

Théorème d'Erdős-Kac dans un régime de grande déviation pour les translatés d'entiers ayant k facteurs premiers

Olivier GARCONNET

2023-2024

Résumé

Ce mémoire est tiré d'un article en cours de finalisation sous la direction de Sary Drap-
peau (Institut de Mathématiques de Marseille). J'ai découpé les parties techniques de la
preuve en ajoutant des détails sur les méthodes classiques de théorie analytique des nombres
que l'on trouve en grande partie dans le merveilleux livre de Tenenbaum [Ten15].

Résumé en anglais : let $x \geq 3$, for $1 \leq n \leq x$ an integer, let $\omega(n)$ be its number of distinct
prime factors. We show that, among the values $n \leq x$ with $\omega(n) = k$ where $1 \leq k \ll \log_2 x$,
 $\omega(n-1)$ satisfies an Erdős-Kac type theorem around $2 \log_2(x)$, so in large deviation regime,
when weighted by $2^{\omega(n-1)}$. This sharpens a result of Gorodetsky and Grimmelt [GG23] with
a quantitative error term. The proof of the main theorem is based on the characteristic
function method and uses recent progress on Titchmarsh's divisor problem.

Table des matières

1	Introduction et présentation des résultats	2
2	Étude de la série génératrice	4
3	Preuve des Théorèmes 1 et 2	8
3.1	Preuve du Théorème 2	8
3.2	Preuve du Théorème 1	8

Notation

On rappelle certaines notations présentes dans ce mémoire et utilisées en théorie analytique
des nombres. Pour $m, n, d, k \in \mathbb{N}$, et $x, y \in \mathbb{R}^*$,

- $(m, n) := PGCD(m, n)$,
- $\log_k(x)$ signifie log itéré k fois.
- τ est la fonction nombre de diviseurs $\tau(n) := \sum_{d|n} 1$.
- φ est la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n) := \sum_{0 < m \leq n} \mathbb{1}_{(n,m)=1}$.
- Avec la notation de Vinogradov $x \ll y$ signifie qu'il existe $C > 0$ une constante telle que $x \leq Cy$.
- Une fonction arithmétique est une fonction définie sur \mathbb{N}^* , elle est dite multiplicative si, en plus, on a $f(1) = 1$ et

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{si } (m, n) = 1.$$

1 Introduction et présentation des résultats

Introduction

Pour $k, n \geq 1$ deux entiers et $x \geq 1$ un réel, on note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n , on note $\mathcal{E}_k(x)$ la définition suivante

$$\mathcal{E}_k(x) := \{n \leq x : \omega(n) = k\},$$

et $\pi_k(x) := \#\mathcal{E}_k(x)$. On définit

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt. \quad (y \in \mathbb{R})$$

Le théorème suivant est un résultat fondamental en théorie probabiliste des nombres. Il donne la répartition de la fonction $\omega(n)$ autour de sa valeur moyenne, pour n de l'ordre de x , elle vaut $\log_2(x)$. Par l'expression $\omega(n) = \sum_p 1_{p|n}$, ce théorème (E-K) indique une propriété d'indépendance statistique des événements $\{p \mid n\}$ pour n pris au hasard entre 1 et x .

Théorème (Erdős & Kac [EK39]; Rényi & Turán [RT58]; voir III.4.4 [Ten15]). *Uniformément pour $x \geq 3$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\#\left\{n \leq x : \omega(n) \leq \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\} = x \left\{ \Phi(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right) \right\}.$$

Il est naturel de savoir si un sous-ensemble des entiers défini par une propriété multiplicative conserve des propriétés lorsqu'on les translate. Halberstam [Hal56] a étudié la répartition de $\omega(p-1)$ pour p un nombre premier. Fouvry & Tenenbaum [FT96] généralise le précédent résultats aux entiers friables qui sont des entiers naturels dont l'ensemble des facteurs premiers sont petits, relativement à une borne donnée. Goudout [Gou20], en s'inspirant de leur méthode, a étudié les entiers avec un nombre fixé de facteurs premiers.

