $\varprojlim_K \mathcal{H} * e_K$. Le morphisme $\widehat{\mathcal{H}} \rightarrow \varprojlim_K \mathcal{H} * e_K$ est un isomorphisme.

Proposition 1.4. *Le complété $\widehat{\mathcal{H}}$ est isomorphe à l'algèbre des distributions stabilisant l'algèbre de Hecke \mathcal{H} :*

$$\widehat{\mathcal{H}} \cong \{D \in \text{Dist}(G), \forall h \in \mathcal{H}, D * h \in \mathcal{H}\}.$$

Le centre de $\widehat{\mathcal{H}}$ s'identifie aux distributions $\text{Dist}^G(G)$ invariantes par conjugaison par G .

Démonstration. Définissons la distribution associée à x : une fonction lisse à support compact h est supportée par un sous-groupe K , de sorte que $e_K * h = h$. Par conséquent, $x(h) = x(e_K)h$. On pose $\langle D, h \rangle := x(h)(e_G)$. \square

Remarque. \mathcal{H} est une algèbre non-commutative, sans unité. Pour certain sous-groupe compact ouvert K de G , nous comprenons bien l'algèbre de Hecke relative $e_K * \mathcal{H} * e_K =: \mathcal{H}_K \subset \mathcal{H}$.

- Pour $K = G(\mathcal{O})$, \mathcal{H}_K est commutative et est décrite par l'isomorphisme de Satake ([9]),
- Pour $K = I$ le sous-groupe d'Iwahori de G , \mathcal{H}_K est décrite par la présentation de Bernstein ([10]).

Il faudrait étendre notre compréhension des algèbres \mathcal{H}_K pour un grand nombre de K pour une description du centre et du cocentre de G .

1.2 Caractère d'une représentation

Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G . On sait que π peut être vue comme un $\mathcal{H}(G)$ -module de dimension finie. De plus π agit sur l'ensemble des fonctions lisses à support compact sur G , et pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, $\pi(f) = \int_G f(x) \cdot \pi(x) \mu_G(x)$ est un opérateur de rang fini. En effet, $\pi(f)$ a son image incluse dans V^K où f est invariante par le sous-groupe compact ouvert K . On note $\Theta_\pi(f) = \text{tr}(\pi(f))$ le *caractère* de la représentation (π, V) ; c'est une distribution sur G .

En fait, cette distribution est donnée par une fonction localement intégrable.

Théorème 1.5 (Harish-Chandra, [12]). *Soit (π, V) une représentation irréductible de G , et Θ_π son caractère. La distribution Θ_π est donnée par une fonction localement intégrable, localement constante sur les éléments réguliers semi-simples G^{Tss} . En d'autres termes, on dispose d'une fonction θ_π sur G telle que :*

$$\text{Pour toute } f \in \mathcal{C}_c^\infty(G), \quad \Theta_\pi(f) = \int_{G^{Tss}} f(x) \theta_\pi(x) \mu_G(x).$$

Ce théorème est très utile lorsqu'on le conjugue à l'orthogonalité des caractères θ_π pour π dans les classes de représentations irréductibles supercuspidales.

1.3 Variété de Bernstein

Définition 1.6. Une paire $(M, (\rho, W))$ est une *donnée cuspidale* une paire où M est un facteur de Lévi d'un parabolique $P = MN$, et (ρ, W) une représentation lisse irréductible supercuspidale de M . On définit une relation d'équivalences sur les données cuspidales.

Deux données cuspidales $(M_i, (\rho_i, W_i))$ sont *associées* s'il existe $g \in G$ tel que $gM_1g^{-1} = M_2$ et $\rho_2 \cong \rho_1^g$. L'association définit une relation d'équivalence.

On note $\Omega(G)$ l'ensemble des classes d'associations de données cuspidales.

Théorème 1.7. *L'ensemble $\Omega(G)$ est muni d'une structure de variété algébrique. Ses composantes connexes sont les classes d'associations modulo un caractère non-ramifié : $\rho_2 \cong \rho_1^g \otimes \chi$. On les appelle classes d'inerties de G . Ces composantes s'avèrent être des tores complexes à action de groupes finis près.*

On obtient une décomposition de $\text{Irr}(G)$ en union disjointe de fibres où Ω est une composante connexe de $\Omega(G)$:

$$\text{Irr}(G) = \bigsqcup_{\Omega} \text{Irr}(G)_{\Omega}. \quad (1)$$

Terminons sur le théorème principal de la théorie : la décomposition (1) obtenue ci-dessus scinde la catégorie $\mathcal{M}(G)$ en un produit de sous-catégories.

Théorème 1.8. *La catégorie des classes d'isomorphie de représentations lisses de G se décompose comme un produit de catégories :*

$$\mathcal{M}(G) = \bigsqcup_{\Omega} \mathcal{M}(G)_{\Omega},$$

où $\mathcal{M}(G)_{\Omega}$ est la catégorie des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans $\text{Irr}(G)_{\Omega}$.

2 Le centre de Bernstein

Nous avons défini le centre de l'algèbre complétée $\widehat{\mathcal{H}}$, c'est une algèbre et un \mathcal{H} -module, appelée *centre de Bernstein* du groupe G . On dispose essentiellement de trois descriptions du centre de Bernstein $\mathcal{Z}(G)$.

1. La première est algébrique (centre de $\widehat{\mathcal{H}}$) ; elle est la moins maniable en pratique.
2. La seconde est géométrique (distributions G -invariantes essentiellement à support compact).
3. La troisième est spectrale (fonctions régulières sur la variété $\Omega(G)$).

Remarque. La théorie du centre de Bernstein est à l'origine motivée par son pendant linéaire. Soit une algèbre de Lie \mathfrak{g} , son centre est défini comme le centre de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} .

2.1 Divers descriptions du centre

Distributions Le centre de Bernstein $\mathcal{Z}(G)$ est donné par l'ensemble des distributions G -invariantes qui préservent les fonctions lisses à support compact par convolution.

Rappelons que les catégories des représentations lisses de G est équivalente à la catégorie des $\mathcal{H}(G)$ -modules non-dégénérés. En particulier, leur centres (catégoriques) s'identifient. Cela permet de donner au centre de Bernstein sa description en terme de distributions.

Fonctions régulières Le centre de Bernstein $\mathcal{Z}(G)$ l'anneau des fonctions régulières sur la variété de Bernstein $\Omega(G)$.

On explique comment passer de la première description à la troisième. Soit z un élément de $\mathcal{Z}(G)$, que l'on voit comme une collection d'endomorphismes. Pour toute représentation lisse et irréductible (π, V) de G , le lemme de Schur donne que l'action de z sur π est scalaire, par un complexe $\chi_{\pi}(z)$.

Soit un Lévi M de G et une représentation irréductible (ρ, W) de M définissant une classe d'inertie $[\rho, W]_G$ de $\Omega(G)$. La fonction $[\rho, W]_G \mapsto \chi_{i_{\mathbb{F}}^G(\rho)}(z)$ définit une application régulière sur la variété de Bernstein

$$\chi_{i_{\mathbb{F}}^G(\rho)}(\cdot): \Omega(G) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Théorème 2.1 (Bernstein-Deligne, [7]). *Les trois définitions du centre de Bernstein ci-dessus coïncident. Soit $\Omega \subset \Omega(G)$ une composante connexe et $\mathcal{Z}(\Omega)$ le centre de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\Omega$. Alors $\mathcal{Z}(\Omega)$ s'identifie aux fonctions régulières $f: \Omega(G) \rightarrow \mathbb{C}$ à support dans Ω .*

Cependant le lien entre description géométrique et description spectrale n'est pas aisée à comprendre. On dispose de la formule de Plancherel dans une direction.

Théorème 2.2 (Formule de Plancherel, [20]). *On dispose d'une mesure de Plancherel $d\pi_\Omega$ pour chaque composante connexe Ω de la variété $\Omega(G)$. Pour toute distribution du centre $\Phi \in \mathcal{Z}(G)$:*

$$\Phi = \sum_{\Omega \subset \Omega(G)} \int_{\pi \in \Omega} f(\Phi)(\pi) \cdot \Theta_\pi d\pi_\Omega$$

où $f(\Phi): \Omega(G) \rightarrow \mathbb{C}$ désigne la fonction régulière associée à la distribution Φ .

2.2 Sous-algèbres remarquables du centre

On dispose d'un nombre restreint d'exemples où on sait faire correspondre distributions et fonctions régulières comme sous-algèbres de $\mathcal{Z}(G)$. Donnons deux exemples : le premier concerne les fonctions régulières de $\Omega(G)$ nulles presque partout ; le second traite des fonctions régulières de $\Omega(G)$ localement constantes.

Théorème 2.3 (Moy et Tadić, [17]). *Soit $\mathcal{Z}^{\text{fin}} \subset \mathcal{Z}(G)$ l'ensemble des fonctions régulières supportées sur un nombre fini de composante connexe de $\Omega(G)$.*

Toute fonction $z \in \mathcal{Z}^{\text{fin}}$ correspond à une distribution représentée par $J\mu_G$ où J est une fonction à support compact G -invariante et localement intégrable sur $G(F)$. Elle est lisse sur $G^{\text{r}ss}(F)$.