Théorème (Goudout [Gou20]). *Soit $R > 0$ fixé. Uniformément pour $x \geq 3, 1 \leq k \leq R \log_2 x$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\pi_k(x, y) = \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \mathbb{1}_{\omega(n-1) \leq \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}} = \pi_k(x) \left\{ \Phi(y) + O\left(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right) \right\}.$$

Estimer $\omega(n-1)$ loin de la moyenne, $\omega(n-1) \approx \beta \log_2(x)$, $\beta \neq 1$, est un problème plus compliqué. Cela revient essentiellement à savoir étudier $\sum_{n \leq x} \beta^{\omega(n-1)}$. Le cas $\beta = 1$ revient au théorème de Goudout [Gou20]. On s'attend à avoir des résultats pour $\beta = 2$ en vertu du problème de Titchmarsh,

$$\sum_{p \leq x} 2^{\omega(p-1)} = x + O\left(\frac{x \log_2 x}{\log x}\right).$$

Voir par exemple Fouvry [Fou85]. Dans le cas analogue où $p-1$ est remplacé par $N-p$, C'est l'objet de la conjecture B de [Ell15] d prouvée par Gorodetsky et Grimmelt [GG23].

Théorème (Gorodetsky & Grimmelt [GG23]). *Soit $y \in \mathbb{R}$, alors on a*

$$\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{p < N} 2^{\omega(N-p)} \mathbb{1}_{\omega(N-p) \leq 2 \log \log N + y(2 \log \log N)^{1/2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-u^2/2} du,$$

pour $N \rightarrow \infty$, avec φ l'indicatrice d'euler.

Un résultat similaire est attendu, avec les mêmes méthodes, en remplaçant $N - p$ par $p - 1$ dans l'énoncé de ce théorème. Pour prouver ce résultat, les auteurs de [GG23] se basent sur la méthode des moments et utilisant des résultats récents sur l'équirépartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques de grands modules.

Présentation des résultats obtenus pendant le stage

Le but de cet article est de mettre à profit les méthodes analytiques qui sous-tendent [Gou20] afin d'obtenir un terme d'erreur quantitatif et de généraliser le précédent résultat aux entiers n ayant un nombre fixé de facteurs premiers. On définit

$$S_k(x) := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(n-1)},$$

$$S_k(x, y) := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(n-1)} \mathbb{1}_{\omega(n-1) \leq 2 \log_2 x + y \sqrt{2 \log_2 x}}.$$

Le théorème principal de ce papier est le suivant.

Théorème 1. *Soit $R > 0$ fixé, uniformément pour $x \geq 3$, $y \in \mathbb{R}$ et $1 \leq k \leq R \log_2 x$ on a*

$$S_k(x, y) = S_k(x) \left\{ \Phi(y) + O\left(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right) \right\}.$$

La quantité $S_k(x)$ du membre de droite sera estimée précisément au cours de la démonstration et vaut

$$S_k(x) = \frac{x (\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ A_r + O\left(\frac{1}{\log_2 x}\right) \right\},$$

avec $r = \frac{k-1}{\log_2 x}$ et

$$A_r := \frac{1}{\Gamma(r+1)} \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{r+1}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{r+1}.$$

Malheureusement, dû à des problèmes techniques, notre méthode ne permet pas de reprouver le résultat de [GG23] pour $N - p$ à la place de $p - 1$. On démontre ce théorème, après avoir étudié la série génératrice adéquate, par la méthode des fonctions caractéristiques et l'inégalité de Berry-Esseen (voir page 9). De plus, en corollaire de la preuve on démontre le résultat suivant qui localise le nombre de "petits" facteurs premiers de $n - 1$ pour $n \in \mathcal{E}_k(x)$. Pour $k \geq 1$, $\ell \geq 0$ et $1 \leq w \leq x$, on note

$$\omega(n, w) := \sum_{\substack{p|n \\ p \leq w}} 1, \quad (n \geq 1),$$

$$S_{k,\ell}(x, w) := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(n-1)} \mathbb{1}_{\omega(n-1, w) = \ell}.$$

Théorème 2. *Il existe une constante absolue $\eta > 0$ telle que pour $R \geq 1$ fixé quelconque, uniformément pour $3 \leq w \leq x^{\eta(\log_3 x)/(R^2 \log_2 x)}$, et $0 \leq \ell \leq R \log_2 w$, on a*

$$S_{k,\ell}(x, w) = S_k(x) \frac{(2 \log_2 w)^\ell}{\ell! (\log w)^2} \left\{ H_k\left(\frac{\ell}{\log_2 w}\right) + O\left(\frac{k}{(\log_2 x)^2} + \frac{\ell+1}{(\log_2 w)^2}\right) \right\}.$$

où H_k est la fonction entière définie sur \mathbb{C} par

$$H_k(z) := e^{\gamma(2z-2)} \prod_p \left(1 + \frac{2z-2}{p+r}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2z-2}.$$

et γ est la constante d'Euler.

Organisation du mémoire

La section 2 est dédiée à l'étude de la série génératrice associée à la localisation des "petits" facteurs premiers de $n-1$. Dans la section 3, on utilise cette étude et le théorème de Berry-Esseen pour prouver nos deux théorèmes.

2 Étude de la série génératrice

Pour $1 \leq w \leq x$ et $k \geq 1$, on définit

$$F_k(z) := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(n-1)} z^{\omega(n-1,w)}.$$

On omet les variables w et x afin d'alléger la notation. La fonction $F_k(z)$ est la série génératrice associée à $(S_{k,\ell}(x,w))_\ell$ et va être calculée dans le lemme suivant.

Lemme 3. *Il existe $\delta > 0$ une constante absolue telle que pour $R \geq 1$ fixé, $3 \leq w \leq x$, $|z| \leq R$, et $k \leq R \log_2 x$, avec $r := (k-1) \log_2 x$ et $u := \log x / \log w$, on a*

$$F_k(z) = S_k(x) (\log w)^{2z-2} \left\{ H_k(z) + \frac{r\xi(z)}{2 \log_2(x)} + O\left(\frac{1}{\log w} + \frac{r^2}{(\log_2 x)^2}\right) \right\} \\ + O\left(xu^{-\delta u/2} (\log x)^{2R+3} + x^{1-\delta/4}\right),$$

avec ξ une fonction entière pouvant dépendre des paramètres w, x et k , admettant 1 pour zéro et uniformément bornée pour $|z| \leq R$.

Remarque. Dans le cas particulier où $k = 1$, donc pour les nombres premiers, on a un terme d'erreur plus précis en $O\left(\frac{1}{\log x}\right)$ au lieu de $O\left(\frac{r^2}{(\log_2 x)^2}\right)$ mais cela n'améliore pas le terme d'erreur du théorème 1.

Dans le reste de cette section, on démontre le lemme 3.

Introduction de g_z

On introduit g_z la fonction multiplicative définie par $g_z(1) = 1$, $g_z(p^\alpha) = 0$ pour $\alpha > 2$ et $g_z(p) = 2(z-1)$, $g_z(p^2) = 1-2z$ pour $p \leq w$ un nombre premier et $g_z(p) = 0$, $g_z(p^2) = -1$ pour $p > w$.

Une telle fonction permet d'avoir $g_z * \tau(n) = 2^{\omega(n)} z^{\omega(n,w)}$. Ainsi on a

$$F_k(z) = \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(p-1)} z^{\omega(p-1,w)} = \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \sum_{q|n-1} g_z(q) \tau\left(\frac{n-1}{q}\right).$$

Découpage pour q grand et simplification de τ

L'astuce de Rankin est une manière de transformer une somme ayant une condition en une somme sur tous les entiers et cela donne

$$\sum_n \mathbb{1}_{n \leq x} \leq \sum_n \left(\frac{x}{n}\right)^\alpha,$$

avec α une constante quelconque qui peut être choisi astucieusement.

Essentiellement avec l'astuce de Rankin, on peut tronquer la somme à $q < x^\delta$, où $\delta > 0$ est un paramètre arbitraire choisi plus tard et $u := \frac{\log x}{\log w}$. On a ainsi

$$R_1 := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \sum_{\substack{q|n-1 \\ q > x^\delta}} g_z(q) \tau\left(\frac{n-1}{q}\right) \ll xu^{-\delta u/2} (\log x)^{2R+3} + x^{1-\delta/4}. \quad (1)$$

On a l'égalité suivante

$$\tau(n) = 2 \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} 1 + \mathbb{1}_n \text{ carré}.$$

On peut oublier l'indicatrice car en majorant $|g_z(q)| \ll_\varepsilon x^\varepsilon$, on a

$$R_2 := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \sum_{\substack{q|n-1 \\ q \leq x^\delta}} g_z(q) \mathbb{1}_{\frac{n-1}{q} = l^2} \ll x^\varepsilon \sum_{\substack{q, \ell \\ q \leq x^\delta \\ \ell^2 q + 1 \leq x}} 1 \ll x^{\varepsilon + \delta + 1/2}.$$