Remarque. Le théorème précédent n'est pas une correspondance bijective. Caractériser analytiquement les fonctions localement intégrables qui correspondent effectivement aux fonctions de \mathcal{Z}^{fin} s'avère être une tâche ardue. Il est plus raisonnable d'exprimer l'action des distributions sur les représentations. C'est ce que réalise le théorème de Ngô-Luo quand J est fonction de la variable « trace » (cf. Théorème 2.4).

Soit E/F une extension quadratique déployé de F , et W_E la représentation diédrale de $SL_2(F)$. E^1 l'ensemble des éléments de E de norme 1 sur F . On suppose que J est invariante au sens où $J = J_c \circ \text{tr}$. La représentation W_E est irréductible, donc J agit sur W_E par scalaire par le lemme de Schur.

Théorème 2.4 (de descente, Luo-Ngô, [16]). *On définit la transformée de Fourier linéaire $\mathcal{F}_\psi(f) = \int_F f(y)\psi(xy)dy$. On dispose de la formule de descente :*

$$\gamma(J_G, W_E) = \lambda_{E/F} \int_{E^1} \mathcal{F}_\psi \left(\mathcal{F}_{\psi^{-1}}(J_c) \frac{\eta_E}{|\cdot|} \right) (\text{tr}(e)) \cdot \chi(e) de.$$

Passons à l'autre exemple de sous-algèbre de $\mathcal{Z}(G)$. Soit $\mathcal{Z}^{\text{lc}} \subset \mathcal{Z}(G)$ l'ensemble des fonctions régulières localement constante sur $\Omega(G)$. C'est clairement une sous-algèbre de $\mathcal{Z}(G)$. Le théorème suivant décrit exactement les distributions correspondantes.

Théorème 2.5 (Dat [6], Braverman-Kazhdan [2]). *À $z \in \mathcal{Z}^{\text{lc}}$ correspond bijectivement une distribution à support dans les éléments compacts de $G(F)$.*

Expliquer la raison de ce théorème nécessite d'introduire le *cocentre* de G , objet non moins important que le centre que l'on aborde en section 3. On esquisse une idée de la démonstration du théorème 3.5.

3 Endomorphismes du cocentre

Nous avons linéarisée la théorie des représentations lisses de G en la prolongeant dans les $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ -modules. À présent, on définit le cocentre de G qui va permettre de « linéariser » la théorie du centre de Bernstein. Plus précisément, on plonge $\mathcal{Z}(G)$ dans l'algèbre des endomorphismes du cocentre.

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1. Soit $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ le commutateur de \mathcal{H} pour la convolution. Le *cocentre* de \mathcal{H} est l'espace vectoriel $\mathcal{C}(G) = \mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$. Notons $\text{End}(\mathcal{C}(G))$ l'algèbre de ses endomorphismes.

On introduit le cocentre (plutôt que l'algèbre \mathcal{H} elle-même) car les distributions invariantes, vu par convolution comme endomorphismes de \mathcal{H} , descendent en endomorphismes de l'abélianisé $\mathcal{C}(G)$.

Théorème 3.2 (Vignéras, Kazhdan [14]). *Soit $f \in \mathcal{H}(G)$. On a l'équivalence suivante :*

1. *La fonction f appartient $[\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)]$.*
2. *f est annulée par toute distribution invariante par conjugaison. De plus, il suffit de tester cette condition sur l'un des sous-ensembles de distributions suivants.*
3. *(Intégrales orbitales) Pour tout élément $x \in G \setminus X$ semi-simple, et toute mesure invariante $d\omega$ sur $\omega(x)$, $\int_G f d\omega = 0$.*
4. *(Caractères) Les formes linéaires Θ_π s'annulent en f pour π admissible de longueur finie.*

Corollaire 3.3. *Le centre $\mathcal{Z}(G)$ est une sous-algèbre de $\text{End}(\mathcal{C}(G))$.*

Démonstration. Les distributions G -invariantes de G qui appartiennent au centre de Bernstein sont exactement celle qui préservent \mathcal{H} par convolution. Il suffit de montrer qu'elles préservent aussi le commutateur.

Pour le voir, on peut voir que le deuxième point du théorème 3.2 est vérifié. On peut aussi se rappeler que le centre est égal à $\text{End}_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^{\text{op}}}(\mathcal{H}(G))$, i.e. les distributions de G telles que $z(h_1 * h_2 * h_3) = h_1 * z(h_2) * h_3$ pour tous $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}(G)$.

Par conséquent, $z([h, h']) = [z(h), h'] = [h, z(h')]$ et z induit un endomorphisme du cocentre. \square

Définissons une autre classe importante d'endomorphismes de $\mathcal{C}(G)$.