Application du théorème de Fouvry-Tenenbaum

Après cette première étape on a

$$F_k(z) = \sum_{q \leq x^\delta} g_z(q) \sum_d \sum_{\substack{d^2 q + 1 \leq n \\ n \equiv 1 [dq] \\ n \in \mathcal{E}_k(x)}} 1 + R_1 + R_2.$$

On souhaite appliquer un théorème de type Bombieri-Vinogradov, qui évalue le terme d'erreur dans le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques, pris en moyenne sur un certain ensemble de module. On souhaite utiliser le travail de Fouvry et Tenenbaum [FT22] qui évalue la moyenne de $\Delta_f(x, q, a)$ avec f une fonction multiplicative, et

$$\Delta_f(x, q, a) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} f(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} f(n) \quad (x \geq 1).$$

Pour cela on a besoin d'une fonction multiplicative or la fonction $n \mapsto \mathbb{1}_{\omega(n)=k}$ ne l'est pas. Donc d'après une idée de Selberg [Sel54] on introduit aussi

$$\mathbb{1}_{\omega(n)=k}(n) = \int_{|u|=1} \frac{1}{u^{k+1}} u^{\omega(n)} du.$$

Si on prend δ suffisamment petit, on applique deux fois le corollaire 1.7 de Fouvry-Tenenbaum [FT22], pour $1 \leq n \leq x$ et pour $1 \leq n < d^2 q + 1$ avec un travail supplémentaire pour le deuxième cas. On obtient

$$R_3 := \int_{|u|=1} \frac{1}{u^{k+1}} \sum_{q \leq x^\delta} g_z(q) \sum_d \left(\sum_{\substack{d^2 q + 1 \leq n \leq x \\ n \equiv 1 [dq]}} u^{\omega(n)} - \frac{1}{\varphi(dq)} \sum_{\substack{d^2 q + 1 \leq n \leq x \\ (n, dq) = 1}} u^{\omega(n)} \right) \ll \frac{x}{(\log x)^C}.$$

où C est une constante arbitraire.

Introduction de f_z

On intègre sur la variable u pour se ramener à étudier les nombres avec k facteurs premiers distincts. De la même manière que la majoration de R_1 en (1), avec l'astuce de Rankin, on peut relâcher la condition $q \leq x^\delta$:

$$R_4 := \sum_{q > x^\delta} g_z(q) \sum_d \sum_{\substack{d^2 q + 1 \leq n \leq x \\ (n, qd) = 1 \\ n \in \mathcal{E}_k(x)}} \frac{1}{\varphi(qd)} \ll xu^{-\delta u/2} (\log x)^{2R+3} + x^{1-\delta/4}.$$

Il nous reste

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(p-1)} z^{\omega(p-1, w)} = \sum_q g_z(q) \sum_d \sum_{\substack{d^2 q + 1 \leq n \leq x \\ (n, qd) = 1}} \frac{1}{\varphi(qd)} + R_1 + R_2 + R_3 - R_4 \\ &= \sum_{\ell \leq x} f_z(\ell) \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \mathbb{1}_{(\ell, n) = 1} - R_5 + R_1 + R_2 + R_3 - R_4, \end{aligned}$$

où R_5 et la fonction multiplicative f_z sont définis par

$$f_z(\ell) := \sum_{\substack{d, q \\ d^2 q = \ell}} \frac{g_z(q)}{\varphi(dq)}, \quad R_5 := \sum_{\ell \leq x} f_z(\ell) \sum_{\substack{n \leq \ell \\ \omega(n) = k}} \mathbb{1}_{(\ell, n) = 1}.$$

Pour la fin de la preuve du Lemme 3, on note le terme principal qui nous reste

$$TP = \sum_{\ell \leq x} f_z(\ell) \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \mathbb{1}_{(\ell, n) = 1}.$$

Moyenne d'une fonction multiplicative sur $\mathcal{E}_k(x)$ pour estimer le TP

Le lemme 3 de [Gou20] donne la moyenne d'une fonction multiplicative sur $\mathcal{E}_k(x)$. Ainsi appliqué à la fonction $n \mapsto \mathbb{1}_{(\ell, n) = 1}$ cela donne, avec $r = \frac{k-1}{\log_2(x)}$ (on rappelle $k \ll \log_2(x)$),

$$\sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \mathbb{1}_{(\ell, n) = 1} = \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ \lambda_\ell(r) - \frac{r \lambda_\ell''(r)}{2 \log_2 x} + O\left(\frac{r^2}{(\log_2 x)^2}\right) \right\}, \quad (2)$$

où λ_ℓ est la fonction entière définie par

$$\lambda_\ell(y) := \frac{1}{\Gamma(y+1)} \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{y}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^y \prod_{p|\ell} \left(1 + \frac{y}{p-1}\right)^{-1} \quad (y \in \mathbb{C}),$$

où les pôles du second produit en $1-p$ sont compensés par les zéros du premier. On pose

$$C_r := \frac{1}{\Gamma(r+1)} \prod_{p \geq 2} \left(1 + \frac{r}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^r,$$

et dans l'optique d'évaluer le TP à l'aide de (2), on veut estimer

$$T_x(z, r) := C_r \sum_{\ell \leq x} f_z(\ell) \prod_{p|\ell} \left(1 + \frac{r}{p-1}\right)^{-1},$$

ainsi que

$$\sum_{\ell \leq x} f_z(\ell) \frac{r \lambda_\ell''(r)}{2 \log_2 x} = \frac{2r}{\log_2 x} \frac{d^2 T_x(z, r)}{dr^2}.$$

Application du théorème de Selberg-Delange pour évaluer $T_x(z, r)$

Soit $F(s) := \sum_{n \geq 1} a_n/n^s$ une série de Dirichlet tel que on a, autour de $s = 1$,

$$F(s) = G(s)\zeta(s)^\rho,$$

avec $\rho \in \mathbb{C}$ et $G(s)$ est une fonction holomorphe dans un certain domaine à gauche de la droite $\operatorname{Re} s = 1$. Cela veut dire que F a une singularité en $s = 1$ et qu'il se comporte de manière voisine à une puissance de Zêta. La méthode de Selberg-Delange (voir [Ten15, théorème II.5.2]) nous donne une approximation de la fonction sommatoire des coefficients :

$$\sum_{n \leq x} a_n = x(\log x)^{\rho-1} \left\{ P\left(\frac{1}{\log x}\right) + O(R(x)) \right\},$$

avec P un polynôme et $R(x)$ est une fonction de x , explicite et tous dépendants des paramètres du problème.

Dans notre cas on a $\ell \mapsto f_z(\ell) \prod_{p|\ell} \left(1 + \frac{r}{p-1}\right)^{-1}$ une fonction multiplicative et sa série de Dirichlet peut être écrit de la forme $F(s) = \zeta(2s+1)H(s)$ avec $H(s)$ une fonction holomorphe autour de $s = 0$. Ainsi on peut appliquer le théorème de Selberg-Delange [Ten15, théorème II.5.2] et cela nous donne

$$\sum_{\ell \leq x} \ell f_z(\ell) \prod_{p|\ell} \left(\frac{p-1}{p-1+r}\right) = x(\log w)^{2z-2} \left(h_r(z) + O\left(\frac{1}{\log w} + e^{-c_1 \sqrt{\log x}}\right) \right), \quad (3)$$

avec $c_1 > 0$ une constante et

$$h_r(z) := e^{\gamma(2z-2)} \prod_p \left(1 + \frac{2z-1}{p-1+r}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2z-1}.$$

Puis par intégration par partie, on obtient

$$\sum_{n \leq x} f_z(n) \prod_{p|n} \left(\frac{p-1}{p-1+r}\right) = (\log x)(\log w)^{2z-2} \left(h_r(z) + O\left(\frac{1}{\log w} + e^{-c_1 \sqrt{\log x}}\right) \right).$$

Finalement on a uniformément en $r \leq R$

$$T_x(z, r) = C_r(\log x)(\log w)^{2z-2} \left(h_r(z) + O\left(\frac{1}{\log w} + e^{-c_1 \sqrt{\log x}}\right) \right).$$