Définition 3.4. Soit X un ensemble ouvert et fermé, stable par conjugaison de G . Notons 1_X la fonction caractéristique de l'ouvert X . C'est une fonction régulière, et elle induit par multiplication l'opérateur de restriction

$$\begin{aligned} 1_X : \mathcal{H}(G) &\longrightarrow \mathcal{H}(G) \\ h &\longmapsto h|_X. \end{aligned}$$

Comme X est invariant par conjugaison, 1_X préserve le commutateur et induit un endomorphisme de $\mathcal{C}(G)$ que l'on note encore $1_X \in \text{End}(\mathcal{C}(G))$.

Remarques. On remarque que la convolution par 1_X ne préserve pas $\mathcal{H}(G)$. En particulier, le centre de Bernstein est strictement inclu dans $\text{End}(\mathcal{C}(G))$.

Il faut prendre garde à l'ordre de composition. Si $z \in \mathcal{Z}(G)$, X comme plus haut, $z \circ 1_X$ agit par $h \mapsto z * (h|_X)$. D'autre part, $1_X \circ z$ agit par $h \mapsto (z * h)|_X$. Il n'y a pas de raison que ces opérateurs commutent en général. Le théorème de Dat, Braverman-Kazhdan est un résultat de compatibilité de ces actions sur l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{C}(G)$.

3.2 Quelques opérateurs particuliers

Donnons quelques exemples fondamentaux d'endomorphismes de $\mathcal{C}(G)$.

- Pour toute composante connexe Ω de la variété de Bernstein, on dispose d'un idempotent e_Ω du centre $\mathcal{Z}(G)$, donc de $\text{End}(\mathcal{C}(G))$. La *formule de Plancherel* se reformule comme suit :

$$\text{Id}_{\mathcal{C}(G)} = \sum_{\Omega} e_\Omega.$$

- Une fonction lisse $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ induit par multiplication par f un morphisme de \mathcal{H} . Si f est de plus invariante par conjugaison, f induit un élément de $\text{End}(\mathcal{C}(G))$.
- Soit $M < G$ un Lévi de G . On dispose de la restriction et de l'induction entre cocentres de M et G . La *formule de Clozel* s'écrit (essentiellement) :

$$\text{Id}_{\mathcal{C}(G)} = \sum_{M < G} 1_{M_e}.$$

3.3 Panorama des interactions

Rappelons que $\widehat{\mathcal{H}}$ le complété de $\mathcal{H}(G)$ pour la topologie des idempotents. On sait que $\widehat{\mathcal{H}}$ s'identifie aux distributions essentiellement compactes de G . Le centre (en tant qu'algèbre) de $\widehat{\mathcal{H}}$ coïncide au centre de Bernstein. On résume la situation par le diagramme suivant. Soit $\mathcal{O}(G)$ l'algèbre des fonctions lisses de G , et $\mathcal{O}^{\text{inv}}(G)$ celles qui sont invariantes par conjugaison. Les flèches de gauche à droite sont données par la convolution. Les flèches de droite à gauche sont données par multiplication.

La flèche en pointillé est une section qui est bien définie sur les endomorphismes qui préservent le commutant $[\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)]$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}(G) = \mathcal{Z}(\widehat{\mathcal{H}}) & \longleftarrow & \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}(G)) & \longleftarrow & \mathcal{O}^{\text{inv}}(G) \\ \downarrow & & \uparrow \text{---} & & \downarrow \\ \widehat{\mathcal{H}} & \longleftarrow & \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}(G)) & \longleftarrow & \mathcal{O}(G) \end{array}$$

FIGURE 1 – Endomorphismes des algèbres de Hecke

Question. Les objets d'intérêt dans ce diagramme sont d'origine analytiques. Il serait intéressant de savoir si $\text{End}(\mathcal{C}(G))$ (ou au moins $\mathcal{O}(\Omega(G)) \times \mathcal{O}^{\text{inv}}(G)$) peut être réalisé comme un anneau de fonctions.

On reformule les résultats de Jean-François Dat et Braverman-Kazhdan dans ce contexte. On remarque que cette formulation rend le plongement de $\mathcal{Z}(G)$ nécessaire.

Théorème 3.5. Soit $\mathcal{Z}_{\text{comp}}(G)$ la sous-algèbre de $\text{End}(\mathcal{C}(G))$ des éléments de $\mathcal{Z}(G)$ commutant à $1_{G_{G,0}}$. Alors pour toute composante connexe Ω , $\mathcal{Z}_{\text{comp}}(G)e_\Omega$ est une droite vectorielle engendrée par e_Ω .

En particulier, avec les notations du théorème 3.5, $\mathcal{Z}_{\text{lc}} = \mathcal{Z}_{\text{comp}}$.

4 Le centre de Bernstein dans la nature

Les sections précédentes ont donné un aperçu de la théorie du centre de Bernstein et de ses difficultés. On en présente maintenant quelques applications. Retenons que dans toutes ces situations, le centre de Bernstein fournit aux conjectures les bons candidats de fonctions, transformées, etc. mais l'on est confronté à d'importantes difficultés techniques pour leur réalisation.

Nous aurions aussi aimé discuter de la *conjecture de la fonction test* de l'approche de Langlands et Kottwitz pour le comptage de points rationnels sur une variété de Shimura. On pourra se reporter à la présentation de Le Bras ([15], 2.2) pour un aperçu et le travail de T. Haines ([11], Conjecture 6.1.1) pour ladite conjecture.

4.1 Conjecture du centre stable

La *conjecture du centre stable* (voir [19], [3]) énonce l'existence d'une sous-algèbre $\mathcal{Z}^{\text{st}}(G)$ de $\mathcal{Z}(G)$, ainsi que différentes présentations conjecturales. Les fonctions de cette algèbre sont constantes sur chaque « paquet » de Langlands de représentations irréductibles. Par ailleurs, on dispose d'un candidat du côté distributionnel-géométrique pour le centre stable faisant intervenir certaines intégrales stables sur G .

Rappels sur la décomposition de Langlands Soit $\text{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G . Une des conjectures de Langlands locales fait correspondre une telle représentation à un *paramètre de Langlands*, i.e. une classe de $\widehat{G}(\mathbb{C})$ -conjugaison au but de morphismes :

$$\varphi: W_F \longrightarrow {}^L G(\mathbb{C}).$$

La correspondance $\pi \mapsto \varphi_\pi$ n'est pas nécessairement bijective. On dispose au dessus d'une paramètre de Langlands φ d'un ensemble fini de représentations $\pi \in \text{Irr}(G)$. Cet ensemble $\text{Irr}_\varphi(G)$ est le *L-paquet* correspondant à φ . Ainsi, un corollaire de cette correspondance serait une décomposition

$$\text{Irr}(G) = \bigsqcup_{\varphi} \text{Irr}_\varphi(G) \quad \text{et partant} \quad \Omega(G) = \bigsqcup_{\varphi} \Omega_\varphi(G).$$

Remarque. La conjecture de Langlands locale est démontrée pour $G = GL_n$ et F quelconque, la correspondance $\pi \mapsto \varphi_\pi$ est bijective (Henniart, [13]).

Conjecture 4.1 (du centre stable). *Le centre de Bernstein stable admet les définitions suivantes :*

1. $z \in \mathcal{Z}_0^{\text{st}}$ si et seulement si z induit une fonction constante sur les *L-paquets tempérés* $\Omega_\varphi(G)$ avec φ un *paquet tempéré*.
2. $z \in \mathcal{Z}_1^{\text{st}}$ si et seulement si z est dans $\mathcal{Z}(G)$ et dans la *clôture faible des intégrales orbitales stables* $S\Theta_\gamma$.

Remarques. - La définition 1. suppose la bonne définition des *L-paquets tempérés*, chose qui n'est comprise que pour SL_2 . Si $G = SL_2$, ces deux définitions sont équivalentes.
- \mathcal{Z}^{st} admet naturellement une structure de sous-algèbre avec 1.

4.2 Programme de Braverman-Kazhdan

On se donne k un corps global, G un groupe réductif sur k , un morphisme $\rho: {}^L G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ et une forme automorphe $\pi = \bigotimes_{v||k} \pi_v$ avec π_v irréductible et non-ramifiée pour presque toute place v .

Définition 4.2. La *fonction L* associée à (π, ρ) est $L(s, \pi, \rho) = \prod_{v||k} L(s, \pi_v, \rho)$ où

$$L(s, \pi_v, \rho) = \det(1 - \rho(\sigma_v)q_v^{-s})^{-1} \quad \text{pour } \pi_v \text{ non-ramifiée}$$

et σ_v le *paramètre de Satake* associé à v .

Remarque. Il existe un ensemble fini de places S tel que le produit $\prod_{v \notin S} L(s, \pi_v, \rho)$ converge absolument pour $\text{Re}(s) \geq C_0$ où C_0 est une constante dépendant uniquement de G .

Conjecture 4.3 (Langlands). *Les facteurs manquants peuvent être définis, et le produit $L(s, \pi, \rho)$ admet un prolongement méromorphe et satisfait une équation fonctionnelle*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad L(s, \pi, \rho) = \varepsilon(s, \pi, \rho) L(1 - s, \pi^\vee, \rho).$$

La conjecture 4.3 est établie pour $\rho = \text{Std}$ et $G = GL_1$ par Tate, pour $G = GL_n$ par Godement-Jacquet et Tamagawa. En 1967, Langlands énonce dans sa lettre à Weil, et plus tard, que cette conjecture suit de la *conjecture de fonctionnalité*. Cependant, Braverman et Kazhdan [5] reviennent à la méthode de Godement-Jacquet qu'on rappelle.