Conclusion

Dans la partie précédente l'équation (3) permet de calculer R_5 ,

$$\begin{aligned} R_5 &= \sum_{\ell \leq x} f_z(\ell) \sum_{\substack{n \leq \ell \\ \omega(n)=k}} \mathbb{1}_{(\ell, n)=1} = \frac{C_r}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{\ell \leq x} \ell f_z(\ell) \prod_{p|\ell} \left(\frac{p-1}{p-1+r}\right) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log_2 x}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{\log x} \frac{C_r x (\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} (\log w)^{2z-2} \left\{ h_r(z) + O\left(\frac{1}{\log_2 x}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Pour conclure on obtient

$$TP = \frac{x (\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} (\log w)^{2z-2} \left\{ C_r h_r(z) - \frac{r}{2 \log_2 x} \frac{d^2 C_r h_r(z)}{dr^2} + O\left(\frac{1}{\log w} + \frac{r^2}{(\log_2 x)^2}\right) \right\}.$$

L'équation précédente évaluée en $z = 1$ permet d'obtenir la bonne approximation suivante de $S_k(x) = F_k(1)$, où on a posé $A_r = C_r h_r(1)$,

$$S_k(x) = \frac{x (\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ A_r - \frac{r}{2 \log_2 x} \frac{d^2 C_r h_r(1)}{dr^2} + O\left(\frac{r^2}{(\log_2 x)^2}\right) \right\}.$$

Finalement on a

$$TP = S_k(x) (\log w)^{2z-2} \left\{ \frac{h_r(z)}{h_r(1)} + \frac{r}{2 \log x} \left(\frac{h_r(z) \frac{d^2 C_r h_r(1)}{dr^2}}{C_r h_r(1)^2} - \frac{d^2 C_r h_r(z)}{dr^2} \right) + O\left(\frac{r^2}{\log_2(x)}\right) \right\}.$$

On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$H_k(z) := \frac{h_k(z)}{h_k(1)} = e^{\gamma(2z-2)} \prod_p \left(1 + \frac{2z-2}{p+r} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{2z-2},$$

$$\xi(z) := \frac{h_r(z)}{C_r h_r(1)^2} \frac{d^2}{dr^2} [C_r h_r(1)] - \frac{1}{C_r h_r(1)} \frac{d^2}{dr^2} [C_r h_r(z)].$$

La fonction ξ est une fonction entière admettant 1 pour zéro et bornée uniformément en w, x et k sous les conditions de l'énoncé du lemme 3.

3 Preuve des Théorèmes 1 et 2

3.1 Preuve du Théorème 2

Démonstration. On utilise une idée de Selberg [Sel54]. La quantité $S_{k,\ell}(x, w)$ est le coefficient de x^ℓ dans $F_k(z)$, ce qui est d'après le théorème des résidus

$$S_{k,\ell}(x, w) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=\rho} \frac{F_k(z)}{z^{\ell+1}} dz.$$

On insère l'estimation du Lemme 3 dans l'intégrale. L'intégrale résultante en z est alors estimée par une méthode similaire à la section 3 de [Gou20], la seule différence est un facteur 2 dans la puissance de $\log w$. \square

3.2 Preuve du Théorème 1

Approximation de $S_k(x, y)$ par une version sans les grands facteurs premiers

On suit la démonstration de [Gou20], elle-même basée sur la démonstration de [FT96, cor.5]. Pour cette démonstration, on choisit

$$w := \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^2}\right).$$

On se donne une constante $C > 0$ à fixer plus tard. On pose pour $x \geq 2$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_k(x, y) &:= \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(n-1)} \mathbb{1}_{\omega(n-1, w) \leq 2 \log_2 x + y \sqrt{2 \log_2 x}}, \\ D_k(x) &:= \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(n-1)} \mathbb{1}_{\omega(n-1) - \omega(n-1, w) > C \log_3 x}.\end{aligned}$$

Pour que le lemme 3 soit intéressant à appliquer, on doit montrer que l'influence des grands facteurs premiers de $n - 1$ est négligeable donc que $\tilde{S}_k(x, y)$ est une bonne approximation de $S_k(x, y)$ pour cela il suffit de majorer D_k , car on a

$$\tilde{S}_k \left(x, y - \frac{C \log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}} \right) - D_k(x) \leq S_k(x, y) \leq \tilde{S}_k(x, y). \quad (4)$$

On utilise essentiellement l'astuce de Rankin pour majorer D_k et on obtient

$$D_k(x) \ll \frac{x}{\log_2 x}, \quad (5)$$

en choisissant C suffisamment grand.