4.2.1 Rappel de la méthode de Godement-Jacquet

La transformée de Fourier et la formule de Poisson sur GL_n sont établies par Roger Godement and Hervé Jacquet dans [8] suivant les étapes :

1. L'ensemble M_n des matrices, et GL_n son ouvert.
2. $\mathcal{S}(M_n(F))$ l'espace de Schwartz-Bruhat.
3. pour F non-archimédien, $\beta_v = 1_{M_n(\mathcal{O}_v)}$ (dite *basique*) vérifiant

$$\text{tr}(\beta_v, \pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi \text{ est ramifiée} \\ L(\cdot, \pi_v, \rho) & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. La transformée de Fourier $\psi(\text{tr}(g))$ où ψ est un caractère additif de F .
5. La formule sommatoire de Poisson.

4.2.2 Approche de Braverman-Kazhdan

Voyons comment s'adapte cette méthode en toute généralité, pour un groupe réductif G et une représentation ρ .

1. On peut définir M^ρ un monoïde algébrique contenant G comme un ouvert dense.
2. La définition de $\mathcal{S}^\rho(G(F_v))$ est moins claire. On sait au moins qu'il est inclut dans l'ensemble des fonctions lisses f sur $G(F_v)$ à support « relativement compact » dans $M^\rho(F_v)$.
3. Si ρ est irréductible, on dispose d'une interprétation géométrique de la fonction basique, exprimée comme la trace d'un opérateur de Frobenius sur (ce qui devrait être) le complexe d'intersection $L^+ M^\rho$ (dû à Bouthier-Ngô-Sakellaridis [4]).
4. On dispose d'un candidat pour la transformée de ρ -Fourier, et de son implémentation pour SL_2 grâce à la théorie du centre de Bernstein. Dans ce cas, Ngô et Luo établissent les propriétés voulues.
5. Soit $f = \bigotimes'_v f_v \in \mathcal{S}^\rho(G(\mathbb{A}_F))$. On a un ensemble fini S tel que $f = \bigotimes_{v \in S} f_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \beta_v^\rho$ où $f_v \in \mathcal{S}^\rho(G(F_v))$. On lui applique la transformation de ρ -Fourier, pour laquelle β_v^ρ sont stables :

$$J^\rho f := \bigotimes_{v \in S} (J_v^\rho \star f_v) \otimes \bigotimes_{v \notin S} \beta_v^\rho.$$

Conjecture 4.4 (Braverman-Kazhdan). *Soit $f \in \mathcal{S}^\rho(G(\mathbb{A}_F))$. On peut écrire la formule sommatoire de ρ -Poisson*

$$\sum_{g \in G(k)} f(g) = \sum_{g \in G(k)} (J^\rho f)(g).$$

Ici aussi, Ngô montre qu'on peut espérer une formule sommatoire sur SL_2 après *stabilisation* ([18]).

5 Conclusion

L'objet de la thèse portera sur le centre de Bernstein et ses incarnations dans le programme de Langlands. Une première étape serait d'obtenir une extension du théorème de Dat et Braverman-Kazhdan pour une description complète du centre, en poids quelconques.

A Représentations (unitaires) de SL_2

Posons $G = SL_2$, le groupe algébrique réductif le « plus simple » que nous pouvons étudier. On s'intéresse à la théorie des représentations complexes sur $G(\mathbb{Q}_p)$, qui est connue. Soient trois sous-groupes d'intérêt de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{Q}_p^*, \beta \in \mathbb{Q}_p \right\} = M \rtimes N, \quad \text{où}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{Q}_p^* \right\} \quad \text{et} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{Q}_p \right\}.$$

P est un *sous-groupe parabolique* de G , M est le *sous-groupe de Lévi* et N le *sous-groupe unipotent* associés à P . N est topologiquement isomorphe à \mathbb{Q}_p^* .

A.1 Séries discrètes

La première famille de représentations unitaires de SL_2 provient de l'induction de caractères unitaires $\chi: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}^*$ à $G(\mathbb{Q}_p)$: χ définit une représentation 1-dimensionnelle de M , et on l'étend à P en posant $\chi(mn) = \chi(m)$ pour tout $(n, m) \in M \rtimes N$. La *série discrète* associée à χ est par définition la représentation $\pi_\chi = \text{Ind}_P^G(\chi)$. On peut caractériser l'action et l'irréductibilité de π_χ simplement.

Proposition A.1. *La représentation π_χ agit sur $L^2(F)$ par la formule suivante :*

$$\pi_\chi \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) f: x \longmapsto \chi(\beta x + \delta) |\beta x + \delta|^{-1} f \left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta} \right).$$

De plus, π_χ est réductible si et seulement si χ est un caractère de \mathbb{Q}_p^ d'ordre 2.*

A.2 Séries principales

Cependant, toutes les représentations ne peuvent pas être obtenue comme induite d'un parabolique, comme le montre la représentation triviale de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. La deuxième famille de représentations de SL_2 est contenue de tels objets.

Définition A.2. Soit $\pi: SL_2(\mathbb{Q}_p) \rightarrow GL(V)$ une représentation (lisse). On forme le *coefficient matriciel* de π en $(v, \tilde{v}) \in V \times \tilde{V}$ par

$$\varphi_{v, \tilde{v}}: G \longrightarrow \mathbb{C} : g \longmapsto \langle \tilde{v}, \pi(g^{-1})v \rangle = \tilde{v}(\pi(g^{-1})v).$$

On dit qu'une représentation π est une *série principale* si π est irréductible, unitaire, et si $\varphi_{v, \tilde{v}}$ est de carré intégrable pour tout (v, \tilde{v}) . On distingue deux classes de séries principales.

1. Les *représentations supercuspidales* : leurs coefficients matriciels sont à support compact, en particulier de carré intégrable.
2. La *série principale généralisée* : les autres.

On dispose d'une description agréable des ces deux sous-séries. Celle-ci fait le lien avec les séries discrètes.

Proposition A.3. *D'une part, toute série principale généralisée est une sous-représentation d'une induite d'un parabolique de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$; cette classe recoupe donc les séries discrètes.*

D'autre part, les représentations supercuspidales n'apparaissent jamais comme sous-représentation d'une induite d'un parabolique. Cette propriété les caractérise.

Remarque. On impose l'irréductibilité dans le cas des séries principales. En particulier, une représentation supercuspidale est irréductible, par définition.

Le théorème suivant décrit complètement les supercuspidales de SL_2 . L'énoncé pour des groupes plus généraux est une conjecture (« folklorique » dit J. Fintzen).

Théorème A.4 (Shalika). *Toute représentation supercuspidale de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ est obtenue comme induite compacte à partir d'un sous-groupe ouvert compact de SL_2 .*

A.3 Séries complémentaires

On termine la classification des représentations de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour simplifier, on se place dans le cas où p est impair.

Définition A.5. Soit 1_P la représentation triviale de N . Alors la triviale de G est une sous-représentation de $\text{Ind}_P^G(1_P)$. Le quotient de l'une par l'autre est appelée la *représentation de Steinberg* de SL_2 :

$$1 \longrightarrow 1_G \longrightarrow \text{Ind}_P^G(1_P) \longrightarrow \text{St}_G \longrightarrow 1.$$

La Steinberg de G et la triviale de G sont des séries discrètes irréductibles.

Enfin, l'induction χ_π d'un caractère non-unitaire $\chi: \mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ défini par $\chi(x) = |x|^s$ ($s \in]0, 1[$) forme la *série complémentaire* de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. De plus, π_χ est une représentation unitaire en modifiant le produit scalaire sur $L^2(F)$ convenablement. Enfin, la représentation π_χ est irréductible.

Remarque. En reprenant l'expression de l'induite de la proposition A.1, on en déduit que $\text{Ind}_P^G(1_P)(x) = |x|$. Cette dernière apparaît donc comme une série complémentaire « à la limite ».

Conclusion. Les trois paragraphes précédents classifient les représentations irréductibles et unitaires de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ (dans le cas où $p \neq 2$). La discussion est identique pour tout corps local non-archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2.

Dans un cadre plus général, e.g. SL_n ou GL_n , la situation se complique significativement.

B index des notations

On adopte les notations suivantes.