Approximation de $\tilde{S}_k(x, y)$ par Berry Esseen

Dans la fin de notre preuve on a besoin de lier deux fonctions proches pouvant être vues comme des fonctions de répartition, pour cela on a le théorème suivant :

Théorème (Berry-Esseen voir la section II.7.6 de [Ten15]). *Soient F, G deux fonctions de répartition de fonctions caractéristiques respectives f, g . Supposons que G est dérivable et que G' est bornée sur \mathbb{R} . Alors on a, pour tout $T > 0$,*

$$\|F - G\|_\infty \leq 16 \frac{\|G'\|_\infty}{T} + 6 \int_{-T}^T \left| \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\tau} \right| d\tau$$

Il ne reste plus qu'à estimer $\tilde{S}_k(x, y)$, on utilise pour cela la méthode des fonctions caractéristiques. Il est naturel de poser

$$\tilde{S}_k^*(x, y) := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 2^{\omega(n-1)} \mathbb{1}_{\omega(n-1, w) \leq \log_2 w + y \sqrt{\log_2 w}}.$$

D'après le théorème de Berry-Esseen [Ten15, th.II.7.16], en posant $T := 2 \log_2 w$, on a

$$\sup_y \left| \tilde{S}_k^*(x, y) - S_k(x) \Phi(y) \right| \ll \frac{S_k(x)}{\sqrt{T}} + \int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} \left| e^{-it\sqrt{T}} F_k(e^{it/\sqrt{T}}) - S_k(x) e^{-t^2/2} \right| \frac{dt}{|t|}.$$

On découpe l'intégral en trois domaines $|t| \leq 1/\log x$, $1/\log x \leq |t| \leq T^{1/3}$, $T^{1/3} < |t| \leq \sqrt{T}$. Dans le deuxième domaine, une majoration fine apportée par le Lemme 3 permet la majoration souhaitée et dans les deux autres une majoration grossière suffit. Finalement on obtient

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \tilde{S}_k^*(x, y) - S_k(x) \Phi(y) \right| \ll \frac{S_k(x)}{\sqrt{\log_2 x}}. \quad (6)$$

Le résultat (6) nous dit qu’une petite variation de y ne change pas le résultat. Or on a $\log_2 w = \log_2 x - 2 \log_3 x$ et $\tilde{S}_k(x, y) = \tilde{S}_k^*(x, y')$ avec $y' = y + O\left(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right)$ donc on obtient

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \tilde{S}_k^*(x, y) - \tilde{S}_k(x, y) \right| \ll \frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}} S_k(x).$$

De la même manière, l’inégalité (4), (5) et (6) nous permet de conclure que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |S_k(x, y) - S_k(x) \Phi(y)| \ll \frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}} S_k(x).$$

Remerciements. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de stage, Sary Drappeau, pour son soutien précieux, ses nombreuses relectures et tous ses conseils, qui ont été essentiels à la rédaction de cet article.

Références

- [EK39] P. Erdős and M. Kac, *On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **25** (1939), no. 4, 206–207.
- [Ell15] P. D. T. A. Elliott, *Additive and multiplicative functions from nottingham to urbana-champaign*, Int. J. Number Theory **11** (2015), no. 05, 1357–1366.
- [Fou85] É. Fouvry, *Sur le problème des diviseurs de Titchmarsh.*, J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 51–76.
- [FT96] É. Fouvry and G. Tenenbaum, *Statistical distribution of integers without large prime factors in arithmetic progressions*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **72** (1996), no. 3, 481–514.
- [FT22] ———, *Multiplicative functions in large arithmetic progressions and applications*, Trans. Am. Math. Soc. **375** (2022), no. 1, 245–299.
- [GG23] O. Gorodetsky and L. Grimmelt, *On a conjecture of Elliott concerning a probabilistic variant of Titchmarsh’s divisor problem*, 2023.
- [Gou20] É. Goudout, *Erdős-Kac theorem for integer translates with k prime factors*, J. Number Theory **210** (2020), 280–291.
- [Hal56] H. Halberstam, *On the distribution of additive number-theoretic functions (III)*, J. Lond. Math. Soc. **s1-31** (1956), no. 1, 14–27.
- [RT58] A. Rényi and P. Turán, *On a theorem of Erdős-Kac*, Acta Arith. **4** (1958), no. 1, 71–84 (eng).
- [Sel54] A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc., New Ser. **18** (1954), 83–87.
- [Ten15] G. Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory. Transl. from the 3rd French edition by Patrick D. F. Ion*, 3rd expanded ed., Grad. Stud. Math., vol. 163, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2015.