- F est un corps local non-archimédien, \mathcal{O} son anneau des entiers, \mathfrak{p} son idéal maximal et ϖ une uniformisante. On le suppose de caractéristique nulle sauf mention du contraire. F est donc une extension finie de \mathbb{Q}_p pour p un nombre premier.
- $\psi: F \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un caractère de groupes continu.
- $G(F)$ désigne les F -points d'un schéma en groupes G réductif défini sur F . Un sous-groupe de $G(F)$ désignera le groupe des F -points d'un sous-schéma en groupes de G .
- μ_G une mesure de Haar sur $G(F)$.
- \mathcal{H} l'algèbre des l'algèbre pour la convolution des mesures lisses à support compact sur $G(F)$, c'est l'ensemble des fonctions lisses à support compact après choix d'une mesure de Haar sur $G(F)$.
- $\mathcal{C}(G)$ désigne le cocentre de G , c'est-à-dire le quotient $\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$. Le cocentre n'a pas de notation arrêtée, on le rencontre dans la littérature parfois comme $\overline{\mathcal{H}}$, \mathcal{C}^{fin} ou $\mathcal{O}(\mathcal{H})$.
- \widehat{G} le groupe dual de G au sens de Langlands ; c'est un groupe algébrique défini sur \mathbb{C} dont le réseau des racines (resp. coracines) est égal au réseau des coracines (resp. racines) de G .
- ${}^L G$ est défini comme $\widehat{G} \rtimes W_F$.

Références

- [1] Joseph BERNSTEIN et Andrei ZELEVINSKY. « Induced representations of the group $GL(n)$ over a p -adic field ». In : *Funkcional. Anal. i Priložen* 10 (1976), p. 74-75.
- [2] R. BEZRUKAVNIKOV, A. BRAVERMAN et D. KAZHDAN. *Bernstein components via Bernstein center*. 2018. arXiv : 1512.08637.
- [3] R. BEZRUKAVNIKOV, D. KAZHDAN et Y. VARSHAVSKY. « Une approche catégorique de la conjecture du centre stable ». In : *De la Géométrie algébrique aux formes automorphes (I)*. T. 369. Astérisque, SMF, 2015, p. 27-97.
- [4] A. BOUTHIER, B. C. NGÔ et Y. SAKELLARIDIS. « On the formal arc space of a reductive monoid ». In : *American Journal of Mathematics* 138.1 (fév. 2016), p. 81-108. ISSN : 1080-6377. DOI : 10.1353/ajm.2016.0004.
- [5] A. BRAVERMAN et D. KAZHDAN. « γ -sheaves on reductive groups, Studies in memory of Issai Schur ». In : *Progr. Math.* 210 (2000), p. 22-47.
- [6] Jean-François DAT. « Quelques propriétés des idempotents centraux des groupes p -adiques ». In : *J. reine angew. Math.* 504 (2004), p. 69-103.
- [7] Pierre DELIGNE. « Le « centre » de Bernstein ». In : *Representations of reductive groups over a local field*. Travaux en Cours, Hermann, 1984, p. 1-32.
- [8] Roger GODEMENT et Hervé JACQUET. *Zeta functions of simple algebras*. Sous la dir. de SPRINGER-VERLAG. T. 260. Lecture Notes in Mathematics, 1972.
- [9] B. H. GROSS. « On the Satake isomorphism ». In : *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 254 (1998), p. 223-237.
- [10] T. HAINES, R. KOTTWITZ et A. PRASAD. *Iwahori-Hecke Algebras*. 2009. arXiv : math/0309168 [math.RT].
- [11] Thomas J. HAINES. *The stable Bernstein center and test functions for Shimura varieties*. 2014. arXiv : 1304.6293 [math.AG].
- [12] HARISH-CHANDRA. *Admissible Invariant Distributions on Reductive p -adic Groups*. T. 16. Notes de S. DeBacker, et Paul Sally, Jr. University Lecture Series, 1968.
- [13] Guy HENNIART. « Sur la conjecture de Langlands locale pour GL_n ». In : *Journal de théorie des nombres de Bordeaux* 13.1 (2001), p. 167-187.
- [14] D. KAZHDAN. « Cuspidal geometry of p -adic groups ». In : *Journal d'Analyse Mathématique* 47 (1986), p. 1-36.
- [15] Arthur-César LE BRAS. *Groupes de Galois et représentations automorphes : une introduction au programme de Langlands*. https://www.math.ens.psl.eu/shared-files/9676/?IDR_ACLB.pdf. 2013.
- [16] Zhilin LUO et Bao Châu NGÔ. *Nonabelian Fourier Kernels on SL_2 and GL_2* . 2024. arXiv : 2409.14696 [math.NT].
- [17] A. MOY et M. TADIC. « The Bernstein center in terms of invariant locally integrable functions ». In : *Representation theory* 6 (2002), p. 313-329.
- [18] Bao Châu NGÔ. *Centre et cocentre*. Cours au Collège de France, notes personnelles. 2024.
- [19] Peter SCHOLZE et Sug Woo SHIN. *On the cohomology of compact unitary group Shimura varieties at ramified split places*. 2011. arXiv : 1110.0232 [math.AG].
- [20] Jean-Loup WALDSPURGER. « La formule de Plancherel pour les groupes p -adiques (d'après Harish-Chandra) ». In : *J. Inst. Math. Jussieu* 2 (2003), p. 235-333.